ЧЕКИТТЕРДИН ТЫНЧ ТУРУКТУУЛУГУ ЖАНА ТАРТЫЛУУ ИНТЕРВАЛДАРЫ

Мурзабаева Айтбү Бусурманкуловна, ф.-м.и.к.
Камбарова Айсалкын Даминовна, ф.-м.и.к.
ОшМУ, Ош шаары, КР
Email: aytbu.murzabaeva@mail.ru
akambarova@mail.ru

Аннотация: *Функция скаляр жана кубулган теңдеме эки чечимге ээ болгондо маселе каралган. Чекиттердин тынч туруктуулук интервалдары табылган. Кайталанган чек ара катмарлары болушу мүмкүн болгон чечимдер үчүн сингулярдуу кубулган теңдемелер жашайт.*

Түйүндүү сөздөр: *Кубулган теңдеме, чекиттердин тынч туруктуулугу, тартылуу интервалдары.*

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОЧЕК ПОКОЯ И ИНТЕРВАЛЫ ПРИТЯЖЕНИЯ

Мурзабаева Айтбу Бусурманкуловна, к.ф.-м.н.
Камбарова Айсалкын Даминовна, к.ф.-м.н.
ОшГУ, г.Ош, КР
Email: aytbu.murzabaeva@mail.ru
akambarova@mail.ru

Аннотация: *Рассмотрена задача, когда функция скалярная и вырожденная уравнения имеет двух решений. Найдены интервалы устойчивости точек покоя. Существуют сингулярно возмущенные уравнения для решения которых, могут существовать повторяющиеся пограничные слои.*

Ключевые слова: *Вырожденное уравнение, интервалы устойчивости точек покоя, интервалы притяжения,*

STABILITY OF REST POINTS AND INTERVALS OF ATTRACTION.

Murzabeva Aitbu Busurmankulovna, PhD
Kambarova Aysalkyn Daminovna, PhD
OshSU, Osh, KR
Email: aytbu.murzabaeva@mail.ru
akambarova@mail.ru

Abstract: *The problem is considered when the function is scalar and the degenerate equation has two solutions. The intervals of stability of rest points are found. There are singularly perturbed equations for the solution of which, there may be repeated boundary layers.*

Keywords: *Degenerate equation, intervals of stability of rest points, intervals of attraction.*

Задачу рассмотрим, когда $z(t,\varepsilon)$ – скалярная функция и

$$f(t,z) = a(t)\,(z(t,\varepsilon) - b_1)(z(t,\varepsilon) - b_2), \tag{1}$$

$t \in [0,T], b_j \in R_+ (j = 1,2)$ и $0 < b_1 < b_2, t_0 = 0, z^0 \neq b_j, z(0,\varepsilon) = z^0$

Функция $a(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

U1. $a(t) \in C([0,T])$

U2. $a(t) < 0\ (0 \leq t < t_0);\ a(t_0) = 0;\ a(t) > 0\ (t_0 < t \leq T)$

Вырожденное уравнение, соответствующее заданному СВОДУ (R) имеет решения

$$\xi_1(t) \equiv b_1,\ \ \xi_2(t) \equiv b_2. \tag{2}$$

Напишем присоединенное уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = a(t)(x(\tau) - b_1)(x(\tau) - b_2) \tag{3}$$

$\xi_1(t) \equiv b_1,\ \xi_2(t) \equiv b_2$ являются точками покоя для (3).

Найдем интервалы устойчивости точек покоя. В (3) произведем замену $x(\tau - b_1) = y_1(\tau)$ новая неизвестная функция

Получим уравнение

$$\frac{dy_1(\tau)}{d\tau} = a(t)y_1(\tau)(y_1(\tau)y_1(\tau) + b_1 - b_2) = a(t)(b_1 - b_2)y_1(\tau) + a(t)y_1^2(\tau)$$

Отсюда следует: интервал$(t_0, T]$ является интервалом устойчивости для точки покоя b_1.

Введя функцию $x(\tau) - b_2 = y_2(\tau)$, получим уравнение

$$\frac{dy_2(\tau)}{d\tau} = a(t)y_2(\tau)(y_2(\tau)y_2(\tau) + b_2 - b_1) = a(t)(b_2 - b_1)y_2(\tau) + a(t)y_2^2(\tau)$$

Таким образом, интервал $(0, t_0)$ будет интервалом устойчивости для точки покоя b_2.

Задача существование интервалов притяжения решается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть рассматривается случай (1) и для $a(t)$ выполняются условия U1. U2. Тогда для решений (2) существуют интервалы притяжения и некоторые интервалы содержат интервалы неустойчивости точек покоя.

Доказательство.

Решения задачи можно представить в виде

$$z(t, \varepsilon) = \frac{A(t, \varepsilon)b_1 - b_2}{A(t, \varepsilon) - 1}, \qquad (4)$$

где

$$A(t, \varepsilon) = \frac{z^0 - b_2}{z^0 - b_1} exp \frac{b_2 - b_1}{\varepsilon} F(t);\ F(t) = \int_0^t a_j(\tau)d\tau.$$

Асимптотическое поведение функции (4) при $\varepsilon \to 0$ зависит от функции $F(t)$. Исследуем функцию $F(t)$.

Согласно условия U2 для $0 \le t < t_0$ $(F'(t) < 0)$ и для $0 \le t < t_0$ $(F'(t) > 0)$ Следовательно функция $F(t)$ убывает при $t \in [0, t_0)$, возрастает для $t \in (t_0, T]$. Поскольку $F(t_0) < 0$ и на интервале $(t_0, T]$ $F(t)$является возрастающей, то для значения функции $F(t)$ в точке T выполняется один из следующих возможностей:

F1. $F(T) < 0$ F2. $F(T) = 0$ F3. $F(T) > 0$

Рассмотрим каждую возможность отдельно.

Пусть F1. $F(T) < 0$. При выполнении этого условия и с учетом $b_1 < b_2$ для $t_0 < t \le T$ выполняется предельное соотношение $\lim_{\varepsilon\to 0} A(t, \varepsilon) = 0$.

Тогда для $t \in (t_0, T]$ имеем $\lim_{\varepsilon\to 0} z(t, \varepsilon) = b_2$.

Несмотря на нарушение условия устойчивости точки покоя b_2, на интервале $(t_0, T]$, решение задачи не отходит от неустойчивого точки покоя положения, а будет находится вблизи него. Таким образом $(0, T]$- интервал притяжения решения $\xi_2(t) \equiv b_2$.

F2. $F(T) = 0$. В этом случае на интервале $(0, T)$ выполняется предельное соотношение $\lim_{\varepsilon\to 0} z(t, \varepsilon) = b_2$. Как и в случае F1 решение не покидает возникшее неустойчивую точку покоя, а $(0, T]$- интервал притяжения решения $\xi_2(t) \equiv b_2$.

F3. $F(T) > 0$. В рассматриваемом случае существует, единственная точка T_0 и $F(T) = 0$. Для выполняется неравенство $F(T) < 0$.

Для $t \in (0, t_0)$ будет $F(T) > 0$.

Пусть $t \in [0, T_0]$,тогда $F(T) \le 0$.Поэтому при 0$< t < T_0$ выполняется $\lim_{\varepsilon\to 0} z(t, \varepsilon) = b_2$. Следовательно, $(0, T_0)$- интервал притяжения решения $\xi_2(t) \equiv b_2$.

Если $t = T_0$, то $F(T_0) = 0$ и выполняется условие

$$z(T_0, \varepsilon) = \frac{\dfrac{z^0 - b_2}{z^0 - b_1} b_1 - b_2}{\dfrac{z^0 - b_2}{z^0 - b_1} - 1} = z^0.$$

Рассмотрим функцию (4) на интервале $[T_0, T]$.

Учитывая

$$F(T) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{T_0} a(\tau)\,d\tau + \int_{T_0}^{t} a(\tau)\,d\tau = \int_{T_0}^{t} a(\tau)\,d\tau,$$

имеем $F(T) = \int_{T_0}^{t} a(\tau)\,d\tau$.

Функцию (4) представим в следующем виде

$$z(t,\varepsilon) = \frac{b_1 - b_2 A^{-1}(t,\varepsilon)}{1 - A^{-1}(t,\varepsilon)}.$$

Так как $\lim_{\varepsilon\to 0} A^{-1}(t,\varepsilon) = 0$ для $t \in (T_0, T)$. Тогда $\lim_{\varepsilon\to 0}(t,\varepsilon) = b_1$. Таким образом (T_0, T)-интервал притяжения решения $\xi_1(t) \equiv b_1$.

По результатам исследований можно сделать вывод: притяжения для рассматриваемого случая $(0, T_0)$- интервал для решения $\xi_2(t) \equiv b_2$, а (T_0, T) – интервал притяжения для $\xi_1(t) \equiv b_1$.

Заметим, что в части интервала $(0, T_0)$ точка покоя b_2 неустойчива. Теорема доказана.

ПРИМЕР. Пусть $a(t) = -\cos t, t \in R$.

Рассмотрим промежуток $[0,2\pi]$.

Если: $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$,то $-1 \le (-\cos t) \le 0$, ($\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$- интервал устойчивости b_2); при

$$\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2} \ (-cost) \ge 0$$

($\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$- интервал устойчивости b_1);

для

$$\frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi \ -1 \le (\cos t \le 0),$$

($\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ -- интервал устойчивости b_2 **).**

Имеем $F(t) = -\int_0^t \cos\tau\,d\tau = -\sin\tau$;

Таким образом, из (4)(для рассматриваемого случая) следуют следующие соотношения:

1. $0 < t < \pi \ (z(t,\varepsilon) \to b_2)$,
2. $\pi < t < 2\pi \ (z(t,\varepsilon) \to b_1)$.

Тогда на промежутке $2\pi k < t < \pi(2k+1)$ $(z(t,\varepsilon) \to b_2)$;

на промежутке $\pi(2k+1) < t < 2\pi(k+1)$ $(z(t,\varepsilon) \to b_1), k = 0,1$ ...

3. $a(t) = \begin{cases} 2(t-1), 0 \le t \le 2; \\ 2(t-3), 2 \le t \le 4; \\ 2(t-5), 4 \le t \le 6. \end{cases}$

$(0,1) \cup (2,3) \cup (4,5)$ интервал устойчивости b_2, а $(1,2) \cup (3,4) \cup (5,6)$ является интервалом устойчивости b_1 .

Определим $F(t)$, имеем

$$F(t) = \begin{cases} t(t-2), 0 \le t \le 2; \\ (t-2)(t-4), 2 \le t \le 4; \\ (t-4)(t-5), 4 \le t \le 6. \end{cases}$$

Отсюда следует, что для $\forall t \in [0,6]$ $F(t) \le 0$, а знаки равенства выполняются в точках $t = 0,2,4,6$.

Из формулы (2) для $(0,2) \cup (2,4) \cup (4,6)$ следует предельное соотношение $z(t,\varepsilon) \to b_2$ т.е данные интервалы являются интервалами притяжения решения $\xi_2(t) \equiv b_2$, несмотря на то, что в частях каждого из этих интервалов точка покоя неустойчива.

В точках $t = 0,2,4,6$ значения функции $z(t,\varepsilon)$ равноz^0.

В рассматриваемом случае значения функции $z(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ колеблется вблизи точки покоя b_2.

На основании рассмотренных случаев F2 , F3 ,1,2,3 можно сделать вывод:

В F2 случае пограничный слой появляется (дважды) в точках $t = 0, t = T$; в F3 тоже повторяется дважды; в случае 1.2 пограничный слой появляется бесконечное число раз; в 1.3 повторяется четыре раза.

Следовательно существуют сингулярно возмущенные уравнения для решения которых, могут существовать повторяющиеся пограничные слои.

Литература

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости [Текст]: - дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02/К.С. Алыбаев. - Жалалабат, 2001. - 203 с.
2. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – Москва: Наука, 1973. – 272 с.
3. Мурзабаева А.Б. Построение областей притяжения при вырождении сингулярно возмущенных уравнений[Текст] /К.С.Алыбаев, А.Б. Мурзабаева // Международный научно-исследовательский журнал. № 9 (75). Екатеринбург, 2018. - С. 7-11.
4. Алыбаев К.С. Метод погранслойных линий построения регулярно и сингулярных областей для линейных сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями / К.С.Алыбаев, К.Б. Тампагаров // Естественные и математические науки в современном мире: сб. статей по материалам XLVIIмеждународной научно-практической конференции. № 10 (45) Россия, Новосибирск: СиБАК, 2016. – С. 59-66.