УДК 517.977

ОПТИМАЛДАШТЫРУУ МАСЕЛЕЛЕРИНИН АНАЛИТИКАЛЫК ЧЕЧИМДЕРИ MAPLE ЧӨЙРӨСҮНДӨ ТУРГУЗУУ

Сатыбалдыева Г.М., Жакыпова О.Ж.
ОшМУнун магистранттары

Аннотация: *Макалада оптималдаштыруу маселелеринин аналитикалык чечимдери maple системасында тургузуу каралган. Эксперимент катарында конкретүү эки маселе келтирилген.*

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В СРЕДЕ MAPLE

Сатыбалдыева Г.М., Жакыпова О.Ж.
Магистранты ОшГУ

Аннотация: *В статье рассмотрена задача построение аналитических решений задач оптимизации в среде maple. В качестве эксперимента приведены два примера.*

CONSTRUCTION OF ANALYTICAL SOLUTIONS OF OPTIMIZATION PROBLEMS IN THE MAPLE ENVIRONMENT

Satybaldyeva G.M., Zhakypova O.Zh.
Master students of Osh State University

Annotation: *The article considers the problem of constructing analytical solutions to optimization problems in the maple environment. Two examples are given as an experiment.*

Математикалык моделдердин экстремалдык (максималдык же минималдык) маанилерин табуу маселеси оптималдаштыруу маселе деп аталат.

Жашоодо биз убактыбыздын көбүрөк бөлүгүн төмөнкү маселелердин оптималдуу («optimum» латын тилинен – эң сонун) чечимдерин издөөгө кетиребиз (арнайбыз):

Белгилүү ресурстарды кантип бөлүштүрүү менен эң жогорку өндүрүшкө, аз эмгек жасоого, максималдуу киреше табууга, минималдуу чыгымдарды жана убакытты кетирүүгө, эң жогорку денгээлдеги жашоого ээ болобуз.

Леонард Эйлер: Жер жүзүндө эч бир нерсенин максимум же минимум мааниси көрүнбөй болуп өтпөйт (*В мире не происходит ничего, в чем бы ни был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума*).

Оптималдаштыруу маселелери турмуштук маселелерден клип чыгат. Эң жънъкъй маселелерди карайлы жана аларды Maple системасында чыгарууну келтиребиз.

1-Маселе. Тике цилиндр формасындагы идиштин көлөмү − V_0 (турактуу), бийиктиги − h, радиусу – r болсун. Сыйымдуулугу V_0 болгон цилиндр идишин жасоо үчүн жалпы аянты S болгон тыныке материал сарпталган. Тыныке материалын үнөмдөп эң аз сарптоо үчүн, цилиндрдин h бийиктиги менен диаметрин кандай катышта алуу керек.

Чыгаруу: Геометриядан белгилүү болгондой цилиндрдин толук бети $S_{Т.Б.} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, ал эми көлөмү $V_0 = \pi r^2 h$ формуласы менен эсептелип, экинчисинен табылуучу $h = \dfrac{V_0}{\pi r^2}$ маанисин биринчиге койгон соң, толук беттин r ге карата $S_{Т.Б.} = 2\pi r^2 + \dfrac{2V_0}{r} = S(r)$ функция болорун көрөбүз, б.а. цилиндрдин толук бети радиустан гана көз каранды болгон функцияны түзүп алдык. Бул $S(r)$ функциянын экстремумун табалы.

Алгач $S\,'(r)$ ди эсептейбиз: $S\,'(r) = 4\pi r - \dfrac{2V_0}{r^2}$.

S '®=0 деп критикалык чекиттерди табабыз:

$$4\pi r - \frac{2V_0}{r^2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4\pi r^3 - 2V_0}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 - 2V_0 = 0\,;$$

$$r^3 = \frac{V_0}{2\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} \text{ – критикалык чекит.}$$

S '® ди өзгөртүп жазып алабыз: $S\,'(r) = \dfrac{4\pi}{r}\left(r^3 - \dfrac{V_0}{2\pi}\right)$, мындан критикалык чекиттин чекебелинде S '® белгисин минустан плюска өзгөрүүсү көрүнөт. Демек, $r = \sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}}$ чекитте S® функциясы минимумга ээ болот экен.

Функциянын туундусу жашабаган r=0 чекитин экинчи экстремумга шектелген чекит катарында алуунун зарылчылыгы жок, анткени радиусу нөл болгон цилиндр жасалбайт.

Глобалдык экстремумду аныктайбыз, $r \in (0, +\infty)$:

$$\lim_{r\to 0+}\left(2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}\right) = +\infty; \quad \lim_{r\to +\infty}\left(2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}\right) = +\infty;$$

$$S_{glob\min}(r) = \min\left\{+\infty; +\infty;\; S\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\right)\right\} = S\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\right).$$

$h = \dfrac{V_0}{\pi r^2}$ барабардыгына r дин ордуна анын критикалык маанисин коебуз жана төмөнкүнү алабыз:

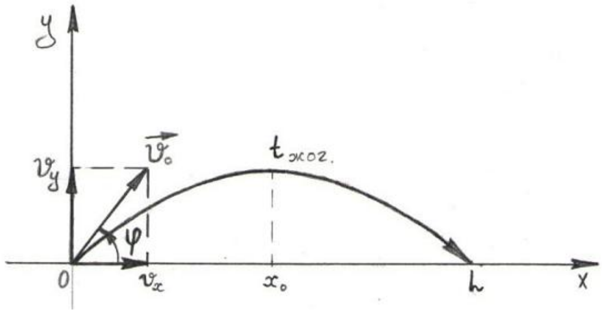
$$h = \frac{V_0}{\pi\sqrt[3]{\left(\dfrac{V_0}{2\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} = 2r\,.$$

Демек, материалды үнөмдөө үчүн цилиндрдин диаметри менен бийиктигин узундуктарын барабар кылып б.а. h=2r же h=d тандоо зарыл.

2-Маселе. Багбан шлангадан v_0 – баштапкы ылдамдыгы менен агып чыгып жаткан суу менен бакчаны сугарууда. Шлангадан чыгып жаткан суу максималдык узак аралыкка чейин учуп жетиши үчүн, багбан шланганы горизонттон канчалык φ бурчуна кыйшайтып кармоосу керек.

Чыгаруу. Горизонттон φ бурчуна кыйшак учуп чыккан телонун (бизде суу тамчылары) учуу узактыгын математикалык жактан моделдештирели.

Суу Oxy – декарттык координаталар системасынын O башталыш чекитинен агып чыксын, L – суунун учуу узактыгы же сугаруу аралыгы, T – суунун шлангадан чыгып жерге түшкөнгө чейинки толук учуу убактысы болсун. Суунун учуу жолу параболанын траекториясы боюнча жүрүп, анын убакыт бирдигиндеги $\vec{v}$ ылдамдык векторунун горизонталдык Ox огундагы проекциясы $\vec{v}_x = v_0 \cos\varphi$ турактуу саны, ал эми Oy огундагы вертикалдык проекциясы t убактысына жараша өзгөрүлмө $\vec{v}_y = v_0 \sin\varphi - gt$ саны болот.



Мында g≈9,8 – оордук күчүн ылдамдануусу болуп, $gt = \left(\dfrac{gt^2}{2}\right)'$ − убакыттын ар бир t моментинде суу тамчыларын жерге тартып турган эркин түшүү ылдамдыгы (жолдон убакыт боюнча туунду, $0 \le t \le T$). Анда суу тамчылары T – убактысынын ичинде горизонталдык багыт боюнча $L = Tv_0 \cos\varphi$ сугаруу аралыгына учуп жете алышат. T – убактысы, суунун траектория боюнча чокуга жеткенге чейинки $t_{жог}$. – жогорулоо убактысынан жана чокудан жерге түшкөнгө чейинки $t_{төм.}$ – ылдыйлап төмөндөө убактысынан $T=t_{жог}+t_{төм.}$ туруп, жогорулоо жана төмөндөө убактылары $t_{жог.}=t_{төм.}$ барабар болушсун дейли. Учуу траекториясынын чокусунда суунун көтөрүлүүсү токтогондуктан $\vec{v}_y = 0$ болуп, $0 = v_0 \sin\varphi - gt_{жог.}$ теңдештигинен

$t_{жог.} = \dfrac{v_0 \sin\varphi}{g}$ табабыз. $T = 2t_{жог} = \dfrac{2v_0 \sin\varphi}{g}$ маанисин сугаруу аралыгына коюп, төмөнкү L(φ) функциясын түзүп алабыз:

$$t_{жог.} = \frac{2v_0 \sin\varphi v_0 \cos\varphi}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g} = L(\varphi),\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

L(φ) функциясы – φ бурчунан гана көз каранды болгон суунун учуу узактыгы же сугаруу аралыгын аныктоочу математикалык модел. L(φ) функциясынын экстремумун издейбиз.

$$L(\varphi) = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$L'(\varphi) = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g};\ L'(\varphi) = 0 \Rightarrow \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}; \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ – критикалык чекит.}$$

$L'(\varphi) = \dfrac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}$ функциясы критикалык чекитте нөлгө барабар, ал эми критикалык чекиттин сол жагында оң $L'(0) = \dfrac{2v_0^2 \cos 0}{g} = \dfrac{2v_0^2}{g} > 0$, сол жагында терс $L'(\pi/2) = \dfrac{2v_0^2 \cos\pi}{g} = -\dfrac{2v_0^2}{g} < 0$. Демек, критикалык чекитте L(φ) функциясы локалдык максимумга ээ болот экен, $L_{loc\max}(\pi/4)=\dfrac{v_0^2\sin\pi/2}{g}=\dfrac{v_0^2}{g}$. $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ кесиндидеги глобалдык максимумду издейбиз: $L(0)=0,\ L\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$,

$$L_{glob\max}(\varphi)=\max\left\{L(0),L\left(\frac{\pi}{2}\right),\frac{v_0^2}{g}\right\}=\frac{v_0^2}{g}.$$

Демек, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}=45^0$ болгондо эң узун сугаруу аралыгына ээ болот экенбиз, ал $L(45^0)=\dfrac{v_0^2}{g}$.

3-Мисал. $z=x^2-3x+y^2+3y+3$ функциянын минимумун тапкыла.

Чыгарылышы. Maple пакетинде төмөнкү команданы теребиз:

```
>minimize(x^2-3*x+y^2+3*y+3);
```

натыйжада $-\dfrac{3}{2}$ маанини алабыз.

Бул минималды мааниге аргументтердин кайсыл маанилеринде ээ болуп жаткандыгын аныктоо үчүн жогоруда айтылгандай location опциясын кошуп жазабыз.

```
>minimize(x^2-3*x+y^2+3*y+3, location);
```

натыйжа төмөнкүдөй болот

$$-\frac{3}{2},\left\{\left[\left\{x=\frac{3}{2},y=-\frac{3}{2}\right\},-\frac{3}{2}\right]\right\}$$

а эгерде команданы төмөнкүдөй берсек

```
>minimize(x^2-3*x+y^2+3*y+3, x=2..4, y=-4..-2, location);
```

анда натыйжа төмөнкүдөй болот

$$-1,\ \{[\{x=2,y=-2\},\ -1]\}$$

Ушул функциянын максимумун табуу үчүн команданы төмөнкүдөй беребиз

```
> maximize (x^2-3*x+y^2+3*y+3);
```

натыйжа ∞ болот.

А эгерде командага интервалдарды көрсөтсөк

```
> maximize (x^2-3*x+y^2+3*y+3, x=2..4, y=-4..-2, location);
```

анда натыйжа төмөнкүдөй болот $11,\ \{[\{x=4,y=-4\},\ 11]\}$.

Адабияттар:

1. Кадырова С.П., Турсунов Д.А. Maple чөйрөсүндө оптималдаштыруу маселелерин компьютердик моделдөө // Вестник ЖАГУ. 2020. № 2 (40).
2. Сдвижков, О.А. Математика на компьютере: Maple 8 / О.А. Сдвижков. – М.: СОЛОН-Пресс, 2003. – 176 с.
3. Турсунов Д.А., Кудуев А.Ж. Задачи оптимизации как средство формирования инженерного мышления // Материалы межд. конф. «Формирование инженерного мышления в процессе обучения» УрГПУ. Екатеринбург, 2015. –С. 238-242.