УДК 517.955
DOI: 10.36979/1694-500X-2023-23-12-4-10

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЯМИ, ЗАДАННЫМИ ВДОЛЬ ПРЯМОЙ $y = ax + b$

Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов

Аннотация. Рассматривается задача Коши для гиперболического уравнения третьего порядка с условиями, заданными вдоль прямой $y = ax + b$. Основной целью статьи является доказательство разрешимости задачи Коши. Аналогичным методом функции Римана получено представление решения задачи Коши в явном виде. Методом интегральных уравнений доказано существование единственного решения задачи Коши. Полученное решение задачи Коши позволяет описать процесс влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенной среде, фильтрации жидкости в пористых средах.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение третьего порядка; гиперболическое уравнение; функция Римана; интегральное уравнение; задача Коши; метод последовательных приближений; сопряженное уравнение.

$y = ax + b$ ТҮЗ СЫЗЫГЫ БОЮНЧА БЕРИЛГЕН ШАРТТАР МЕНЕН ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ГИПЕРБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН КОШИ МАСЕЛЕСИ

Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов

Аннотация. Макалада $y = ax + b$ түз сызыгын бойлото берилген шарттары менен үчүнчү даражадагы гиперболалык теңдеме үчүн Коши маселеси каралат. Макаланын негизги максаты Коши маселесин чыгарууга боло тургандыгын далилдөө болуп эсептелет. Риман функциясынын ушуга окшош ыкмасы Коши маселесин чыгаруунун ачык сүрөттөлүшүн алуу үчүн колдонулат. Интегралдык тендемелер методу менен Коши маселесинин жалгыз чыгарылышы бар экендиги далилденген. Коши маселесинин алынган чыгарылышы топурак катмарына нымдын өтүшүн, гетерогендүү чөйрөдө жылуулуктун берилишин, көңдөйлүү чөйрөдө суюктуктун чыпкаланышын сүрөттөөгө мүмкүндүк берет.

Түйүндүү сөздөр: үчүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдеме; гиперболалык теңдеме; Риман функциясы; интегралдык теңдеме; Коши маселеси; удаалаш жакындаштыруу ыкмасы; түйүндөш теңдеме.

THE CAUCHY PROBLEM FOR THIRD-ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS WITH CONDITIONS GIVEN ALONG A STRAIGHT LINE $y = ax + b$

T.D. Asylbekov, B.Sh. Nuranov

Abstract. The article considers the Cauchy problem for a general strictly hyperbolic third-order equation with conditions specified along the straight line $y = ax + b$. The main goal of the article is to prove the solvability of the Cauchy problem. The Riemann function method was used to construct the Riemann function and, using the Riemann function, an explicit representation of the solution to the Cauchy problem was obtained. Using the method of integral equations, the existence of a unique solution to the Cauchy problem is proven. The resulting solution to the Cauchy problem allows us to describe the process of moisture transfer in soils, heat transfer in a heterogeneous medium, and fluid filtration in porous media.

Keywords: third order differential equation; hyperbolic equation; Riemann function; integral equation; Cauchy problem; method of successive approximations; conjugate equation.

Введение. Исследование процесса влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенной среде, фильтрации жидкости в пористых средах [1–3], приводят к необходимости изучения уравнений в частных производных гиперболического типа третьего порядка.

Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса исследованы в работах [4, 5]. Нелокальные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка исследованы в работе [6]. Краевые задачи для различных уравнений гиперболического типа третьего порядка изучены в работе [7]. Однако мало исследованы некоторые виды уравнений третьего порядка гиперболического типа, обеспечивающие существование и единственность решения соответствующих задач.

Локальные, нелокальные задачи для уравнений в частных производных третьего, четвертого порядков гиперболического типа изучены в работах М.Х. Шханукова [4, 5], А. Сопуева [8] и др. [9–11], и их учеников.

В данной работе исследована задача Коши в области

$$D = \{(x, y) : y \ge ax + b, a, b \in R, a > 0, b \ge 0, x \in (-\infty; +\infty)\}$$

для гиперболического уравнения третьего порядка, решение которого получено в явном виде. Что представляет большой практический и теоретический интерес при решении различных биологических и физических задач.

Постановка задачи. В области D рассмотрим задачу Коши для уравнения:

$$u_{xxy}(x, y) + \alpha(x, y)u_y(x, y) + \beta(x, y)u_{xx}(x, y) + \gamma(x, y)u_x(x, y) + \\ +\delta(x, y)u(x, y) = f(x, y), \tag{1}$$

где

$$\alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y), \delta(x, y) \in C(D), u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y), u_{xx}(x, y) \in C(\bar{D}),$$

$$u_{xxy}(x, y) \in C(D). \tag{2}$$

Задача 1. Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши, заданными вдоль прямой $y = ax + b$:

$$u\,|_{y=g(x)} = \varphi_1(x), \tag{3}$$

$$u_y\,|_{y=g(x)} = \varphi_2(x), \tag{4}$$

$$u_{yy}\,|_{y=g(x)} = \varphi_3(x), \tag{5}$$

где $\varphi_i(x), i = 1, 2, 3 -$ заданные гладкие функции.

Разрешимость задачи. *Функция Римана.* Сначала найдем сопряженное уравнение (1) в виде:

$$L^*(v) = -v_{xxy} - (\alpha v)_y + (\beta v)_{xx} - (\gamma v)_x + \delta v\,.$$

Тогда имеет место тождество:

$$vL(u) - uL^*(v) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{6}$$

где $P = vu_{xy} - v_x u_y + \beta v u_x - (\beta v)_x u + \gamma v u, \quad Q = v_{xx}u + \alpha v u.$

Для удобства переходим к переменным ξ, η.

Через точку $\forall C(x,y)\in D$ проводим характеристические прямые, тогда образуется треугольник $D=\{(\xi,\eta):\xi\geq x\cap\eta\leq y\cap\eta\geq a\xi+b\}$ в плоскости

ξ,η с вершинами $A(x,ax+b), B(\frac{-b+y}{a},y), C(x,y)$.

Используя формулу Грина, будем интегрировать тождество (6) по контуру ∂D.

Сначала рассмотрим участок:

$AB:\ \xi=(b-y)/a,\ \eta=a\xi+b,\ \ d\eta=ad\xi,\ \ x\leq\xi\leq(b-y)/a,\ ax+b\leq\eta\leq y$.

Далее, используем формулу вычисления криволинейного интеграла второго рода. Найдем частную производную в формулах (3), (4) не вдоль прямой $y=ax+b$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=ax+b}=\varphi_1'(x)-\varphi_2(x)a, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big|_{y=ax+b}=\varphi_2'(x)-\varphi_3(x)a, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{y=ax+b}=\varphi_1''(x)-2\varphi_2'(x)a+\varphi_3(x)a^2. \tag{9}$$

С учетом (3)–(5), (7)–(9) проинтегрируем (6) по прямой $\eta=a\xi+b$,

$$\int_x^{(b-y)/a}\{v(x,y;\xi,\eta)u_{\xi\eta}(\xi,\eta)-v_\xi(x,y;\xi,\eta)u_\eta(\xi,\eta)+\beta(\xi,\eta)v(x,y;\xi,\eta)u_\xi(\xi,\eta)-$$
$$-(\beta(\xi,\eta)v(x,y;\xi,\eta))_\xi u(\xi,\eta)+\gamma(\xi,\eta)v(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)+(v_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)\times$$
$$\times u(\xi,\eta)+\alpha(\xi,\eta)v(x,y;\xi,\eta))u(\xi,\eta))a\}\Big|_{\eta=a\xi+b}d\xi=\int_x^{(b-y)/a}\{v(x,y;\xi,a\xi+b)\times$$
$$\times(\varphi_2'(\xi)-\varphi_3(\xi)a)-v_\xi(x,y;\xi,a\xi+b)\varphi_2(\xi)+\beta(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b)\times$$
$$\times(\varphi_1'(\xi)-\varphi_2(\xi)a)-(\beta_\xi(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b)-\beta(\xi,a\xi+b)\times$$
$$\times v_\xi(x,y;\xi,a\xi+b))\varphi_1(\xi)+(v_{\xi\xi}(x,y;\xi,a\xi+b)+\alpha(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b))\times$$
$$\times\varphi_1(\xi)a\}d\xi=\int_x^{(b-y)/a}\{(\beta_\xi(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b)-\beta(\xi,a\xi+b)\times$$
$$\times v_\xi(x,y;\xi,a\xi+b)+\gamma(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b)+(v_{\xi\xi}(x,y;\xi,a\xi+b)+$$
$$+\alpha(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b))a)\varphi_1(\xi)-(v_\xi(x,y;\xi,a\xi+b)-\beta(\xi,a\xi+b)\times$$
$$\times v(x,y;\xi,a\xi+b)a)\varphi_2(\xi)+v(x,y;\xi,a\xi+b)\varphi_3(\xi)a+\beta(\xi,a\xi+b)\times$$
$$\times v(x,y;\xi,a\xi+b)\varphi_1'(\xi)+v(x,y;\xi,a\xi+b)\varphi_2'(\xi)\}d\xi. \tag{10}$$

Далее рассмотрим участок:

$BC:\eta=y, d\eta=0,\ \ x\leq\xi\leq(b-y)/a,$

$$-\int_{x}^{(b-y)/a}(v_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)+\alpha(\xi,\eta)v(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta))\Big|_{\eta=y}d\xi=\int_{A}^{B}(v_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)+$$

$$+\alpha(\xi,y)v(x,y;\xi,y))u(\xi,y)d\xi,$$

$$v_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)+\alpha(\xi,y)v(x,y;\xi,y)=0. \tag{11}$$

Затем рассмотрим участок:

$$CA:\xi=x, d\xi=0,\ a\xi+b\le\eta\le y,$$

$$-\int_{ax+b}^{y}(v(x,y;\xi,\eta)u_{\xi\eta}(\xi,\eta)-v_{\xi}(x,y;\xi,\eta)u_{\eta}(\xi,\eta)+\beta(\xi,\eta)v(x,y;\xi,\eta)u_{\xi}(\xi,\eta)-(\beta(\xi,\eta)\times$$

$$\times v(x,y;\xi,\eta))_{\xi}+\gamma(\xi,\eta)v(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta))\Big|_{\xi=x}d\eta=-\int_{ax+b}^{y}(v(x,y;x,\eta)u_{\xi\eta}(x,\eta)-$$

$$-v_{\xi}(x,y;x,\eta)u_{\eta}(x,\eta)+\beta(x,\eta)v(x,y;x,\eta)u_{\xi}(x,\eta)-\beta_{\xi}(x,\eta)v(x,y;x,\eta)-\beta(x,\eta)\times$$

$$\times v_{\xi}(x,y;x,\eta)+\gamma(x,\eta)v(x,y;\xi,\eta)u(x,\eta))d\eta=-\int_{ax+b}^{y}(v(x,y;x,\eta)u_{\xi\eta}(x,\eta)-$$

$$-(v_{\xi}(x,y;x,\eta)u(\xi,\eta))_{\eta}+(v_{\xi\eta}(x,y;x,\eta)-\beta(x,\eta)v_{\xi}(x,y;x,\eta))u(x,\eta)-$$

$$-\beta_{\xi}(x,\eta)v(x,y;x,\eta)u(x,\eta)+\gamma(x,\eta)v(x,y;x,\eta)u(x,\eta))d\eta=$$

$$=-u(x,y)+v_{\xi}(x,y;x,ax+b)\varphi_1(x). \tag{12}$$

Здесь мы учли следующие свойства функции $v(x,y;\xi,\eta)$:

$$v(x,y;\xi,\eta)\Big|_{\xi=x}=0,\ \ v(x,y;\xi,y)\Big|_{\xi=x}=1,$$

$$v_{\xi\eta}(x,y;x,\eta)-\beta(x,\eta)v_{\xi}(x,y;x,\eta)=0,\Rightarrow v_{\xi}(x,y;x,\eta)=\exp\Big(\int_{y}^{\eta}\beta(x,\eta_1)d\eta_1\Big).$$

Из (10)– (12) получим представление о решении задачи Коши на линии $y=ax+b$:

$$u(x,y)=v_{\xi}(x,y;x,ax+b)\varphi_1(x)+\int_{x}^{(b-y)/a}\{(\beta_{\xi}(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b)-$$

$$-\beta(\xi,a\xi+b)v_{\xi}(x,y;\xi,a\xi+b)+\gamma(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b)+$$

$$+(v_{\xi\xi}(x,y;\xi,a\xi+b)+\alpha(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b))a)\varphi_1(\xi)-$$

$$-(v_{\xi}(x,y;\xi,a\xi+b)-\beta(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b)a)\varphi_2(\xi)+$$

$$+v(x,y;\xi,a\xi+b)\varphi_3(\xi)a+\beta(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b)\varphi_1'(\xi)+$$

$$+v(x,y;\xi,a\xi+b)\varphi_2'(\xi)\}d\xi-\iint_{D}v(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{13}$$

где $v(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана удовлетворяет условиям:

1. $v(x,y;\xi,\eta)\in\left\{v,v_{\xi},v_{\eta},v_{\xi\xi}\in C(\overline{D}),v_{\xi\xi\eta}\in C(D)\right\}$,

по совокупности переменных;

2. $v(x,y;\xi,\eta)$ – решение сопряженной задачи:

$$\begin{cases} L^{*}(v)=-v_{xxy}-(\alpha v)_{y}+(\beta v)_{xx}-(\gamma v)_{x}+\delta v, \\ v(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=0, v_{\xi}(x,y;x,\eta)=\exp(\int\limits_{y}^{\eta}\beta(x,\eta_1)d\eta_1),, \\ v(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=\omega(x,y,\xi), \end{cases} \tag{14}$$

где $\omega(x,y,\xi)$ – является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} v_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)+\alpha(\xi,y)v(x,y;\xi,y)=0, \\ v(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0, v_{\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1. \end{cases} \tag{15}$$

Найдя функцию $v(x,y;\xi,\eta)$ из задачи (14), (15), и подставляя ее в (13), получим решение задачи (1)–(5).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. Если $y=ax+b,\ \forall a,b\in R, a\neq 0$ любая прямая, то ***уравнение (1)*** с условиями (2)–(5), заданными вдоль прямой ***в области*** D, ***имеет единственное решение.***

Из способа получения формулы Римана следует, что поставленная задача может иметь лишь единственное решение, так как мы получили для неизвестной функции $u(x,y)$ явное и однозначно определенное выражение, не делая никаких предположений о ней, кроме её существования.

Пример. На линии $y=ax+b$ рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$L(u)=u_{xxy}+cu=f(x,y), \tag{19}$$

с условиями, заданными вдоль прямой $y=ax+b$:

$$u\big|_{y=ax+b}=\varphi_1(x),\ u_y\big|_{y=ax+b}=\varphi_2(x),\ u_{yy}\big|_{y=ax+b}=\varphi_3(x). \tag{20}$$

Для получения представления решения задачи (19), (20), сначала построим функцию Римана $v(x,y;\xi,\eta)$ как решение следующей сопряженной задачи:

$$\begin{cases} L(v)=v_{\xi\xi\eta}+cv=0, \\ v(x,y;x,\eta)=0, v_{\xi}(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=1,\ \ v(x,y;\xi,y)=\omega(x,y,\xi), \end{cases} \tag{21}$$

где $\omega(x,y,\xi)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} v_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)=0, \\ v(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ \ v_{\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1. \end{cases} \tag{22}$$

Интегрируя уравнение $v_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)=0$ дважды по ξ в пределах от x до ξ, и учитывая свойства функции, получим:

$$v(x,y;\xi,y)=\xi-x, \tag{23}$$

тогда из (21) получим следующее интегральное уравнение:

$$v\left(x,y;\xi,\eta\right)=\xi-x-c\int_x^\xi d\xi_1\int_\eta^y\left(\xi-\xi_1\right)v\left(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1\right)d\eta_1. \tag{24}$$

Решение уравнения (24) найдем методом последовательных приближений [9]:

$$v=v_0+\lambda v_1+\lambda^2 v_2+\ldots+\lambda^n v_n+\ldots,$$

где λ − действительный параметр.

Тогда из (21) последовательно будем определять $v_0,v_1,v_2,\ldots,v_n,\ldots$.

Например, $v_0=\xi-x$, $v_1=-\dfrac{2}{3!}c\left(\xi-x\right)^3\left(\eta-y\right)$. Аналогичным образом найдем $v_2,v_3,\ldots$. Тогда в конечном итоге получим следующую функцию Римана:

$$v\left(x,y;\xi,\eta\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n\left(-1\right)^n c^n}{n!\left(2n+1\right)!}\left(\xi-x\right)^{2n+1}\left(\eta-y\right)^n. \tag{25}$$

Нетрудно проверить, что функция (25) удовлетворяет всем условиям задачи (21), (22).
Тогда из представления (13) имеем:

$$u(x,y)=v_\xi(x,y;x,ax+b)\varphi_1(x)+\int_x^{(b-y)/a}\left\{v_{\xi\xi}(x,y;\xi,a\xi+b)\varphi_1(\xi)a-\right.$$

$$-v_\xi(x,y;\xi,a\xi+b)\varphi_2\left(\xi\right)-v(x,y;\xi,a\xi+b)\varphi_3\left(\xi\right)a+v(x,y;\xi,a\xi+b)\times$$

$$\left.\times\varphi_2'\left(\xi\right)\right\}d\xi-\iint_D v(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta. \tag{26}$$

В заключение отметим, что задачи, рассмотренные в [12, 13] методом функции Римана, могут быть обобщены для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа третьего порядка.

Выводы. Очевидно, что значение этого решения в некоторой точке $C(x,y)$ вовсе не зависит от данных Коши вне прямоугольного треугольника ABC, образованного двумя характеристиками, проведенными через эту точку, и прямой, несущей начальные данные. Если мы будем менять данные вне этого треугольника, то решение будет меняться лишь вне этого треугольника. Таким образом, каждая характеристика будет отделять область, где решение осталось неизменным, от той области, где оно изменилось. Мы приходим к следующему выводу: к данному решению задачи, зафиксированному внутри треугольника ABC, можно присоединять вдоль характеристики, вообще говоря, различные решения, являющиеся его продолжением.

Таким образом, характеристики – это суть линии, вдоль которых можно разрезать область существования решения, если мы хотим в некоторых частях этой области заменить одно решение другим так, чтобы при этом снова получать решение уравнения во всей области. Это важное свойство характеристик тесно связано с тем, что при произвольных начальных данных, заданных на характеристиках, задача Коши, вообще говоря, неразрешима. Для всякой другой линии, зная решение по одну сторону линии, мы могли бы найти значение решения и его производных на этой прямой линии и решить задачу Коши по другую сторону линии. Таким образом, для всякой не характеристической прямой линии решение уравнения продолжается однозначно.

Поступила: 17.10.2023; рецензирована: 31.10.2023; принята: 03.11.2023.

Литература

1. *Баренблатт Г.И.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 25. Вып. 5. С. 852–864.
2. *Дзекцер Е.С.* Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах / Е.С. Дзекцер // Доклады АН СССР. 1975. Т. 220. № 3. С. 540–543.
3. *Рубинштейн Л.И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах / Л.И. Рубинштейн // Известия АН СССР. Серия География. 1948. Т. 12. № 1. С. 27–45.
4. *Шхануков М.Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах / М.Х. Шхануков // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 689–699.
5. *Шхануков М.Х.* Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка / М.Х. Шхануков // Доклады АН СССР. 1982. Т. 265. № 6. С. 1327–1330.
6. *Водахова В.А.* Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А.М. Нахушева / В.А. Водахова // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 163–166.
7. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев. Ташкент: ФАН, 1979. 238 с.
8. *Сопуев А.* Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: дис. …д-ра физ.-мат. наук / А. Сопуев. Бишкек, 1996. 249 с.
9. *Асылбеков Т.Д.* Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: дис. … канд. физ.-мат. наук / Т.Д. Асылбеков. Бишкек, 2003. 130 с.
10. *Асылбеков Т.Д.* Нелокальные краевые задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами / Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. № 3. С. 11–17.
11. *Асылбеков Т.Д.* Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для модельного гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристиками / Т.Д. Асылбеков, Б.Ш. Нуранов, Н.Т. Таалайбеков // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. № 3. С. 22–29.
12. *Курант Р.* Методы математической физики. Т. 2. / Р. Курант, Д. Гильберт. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 544 с.
13. *Лыков А.В.* Теория тепла и массопереноса / А.В. Лыков, Ю.А. Михайлов. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. 536 с.