УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ТРЕХ ЗОННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Омаралиева Г.А.
Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан, guli.suiun@mail.ru

Аннотация: *в статье исследуется задача Коши для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Рассматриваемая задача Коши имеет три особенности: сингулярное присутствие малого параметра; решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет полюс первого порядка, а задача Коши имеет двойной пограничный слой. Сингулярное присутствие малого параметра порождает классический пограничный слой, а особая точка соответствующего невозмущенного уравнения порождает второй пограничный слой. В результате у нас получится двойной пограничный слой. Для простоты и понимания оригинального метода исследования и понятие двойного пограничного слоя приведем подробное исследование простейшего примера.*

Ключевые слова*: бипограничный слои, задача Коши, особая точка, бисингулярное возмущение, обыкновенное дифференциальное уравнение.*

ҮЧ ЗОНАЛУ КОШИНИН МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

Омаралиева Г.А.
Ош мамлекеттик университети, Ош, Кыргызстан, guli.suiun@mail.ru

Аннотация: *макалада бисингулярдык козголгон биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн Кошинин маселеси изилденет. Каралып жаткан Кошинин маселеси үч өзгөчөлүккө ээ, алар: кичине параметрдин сингулярдуу катышуусу; тиешелүү козголбогон теңдеменин чыгарылышы биринчи тартиптеги уюлга ээ болуусу жана Кошинин маселесинин кош чектик катмарга ээ болуусу. Кичине параметрдин сингулярдуу катышуусу классикалык чектик катмарды пайда кылат, ал эми тиешелүү козголбогон теңдеменин өзгөчө чекити экинчи чектик катмарды пайда кылат. Натыйжада биз кош чектик катмарга ээ болобуз. Оригиналдуу изилдөө ыкмасы жана кош чектик катмар түшүнүгү түшүнүктүү болушу үчүн эң жөнөкөй мисалды кеңири толук изилдөөнү келтирдик.*

Ачкыч сөздөр: *кош чектик катмар, Кошинин маселеси, өзгөчө чекит, бисингулярдык козголуу, кадимки дифференциалдык теңдеме.*

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE THREE-ZONE CAUCHY PROBLEM

Omaralieva G.A.
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan,
guli.suiun@mail.ru

Abstract*: The paper investigates the Cauchy problem for a bisingularly perturbed linear inhomogeneous ordinary differential equation of the first order. The Cauchy problem under consideration has three features: the singular presence of a small parameter; the solution of the corresponding unperturbed equation has a first-order pole, and the Cauchy problem has a double boundary layer. The singular presence of a small parameter generates the classical boundary layer, and the singular point of the corresponding unperturbed equation generates the second boundary layer. As a result, we get a double boundary layer. For simplicity and understanding of the original research method and the concept of a double boundary layer, we present a detailed study of the simplest example.*

Keywords: *biboundary layers, Cauchy problem, singular point, bisingular perturbation, ordinary differential equation.*

Рассмотрим трех зонную задачу Коши

$$\varepsilon^3 y'_\varepsilon(x)+(xq(x)+\varepsilon p(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ x\in(0,T], \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0)=a, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon<<1,$, a – const, $f(0)\neq 0$, $f,q,p\in C^\infty[0,T],\ 0<q(x),p(x):x\in[0,T]$, а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Особенности начальной задачи. Первая сингулярность – присутствие малого параметра перед производной искомой функции.

Вторая сингулярность – функция $y_0(x)=x^{-1}q(x)f(x),$ при $x\to 0+$ имеет особую точку – полюс первого порядка [1]-[10].

Третья особенность появление промежуточного пограничного слоя [4], [5].

Решения задачи (1)-(2) будем искать в виде [8]-[10]:

$$y_\varepsilon(x)=v_\varepsilon(x)+w_\varepsilon(t)+\pi_\varepsilon(\tau), \tag{3}$$

где $x=t\varepsilon,\ x=\tau\varepsilon^2$.

Подставляя (3) в равенство (1) и начальное условие (2) получим задачи:

$$\varepsilon^3 v'_\varepsilon(x)+(xq(x)+\varepsilon p(x))v_\varepsilon(x)=f(x)-h_\varepsilon,\ x\in(0,T], \tag{4}$$

$$\varepsilon^2 w'_\varepsilon(t)+(t\varepsilon q(t\varepsilon)+\varepsilon p(t\varepsilon))w_\varepsilon(t)=h_\varepsilon,\ t\in(0,\varepsilon^{-1}T], \tag{5}$$

$$\varepsilon\pi'_\varepsilon(\tau)+(\tau\varepsilon^2 q(\tau\varepsilon^2)+\varepsilon p(\tau\varepsilon^2))\pi_\varepsilon(\tau)=0,\ \tau\in(0,\varepsilon^{-2}T], \tag{6}$$

$$\pi_\varepsilon(0)=y^0-v_\varepsilon(0)-w_\varepsilon(0) \tag{7}$$

Пусть $v_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j v_j(x)$ и $h_\varepsilon=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j h_j,\ h_j-const$. Тогда равенство (4) можно записать в виде:

$$v'_{j-3}(x)+xq(x)v_j(x)+p(x)v_{j-1}(x)=f(x)-h_j,\ x\in(0,T],\quad j=0,1,... \tag{8}$$

где $v_s(x)\equiv 0, s<0$.

Отсюда имеем:

$$v_j(x)=\frac{f(x)-p(x)v_{j-1}(x)-v'_{j-3}(x)-h_j}{xq(x)}.$$

В частности:

$$v_0(x)=\frac{f(x)-h_0}{xq(x)};$$

$$v_1(x)=-\frac{p(x)v_0(x)+h_1}{xq(x)};$$

$$v_2(x)=-\frac{p(x)v_1(x)+h_2}{xq(x)}.$$

Пусть

$$h_0=f(0),\ h_1=-p(0)v_0(0),\ h_j=-(p(0)v_{j-1}(0)+v'_{j-3}(0)),$$

тогда имеем: $v_j\in C^\infty[0,T],\ j=0,1,...$

Перейдем теперь к задаче (5).

Пусть $w_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j w_j(t)$, тогда имеем:

$$\varepsilon\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j w'_j(t)+(tq(t\varepsilon)+p(t\varepsilon))\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j w_j(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j h_j,\ t\in(0,\varepsilon^{-1}T],$$

отсюда, получим:

$$w_0(t)=\frac{h_0}{tq(t\varepsilon)+p(t\varepsilon)};\quad w_j(t)=\frac{h_j-w'_{j-1}(t)}{tq(t\varepsilon)+p(t\varepsilon)},\ j=1,2,...$$

Решение начальной задачи (6)-(7) ищем в виде $\pi_\varepsilon(\tau)=\varepsilon^{-m}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{jm}\pi_j(\tau)$.

Подставляя это равенство в (6) и (7) получим задачи:

$$\pi'_j(\tau)+p(\tau\varepsilon^{2)})\pi_j(\tau)+\tau q(\tau\varepsilon^{2)})\pi_{j-2}(\tau)=0,\quad \tau\in(0,\varepsilon^{-2}T],\ j=0,1,...;\qquad (9)$$

$$\pi_0(0)=-w_0(0),\quad \pi_1(0)=y^0-v_0(0)-w_1(0);\pi_j(0)=-(v_{j-1}+w_j(0)),\ j=2,3,...\qquad (10)$$

Лемма. Решение задачи

$$z'(\tau)+p_0z(\tau)=e^{-p_0\tau}\left(c_0+c_1\tau+...+c_j\tau^j\right),\quad \tau\in(0,\infty),\ z(0)=z^0$$

существует, единственно и представимо в виде

$$z(\tau)=e^{-p_0\tau}z^0+e^{-p_0\tau}\left(c_0\tau+c_1\frac{\tau^2}{2}+...+c_j\frac{\tau^{j+1}}{j+1}\right),$$

где $p_0>0$.

Доказательство. Уравнение

$$z'(\tau)+p_0z(\tau)=e^{-p_0\tau}\left(c_0+c_1\tau+...+c_j\tau^j\right),$$

запишем в виде $\left(z(\tau)e^{p_0\tau}\right)'=\left(c_0+c_1\tau+...+c_j\tau^j\right),$

полученное выражение интегрируем по τ, учитывая начальное условие:

$$z(\tau)=e^{-p_0\tau}z^0+e^{-p_0\tau}\left(c_0\tau+c_1\frac{\tau^2}{2}+...+c_j\frac{\tau^{j+1}}{j+1}\right).$$ Лемма доказана.

На основании доказанной леммы решения задач (9)-(10) существуют, единственны и экспоненциально убывают при $\tau\to\infty$.

Перейдем к оценке остаточного члена ряда:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{mj}v_j(x)+\varepsilon^{-m}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{jm}w_j(t)+\varepsilon^{-m}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{jm}\pi_j(\tau).$$

Пусть $y_{s,\varepsilon}(x)=\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^{mj}v_j(x)+\varepsilon^{-m}\sum_{j=0}^{s+1}\varepsilon^{jm}(w_j(t)+\pi_j(\tau))$ и $y_\varepsilon(x)=y_{s,\varepsilon}(x)+R_{s,\varepsilon}(x),$

где $R_{s,\varepsilon}(x)$ – остаточный член разложения.

Тогда для $R_{s,\varepsilon}(x)$ получим задачу

$$MR_{s,\varepsilon}\equiv\varepsilon^3R'_{s,\varepsilon}(x)+(xq(x)+\varepsilon p(x))R_{s,\varepsilon}(x)=\varepsilon^{s+1}\Phi,\ x\in(0,T],\quad R_{s,\varepsilon}(0)=0.\qquad (11)$$

Где

$$\Phi=p(x)v_s(x)+\sum_{j=1}^{3}\varepsilon^{j-1}v'_{s+j-3}(x)+\varepsilon w'_{s+1}(t)+\sum_{j=1}^{2}\varepsilon^j\tau q(\tau\varepsilon^2)\pi_{s-1+j}(\tau).$$

Пусть

$$d=\max_{x\in[0,T]}\Phi(x,t,\tau),$$

$$z^{up}(x)=\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon p(x)}\varepsilon^{s+1},$$

$$z^{down}(x)=-\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon p(x)}\varepsilon^{s+1},\ x\in[0,T].$$

Тогда

$$Mz^{up} > 0,\ Mz^{down} < 0,\ \ z^{up}(0) = \frac{d+1}{p(0)}\varepsilon^{s} > 0,\ z^{down}(0) = -\frac{d+1}{p(0)}\varepsilon^{s} < 0.$$

Действительно,

$$Mz^{up} \equiv \varepsilon^{3}\left(\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon p(x)}\varepsilon^{s+1}\right)' + \varepsilon^{s+1} + \varepsilon^{s+1}(d-\Phi) =$$

$$= \varepsilon^{s+1}\left(1-\varepsilon^{3}\frac{(xq(x)+\varepsilon p(x))'}{(xq(x)+\varepsilon p(x))^{2}}d\right) + \varepsilon^{s+1}\left(d-\Phi\right) > 0,\ 0<\varepsilon<<1;$$

$$Mz^{down} \equiv \varepsilon^{3}\left(-\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon p(x)}\varepsilon^{s+1}\right)' - \varepsilon^{s+1} - \varepsilon^{s+1}(d+\Phi) =$$

$$= -\varepsilon^{s+1}\left(1-\varepsilon^{3}\frac{(xq(x)+\varepsilon p(x))'}{(xq(x)+\varepsilon p(x))^{2}}d\right) - \varepsilon^{s+1}\left(d+\Phi\right) < 0,\ 0<\varepsilon<<1;$$

Выполняются все условия теоремы Чаплыгина, поэтому

$$-\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon p(x)}\varepsilon^{s+1} < R_{\varepsilon}(x) < \frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon p(x)}\varepsilon^{s+1},\ \ x\in[0,T].$$

Теорема. Для решения задачи Коши (1)-(2) на отрезке $x\in[0,T]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y_{\varepsilon}(x) = \sum_{j=0}^{s}\varepsilon^{j}v_{j}(x) + \varepsilon^{-1}\sum_{j=0}^{s+1}\varepsilon^{j}(w_{j}(t)+\pi_{j}(\tau)) + O(\varepsilon^{s)}),\ \varepsilon\to 0.$$

Пример. $\varepsilon^{3}y'_{\varepsilon}(x)+(x+\varepsilon)y_{\varepsilon}(x)=1+2x,\ \ x\in(0,1],\ \ y_{\varepsilon}(0)=1.$

$$y_{\varepsilon}(x) = e^{-\frac{1}{2\varepsilon^{3}}(x^{2}+2\varepsilon x)} + \frac{1}{\varepsilon^{3}}e^{-\frac{1}{2\varepsilon^{3}}(x^{2}+2\varepsilon x)}\int_{0}^{x}(1+2\xi)e^{\frac{1}{2\varepsilon^{3}}(\xi^{2}+2\varepsilon\xi)}d\xi .$$

В нашем примере $f(x)$=1+2x.

Внешнее решение: $y_{\varepsilon}(x) = \dfrac{1}{x}\left(1+2x+\dfrac{\varepsilon}{x}(2x^{2}-x-1)+\ldots+\left(\dfrac{\varepsilon}{x}\right)^{k}\tilde{y}_{k}(x)+\ldots\right).$

Асимптотическое разложение решения:

$$y_{\varepsilon}(x) = v_{0}(x)+\varepsilon v_{1}(x)+\varepsilon^{-1}\left(w_{0}(t)+\pi_{0}(\tau)+\varepsilon(w_{1}(t)+\pi_{1}(\tau))+\varepsilon^{2}(w_{2}(t)+\pi_{2}(\tau))\right)+R_{\varepsilon}(x)$$

где $x=\varepsilon t$, $x=\varepsilon^{2}\tau$, $h_{\varepsilon}=1-2\varepsilon$

$$v_{0}(x)=\frac{1+2x-1}{x}=2\Rightarrow v_{0}(x)=2\ \ v_{1}(x)=-\frac{2-2}{x}\Rightarrow v_{1}(x)\equiv 0\,.$$

$$w_{0}(t)=\frac{1}{1+t};\ \ w_{1}(t)=-\frac{2(t+1)^{2}-1}{(t+1)^{3}};\ \ w_{2}(t)=-\frac{2t^{2}+4t-1}{(t+1)^{5}}\,.$$

$$\pi_{0}(\tau)=-e^{-\tau},\ \ \pi_{1}(\tau)=\frac{1}{2}\tau^{2}e^{-\tau},\ \ \pi_{2}(\tau)=e^{-\tau}+\frac{1}{8}\tau^{4}e^{-\tau}.$$

Для остаточного члена получаем задачу:

$$lR_{\varepsilon}\equiv\varepsilon^{3}R'_{\varepsilon}(x)+(x+\varepsilon)R_{\varepsilon}(x)+\varepsilon^{3}(w'_{2}(t)+\tau\pi_{2}(\tau))=0,\ \ x\in(0,1],\ \ R_{\varepsilon}(0)=0. \quad (12)$$

Решение задачи (12) существует и единственно.

Рассмотрим правую часть и оценим выражение $w'_{2}(t)+\tau\pi_{2}(\tau)$.

Функция $w'_2(t)=\dfrac{6t^2+12t+9}{(t+1)^6}>0,\ t\in[0,\infty)$ монотонно убывает, по этому $\max\limits_{t\in[0,\infty)} w'_2(t)=9$. А для функция $\tau\pi_2(\tau)=\tau e^{-\tau}+\dfrac{1}{8}\tau^5 e^{-\tau}>0$ имеем $\max\limits_{\tau\in[0,\infty)}\tau\pi_2(\tau)=2.6665<3$, максимум достигается в точке τ=4,95.

Значить $|w'_2(t)+\tau\pi_2(\tau)|<12$.

Пусть верхнее и нижнее решения будут соответственно:

$$z^{up}(x)=\frac{13\varepsilon^3}{x+\varepsilon},\ z^{down}(x)=-\frac{13\varepsilon^3}{x+\varepsilon},\ x\in[0,1].$$

Тогда

$lz^{up}(x)>0,\ lz^{down}(x)<0,\ lR_\varepsilon=0,\ z^{up}(0)=13\varepsilon^2>0,\ z^{down}(0)=-13\varepsilon^2<0.$

Действительно,

$$lz^{up}\equiv\varepsilon^3\left(-\frac{13\varepsilon^3}{(x+\varepsilon)^2}\right)+\varepsilon^3+12\varepsilon^3+\varepsilon^3(w'_2(t)+\tau\pi_2(\tau))=$$

$$=\varepsilon^3\left(1-\frac{13\varepsilon^3}{(x+\varepsilon)^2}\right)+\varepsilon^3\left(12+(w'_2(t)+\tau\pi_2(\tau))\right)>0,\ 0<\varepsilon<<1;$$

$$lz^{down}\equiv\varepsilon^3\left(\frac{13\varepsilon^3}{(x+\varepsilon)^2}\right)-\varepsilon^3-12\varepsilon^3+\varepsilon^3(w'_2(t)+\tau\pi_2(\tau))=$$

$$=-\varepsilon^3\left(1-\frac{13\varepsilon^3}{(x+\varepsilon)^2}\right)-\varepsilon^3\left(12-(w'_2(t)+\tau\pi_2(\tau))\right)<0,\ 0<\varepsilon<<1;$$

Выполняются все условия теоремы Чаплыгина, поэтому

$$z^{down}(x)<R_\varepsilon(x)<z^{up}(x), x\in[0,1].$$

Для решения справедливо равенство:

$$\tilde{y}_\varepsilon(x)=2+\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{1+t}-\frac{2(t+1)^2-1}{(t+1)^3}-\varepsilon\frac{2t^2+4t-1}{(t+1)^5}-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\tau}+\frac{1}{2}\tau^2e^{-\tau}+\varepsilon\left(e^{-\tau}+\frac{1}{8}\tau^4e^{-\tau}\right)+O(\varepsilon^2).$$

Экспериментальная часть

В системе **Maple** провели эксперимент. Результаты эксперимента приведены в таблицах (в трех таблица приведены результаты в различных масштабах сетки):

Таблица 1

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\|\|y_\varepsilon(x)-\tilde{y}_\varepsilon(x)\|$ ε=0.1	0,2	$8{,}2*10^{-2}$	$1{,}9*10^{-3}$	$5{,}1*10^{-4}$	$1{,}7*10^{-5}$	$7{,}2*10^{-6}$
$\|\|y_\varepsilon(x)-\tilde{y}_\varepsilon(x)\|$ ε=0.01	0,02	0	10^{-9}	10^{-9}	10^{-9}	0

Таблица 2

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\|\|y_\varepsilon(x)-\tilde{y}_\varepsilon(x)\|$ ε=0.001	0,002	$2*10^{-8}$	$1*10^{-8}$	$1*10^{-8}$	0	0

Таблица 3

x	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005

$\|\| y_\varepsilon(x)-\tilde{y}_\varepsilon(x)\|$ ε=0.0001	0,0002	10^{-6}	0	0	0	0

Литература

1. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач [Текст] / А.М. Ильин. – М.: Наука, 1989. – 334 с.
2. Алымкулов К., Турсунов Д. А. Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач. *Изв. вузов. Математика*, **12**, 2016, 3–11.
3. Турсунов Д. А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота. Тр. ИММ УрО РАН, **22**, № 1, 2016, 271–281.
4. Tursunov D. A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **38**:3, ISSN 19950802. Maik Nauka-Interperiodica Publishing (2017), 542–546.
5. Турсунов Д. А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем. *Изв. вузов. Математика*, **3**, 2018, 70–78.
6. Кожобеков К. Г., Турсунов Д. А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку. *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **29**:3 (2019), 332–340.
7. Tursunov D. A., Kozhobekov K. G., Bekmurza uulu Ybadylla Asymptotics of solutions of boundary value problems for the equation $\varepsilon y''+xp(x)y'-q(x)y=f$. *Eurasian Math. J.*, **13**:3 (2022), 82–91.
8. Омаралиева Г. А., Турсунов Д. А. Промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенных уравнениях первого порядка. Тр. ИММ УрО РАН, 28, № 2, 2022, 193–200.
9. Омаралиева Г. А., Турсунов Д. А. Асимптотика решения двухзонной двухточечной краевой задачи. Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ., 13:2 (2021), 46–52.
10. Омаралиева Г. А., Турсунов Д. А. Сингулярно возмущенная задача с двойным пограничным слоем. Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. № 1. С. 102-109.