МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
Кыргызский Национальный Университет им. Ж.Баласагына

На правах рукописи

УДК 517.9

Алыбаев Анарбек Масалбекович

Регуляризация обратных задач, где вырождаются некорректные интегральные уравнения Вольтерра первого рода

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация

на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Научный консультант: доктор
физико-математических наук, профессор
Омуров Таалайбек Дардайылович

Бишкек - 2023

Оглавление

Математические обозначения

1. R - множество действительных чисел;

2. R^n - действительное n-мерное пространство с евклидовым расстоянием;

3. $\varepsilon -$ малый положительный параметр, $\lambda \neq 0 -$ произвольный параметр;

4. $D = \{(y,s)/0 < s < T, 0 < y < T\}$ - область, $\overline{D}$ - замыкание D;

5. $e^{f(x)} \equiv \exp(f(x))$;

6. $diag\ (x_1,...x_n)$ - диагональная матрица;

7. $colon(x_1,...x_n)$ - матрица - столбец, где $x_1, ..., x_n$ числа;

8. $||A||$ - норма для $n \times n$ матрицы A:

$$||A|| = \{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\}^{\frac{1}{2}};$$

9. евклидова норма для n- мерного вектора $u = (u_1,...u_n)$ определяется в виде:

$$||u|| = (\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2)^{\frac{1}{2}};$$

10. $\omega_{\bar{v}}(\alpha_0) = \sup\left\{\left|v\left(\varphi^{-1}(y)\right) - v\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right|;\left|y - z\right| \le \alpha_0\right\}$ - модуль непрерывности, а $\varphi^{-1}(y)$ - обратная к функции $\varphi(y) = \int_0^y h(s)ds$;

11. функция $\varphi(x)$ интегрируема, то преобразование Фурье (ПФ):

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\varphi(x)dx,$$

а обратное ПФ:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\hat{\varphi}(\omega)d\omega;$$

12. lim – символ предела (или $\to$; например: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f, \forall t \in [0,T]$);

13. $R\ (y,s,\varepsilon)$ - резольвента ядра $(-\frac{1}{\varepsilon}E(s))$, причем

$$R(y,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} W(y,s,\varepsilon)E(s), s \le y,$$

где $W(y,s,\varepsilon) = \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^y \mathrm{E}(s')ds')$ - матричная функция Коши с условием:

$$\|W(y,s,\varepsilon)\| \le \sqrt{n}\, exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^y \lambda_0(s')ds'),$$

$\lambda_i(y)$-собственные значения матрицы *E(y),* допускающие условие: $0 < \alpha \le \lambda_0(y) = \min(\lambda_i(y) \mid i = \overline{1,n})$;

14. $C[0,T]$ - пространство непрерывных функций на $[0,T]$ с нормой: $||u||_C = \max\limits_{t \in [0,T]} |u(t)|$ (является примером пространства Банаха);

15. $g(t) \in C[0,T] \cap Lip(t \mid L_g)$ – непрерывная функция *g(.),* удовлетворяющая условию Липшица по аргументу *t* с коэффициентом $0 < L_g = const$;

16. ИУВ-1 – интегральное уравнение Вольтерра первого рода, ДУ-дифференциальное уравнение, УКДФ – уравнение Кортевега Де Фриза;

17. МИП – метод интегральных преобразований, МВФ – метод вспомогательной функции, МР – метод регуляризации, ПБ – прицип Банаха, МП – метод Пикара;

18. $<\cdot,\cdot>$ – знак интеграла, например:

$$< g,u > (x)_{[0,x]} = \int_0^x g(t)u(t)dt;$$

19. для введенных обозначений пространств, дополнительно с нижним индексом «*n*» будем обозначать соответственно пространства *n* - мерных вектор функций.

Введение

Актуальность темы исследования. В общей теории математической физики (МФ) возникают различные классы обратных задач (ОЗ) [4-6,13,17,18,28,29,41-45,51,57,62] и др. При этом важное место занимают те задачи, где вырождаются корректные и некорректные интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма первого, третьего родов (ИУВ-1, ИУВ-3, ИУФ-1, ИУФ-3) [2,14,15,21,32,33,36,40,52,
53,55,61,63] и др., так как в общем смысле теория еще не разработана в этой области, то исследования ОЗ с указанными ИУ актуальны.

Известно, что в соответствии с искомой функцией выделяются различные типы ОЗ. Например, граничные, коэффициентные, ретроспективные (задачи с обратным временем) и ОЗ интегральной геометрии, или возможны комбинированные постановки ОЗ, когда одновременно находятся причинные характеристики разных типов (например, граничные и начальные условия и т.д.). Исследования выше отмеченных ОЗ опираются в теорию прямых задач МФ [1,3,16,19,20,22-27,30,33-35,37-39,54,56,58-60,65,66] и т.д.

Отметим, что основоположниками теории некорректных задач являются А.Н. Тихонов, М.М. Лаврентьев и В.К. Иванов [20,31,54], причем разработанные способы исследований указанных задач этими авторами были применены и развиты другими учеными к различным областям науки. Так как, в общем виде большинство задач МФ могут быть эквивалентным образом преобразованы к операторным уравнениям (ОУ), например:

$$Au = f,\ u \in X,\ \ f \in F,$$

где оператор A считается определенным на непустом множестве некоторого метрического пространства X с метрикой ρ_X (в общем случае указанный оператор может быть нелинейным), то для решения ОУ были использованы способы, связанные с аналитическими методами регуляризации (МР), численно- регуляризационными алгоритмами и др.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Исследование по теме диссертации проводилось в рамках утверждённой тематики «Операторные уравнения, равномерная топология, компьютерные моделирования и их приложения», факультета математики и информатики. Тематика утверждена протоколом №6 НТС КНУ имени Ж. Баласагына от 30 мая 2018 года.

Цель и задачи исследования. Целью исследования являются изучения вопросов регуляризируемости и единственности решения ОЗ в ограниченных и неограниченных областях, вырождающиеся в некорректные нелинейные ИУВ-1 с различными пределами интегрирования, где решения связаны с функцией Дирака (ФД).

К задачам исследования относятся коэффициентные ОЗ с операторами гиперболического типа в ограниченной области и с нагруженными операторами параболического характера и типа Кортевега-Де Фриза (КДФ) в неограниченной области, где вырождаются некорректные нелинейные ИУВ-1, например:

$$A\varphi \equiv \int_0^x K(x,s)\varphi^n(s)ds = f(x), (n=2;3)$$

причем некорректность понимается на основе не согласованности интеграль-ного оператора Вольтерра со свободной функцией $f(x)$ в начале отрезка [0,T], т.е.: $f(0) \neq 0$, а это значит, что решение ИУ не принадлежит к классу непрерывных функций. Здесь относительно известных функций имеют место $C(D) \ni K(x,s), (K(s,s) \geq 0, D = \{(x,s): 0 \leq s \leq x \leq T\}), C^1[0,T] \ni f,$ при этом допускается, что $\varphi(x)$ - неотрицательная особая функция, связанная с ФД.

Основными методами исследования являются: метод интегральных преобразований (МИП), метод регуляризации (МР) в обобщенном смысле, элементы функционального и математического анализа.

Научная новизна исследования. Получены следующие результаты:

- разработан МР для некорректных нелинейных ИУВ-1 с различными пределами интегрирования в специальном пространстве в обобщенном смысле;

- на основе модификации разработанного МР доказаны регуляризируемости некорректных нелинейных систем ИУВ-1 в введенных пространствах;

- с учетом разработанного варианта МР решены ОЗ с операторами гиперболического типа, где вырождаются некорректные ИУВ-1 с различными пределами интегрирования;

- разработанные алгоритмы регуляризации использованы для решения нагруженных ОЗ параболического характера и типа Кортевега Де Фриза в неограниченной области, где вырождаются ИУВ-1.

Теоретическая и практическая ценность. Работа в основном носит теоретический характер, а ее результаты дополняют исследования по теории регуляризации ОЗ в обобщенном смысле в ограниченных и неограниченных областях. Результаты работы могут быть применены к задачам геофизики, влагопереноса, к задачам моделирования динамических развивающихся систем [2,3,39,62] и др.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- выбор пространств и разработка регуляризирующих алгоритмов решения для исследуемых систем нелинейных некорректных ИУВ-1;
- на основе разработанного МР доказать регуляризируемости ОЗ с операторами гиперболического типа, где вырождаются некорректные ИУВ-1 с различными пределами интегрирования;
- с учетом модификации разработанного МР доказать регуляризируемости в обобщенном смысле ОЗ, вырождающихся в некорректные многомерные ИУВ-1;
- на основе разработанных МР доказать регуляризируемости ОЗ с нагруженными дифференциальными операторами параболического характера и типа Кортевега Де Фриза в НО, где вырождаются ИУВ-1.

Личный вклад соискателя. Все научные результаты, изложенные в диссертации относительно изучаемых некорректных ИУВ-1 и ОЗ, и положения выносимых на защиту, получены диссертантом.

В совместных работах [8,9,46-50,67-70] постановка задач принадлежит научному консультанту, обсуждение выводов и заключения внутри работ принадлежат другим соавторам, диссертанту – все научные выводы работ и их доказательства

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных конференциях различного ранга, и на семинарах, например:

- VI Congress of the Turkic World Mathematical Society, Astana-Kazakhstan, October 2-5, 2017;

- II международный НК «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» - МНК, Бишкек, 2021;

- VII. International TWMS Congress - 2023, September 20-23, Turkestan (Kazakhstan);

- на расширенном семинаре кафедры «Алгебры, геометрии, топологии и преподавания высшей математики» факультета «МиИ» КНУ им. Ж. Баласагына в 2023 г. (руководитель - д.ф-м.н., проф. Канетов Б.К.).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Опубликовано 16 работ в различных журналах КР, РК, РФ, Украины и Индии. Из них 1 монография [46], 12 научных статей [7-11, 47-50,64,67,68], 3 тезиса [69-71], в том числе 9 статей в зарубежных изданиях [8-11,49,50,64,67,68]. Из указанных работ 5 написаны единолично [7,10,11,64,71], а 11-совместные работы [8,9,46-50,67-70]. Статьи [7,47] входят в базу данных РИНЦ КР, а статьи [8-11,49,50] в базу данных РИНЦ РФ, а статьи [64,67,68] в базу данных WOS.

Структура и объем диссертации. Настоящая работа состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы из 71 наименований. Объем текста 203 страниц.

Глава 1

Обзор по интегральным уравнениям Вольтерра первого рода (ИУВ-1) и по обратным задачам (ОЗ), вырождающиеся в некорректные ИУВ-1 в определенных пространствах

Во многих задачах МФ, биологии и других наук встречаются некорректные классы ОЗ, связанные с некорректными ИУВ-1. Как выше отметили, впервые, теория таких уравнений были даны в работах [20,30,55] и были найдены формулы обращения или частичного обращения и выписаны представления решений в различных пространствах.

Известно, что каждая исследуемая задача имеет свои особенности, так как решение зависит от реальных дополнительных условий, которые могут быть введены на основе экспериментальных или на основе априорных информаций. Существует широкий класс прикладных задач, решение которых по своему физическому смыслу неотрицательно, например задачи, описывающие распределение плотности масс, заряда, энергии, температуры и другие. В основном эти задачи некорректные от неустойчивости решения в системах, где вырождаются некорректные уравнения. Указанные системы имеют различные формы: алгебраические, дифференциальные, интегральные и т.д.

Поэтому, в данной работе и исследуются ОЗ с дифференциальными операторами гиперболического типа в ограниченной области и нагруженными операторами параболического типа и КДФ в неограниченной области, где вырождаются указанные классы некорректных нелинейных ИУВ-1 с различными пределами интегрирования, где решения связаны с ФД. Все результаты, излагаемые в диссертационной работе строго математически обоснованы. Физические описание этих задач хорошо указаны в работах [1,13,18,28,29,51,54,62] и др.

§1.1. Обзор работ по некорректным ИУВ-1
и по ОЗ, где вырождаются некорректные ИУВ-1

В данном параграфе приводится обзор по некорректным ИУВ-1 и по ОЗ, где вырождаются указанные ИУ с решениями в определенных пространствах [20,21,40,54,62] и др.

§1.1.1. Краткий обзор по некорректным ИУВ-1. Как известно трудности, возникающие при изучении некоторых классов некорректных ИУВ-1, заключаются в том, когда исследуемые ИУ преобразуются к операторным уравнениям, например для наглядности [54,62]:

$$Au = f \,, \tag{1.1.1}$$

где $u \in X\,,\, f \in F; X\,, F -$ метрические пространства, то, что обратный оператор A^{-1}, заданный на всей своей области определения $AX \subset F,$ не является непрерывным. Значит, в некорректных уравнениях элемент: $u_\delta = A^{-1} f_\delta,$ даже если он существует, не является приближенным решением, так как u_δ при малых δ может как угодно уклоняться от точного решения u.

Отметим, что аналогичные дефекты были указаны и в других работах исследователей в этой области. Например, в работе акад. М.И. Иманалиева [21] при исследовании некорректных нелинейных ИУВ-1 с решением в классе сингулярных обобщенных функций (СОФ), отмечено, что нельзя естественно определить никакую нелинейную функцию в пространстве СОФ. А это значит, что метод, учитывающий δ – функцию не применяется в прямом смысле для некорректных нелинейных ИУВ-1.

Для наглядности сказанного, приводится ИУВ-1 из работы [21], где указано, что решение, некоторым образом, регуляризованного ИУ:

$$\int_0^t K\left(t, s, y\left(s\right)\right) ds = f\left(t\right), \tag{1.1.2}$$

может слабо сходится к некоторой ОФ, но эту функцию нельзя рассматривать как решение ИУВ-1 (1.1.2), когда имеют место условия:

а) $C^{1,0,1}(D) \ni K(t,s,y(s)); K_y(t,t,y) \geq \lambda > 0, (D=[0,T]\times[0,T]\times R),$

б) $C^1[0,T] \ni f(t);\ f(0) \neq 0.$

Действительно, относительно (1.1.2) было введено параметризированное ИУ:

$$\int\limits_0^t K(t,s,y_\varepsilon(s))ds = f(t) - f(0)\exp(-\frac{t}{\varepsilon}) \tag{1.1.3}$$

с приближенным решением в смысле малого параметра по правилу:

$$\begin{cases} y_\varepsilon(t) = G[t, \omega_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon} f(0)e^{-\frac{t}{\varepsilon}}], \\ \upsilon_\varepsilon(t) = \omega_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon} f(0) e^{-\frac{t}{\varepsilon}}, \\ K(t,t,y_\varepsilon\ (t)) + \int\limits_0^t K_t(t,s,y_\varepsilon\ (s))ds = f\,'(t) + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} f(0), \\ \omega_\varepsilon(t) = -\int\limits_0^t K_t(t,s,G(s,\omega_\varepsilon(s) + \frac{1}{\varepsilon} f(0)e^{-\frac{s}{\varepsilon}}))ds + f\,'(t), \\ |\omega_\varepsilon(t)| \leq C_0, \forall t \in [0,T]; \quad |\upsilon_\varepsilon(t)| \leq C_0 + \frac{1}{\varepsilon} Ce^{-\frac{t}{\varepsilon}}, (|f(0)| = C), \\ |y_\varepsilon| \leq C_1 + L_G(C_0 + \frac{1}{\varepsilon} Ce^{-\frac{t}{\varepsilon}}) = C_2 + C_3 \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\varepsilon}}, \end{cases} \tag{1.1.4}$$

так как

$$\begin{cases} K(t,t,y) = \upsilon(t), \\ y(t) = G(t,\upsilon(t)), \forall (t,\upsilon) \in D_0, (D_0 = [0,T]\times R), \\ C(D_0) \ni G(t,\upsilon) \cap Lip(\upsilon|L_G), (0 < L_G = const), \\ |G(t,0)| \in \mathrm{C}_1, \forall t \in [0,\mathrm{T}], (C_2 = C_1 + C_0 L_G; C_3 = CL_G, (C, C_i = consn, i = \overline{0,3})). \end{cases} \tag{1.1.5}$$

В рамках указанных условий было доказано, что при ε→0 решение ИУ (1.1.3) слабо сходится в некотором смысле (точнее в смысле $L^1(0,T)$) к решению вырожденного интегрального уравнения (ВырИУ), где свободный член согласуется с интегральным членом в начале отрезка. Но полученное решение ВырИУ, нельзя рассматривать как решение ИУ (1.1.2). Что и требовалось показать (ЧиТП).

Если в ИУВ (1.1.2) с условием (б) ядро обращается тождественно в нуль на диоганале, то алгоритм (1.1.3) и (1.1.4) не применим. Поэтому в работе [40], с учетом указанных условий для построения решения в классе СОФ, было разработано специальное пространство $Z^2(0,T)$, содержащее все элементы $L^2[0,T]$, а также сингулярных ОФ: $z(t)$, сосредоточенные в начале отрезка. При этом, предлагаемый МР учитывает особую функцию:

$$\Omega_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} f(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \begin{cases} 0, t \neq 0, \\ \infty, t = 0, \end{cases} \qquad (1.1.6)$$

которая ограничена в пространстве $Z^2(0,T)$, если

$$(\varphi(t))^{-\beta} \in L^1(0,T), 2 < \beta, (\varphi(t) = \int_0^t h(s)ds, 0 < h \in L^1(0,T)). \qquad (1.1.7)$$

Здесь $L^2[0,T]$ - пространство Гильберта квадратично интегрируемых функций *u(t),* определенные на $[0,T]$ (оно полно в норме, порожденной со скалярным произведением) с нормой:

$$\| u(t) \|_{L^2} = (\int_0^T | u(t) |^2 \ dt)^{\frac{1}{2}}.$$

И в этом случае, показаны аналогичные факты, которые указаны в случае (1.1.2) и (1.1.3) с условиями (а,б), (1.1.4) и (1.1.5). Эти факты указаны не только в смысле $L^1(0,T)$, как в работе [21], а были обобщены и в $Z^2(0,T)$.

Отметим, что метод работы [40], применим и для ИУВ-1 типа Гаммерштейна:

$$\lambda \int_0^t K(t,s) F(s, \varphi(s)) ds = f(t), \forall t \in [0,T], \qquad (1.1.8)$$

когда функция $K(x,s)$ не дифференцируется по x и имеют место условия:

в) $K(t,s) \in C\ (D) \cap Lip(t | L_K), K(t,s)\big|_{s=t} \equiv 0, (D = \{(t,s) : 0 \le s \le t \le T\}, 0 < L_K = const),$

$F(t, \varphi(t)) \in C(D_1) \cap Lip(\varphi | L_F), (D_1 = [0,T] \times R; 0 < L_F = const); 0 < \lambda -$ заданный, произвольно фиксированный параметр, г) $f(t)\in C^1[0,T];\ f>0$(или <0)$,\forall t\in[0,T];$(или $f(0)\neq 0$).

В области ИУВ-1, отметим и работу [63], но в отличие от вышеуказанных работ, здесь относительно ИУВ (1.1.2) допускаются определенные ограничения, которые связаны с ядром и свободной функцией вида:

д) $K(t,s,y(s))\equiv K_0(t,s)y(s)+K_1(t,s,y(s)); K_1\in C^{0,0,1}(D_2), K_1\big|_{s=t}\equiv 0, (D_2=D\times R),$

$K_0(t,s)\in C\ (D)\cap Lip(t\big|L_{K_0}); C[0,T]\ni K_0(t,t)\geq\alpha>0, (0<L_{K_0}=const),$

или $L^q[0,T]\ni K_0(t,t)\geq 0, q\geq 1, K_1\big|_{s=t}\equiv 0,$

е) $f(t)\in C^1[0,T],\ f(0)=0.$

При этом регуляризируемость (1.1.2) доказана в пространствах сильной и слабой сходимостью с установлением близости решений параметризированного и исходного ИУ, соответственно, когда искомая функция определяется в начале отрезка. Регуляризируемость ИУВ-1 (1.1.2) в обобщенном смысле с условием (б) в указанной работе не рассматривается.

Известно, что в нелинейных ИУВ-1 с неклассическими пределами интегрирования (НПИ) [2,36] и др., с определенными ядрами построения их решений в классе СОФ, тем более усложняется.

В общем случае, в ИУВ-1 с классическими или НПИ с решениями в классе СОФ, делается акцент на регуляризации в обобщенном смысле нелинейных ИУ с помощью весовых функций, которые позволяют частичного обращения операторов и дают возможность построить решения в классе СОФ или лебеговых пространствах с весовыми функциями, как это вышеуказаны .

Отметим, что в теории ИУВ-1 с НПИ, например ИУ:

$$\begin{cases}\lambda\displaystyle\int_0^{b(x)} K(x,s)\varphi(s)ds=f(x),\forall x\in[0,T],\\ \lambda\displaystyle\int_0^{b(x)} K(x,s)F(s,\varphi(s))ds=f(x),\forall x\in[0,T],\end{cases}\qquad(1.1.9)$$

не разрешимы в пространстве $C[0,T]$, когда в начале отрезка по переменной

x выполняются условия:

$$f(x) \in C^1[0,T],\ f(0) \neq 0 \ \text{ или } f \neq 0, \forall x \in [0,T], \qquad (1.1.10)$$

ж) $F(x,\varphi(x)) \in C(D_1) \cap Lip(\varphi \big| L_F); b(x) \in C[0,T] : b(0) = 0, (0 \le b(x) \le x \le T)$.

Известно, что в работе [2] исследованы ИУ с НПИ, например ИУ вида:

$$\int_{a(x)}^{b(x)} K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), x \in [x_0,T], \varphi(x) = \varphi^0(x), x \in [a(x_0), b(x_0)], \qquad (1.1.11)$$

где рассмотрены вопросы корректности и построения саморегуляризирующих методов кубатур (СМК) с учетом возмущения исходных данных. Простые формулы обращения позволяют решить, как проблему их корректности, так и проблему построения СМК и др.

В общем, в работах [2,36] ИУ типа (1.1.11) исследуются в пространствах Банаха и с требованием гладкости известных функций с согласованием со свободной функцией. Но когда нет согласования с функцией $f(x)$, то (1.1.11) является некорректным ИУВ-1.

Проблемные вопросы в области ИУВ-1 (1.1.9), (1.1.11) возникаются и в случае, когда ядро имеет условие:

$$K(x,s) \in C\ (D) \cap Lip(x \big| L_K), 0 \le K(x,x) \in C[0,T], \qquad (1.1.12)$$

а свободная функция допускает условие (1.1.10), то даже ИУВ-1 с классическими пределами интегрирования типа (1.1.8), почти не изучены, а ИУ (1.1.9), (1.1.11), тем более.

Кроме того, так как системы (1.1.9), (1.1.11) входят в класс уравнений типа В.М. Глушкова, которые получаются при моделировании динамических развивающихся систем и при исследовании задач идентификации интегральных динамических моделей развития экономических систем [2,36] и др., то результаты исследований данной работы по указанным ИУ, представляют интерес не только в теоретическом плане, но и в практическом смысле.

Отметим, что уравнения аналогичного характера были рассмотрены и в работах А.Н. Тихонова, А.В. Гончарского, В.В. Степанова [62] при восстановлении смазанного изображения: $\dot{z}(\dot{\xi}, \dot{\eta})$ – интенсивность исходного изображения в точке $(\dot{\xi},\dot{\eta})$ плоскости $\zeta=-f_1$. В приближении геометрической оптики считается, что оптическая система создает действительное изображение плоскости $\zeta=-f_1$ в плоскости $\zeta=f_2$. Используя для регистрации изображения стандартного фотопроцесса, получим плотность почернения фотопленки в точке *(x,y)* плоскости $\zeta=f_2$, пропорциональную величине

$$D(x,y)=k\int_{x}^{x+w(\tau)} z(\xi,y)K(\xi-x)d\xi \equiv Az, \tag{1.1.13}$$

где

$$K(\xi-x)=[1/\upsilon(t)]_{t=t^*(\xi-x)},\ w(t)=\int_0^t \upsilon(t)dt,$$

τ - величина времени экспонирования, $t^*(x)$ – решение уравнения $w(t)=x$, а $\upsilon(t)$ – скорость перемещения объекта в плоскости $\zeta=f_2$, зависящая от времени, считается, что скорость $\upsilon(t)$ изменяется достаточно медленно.

Чтобы получить приближенное решение ИУ (1.1.13), используется стандартная схема Тихонова минимизации функционала:

$$M^{\alpha}[z]=\|Az-D\|_{L^2}^2+\alpha\|z\|_{L^2}^2 \tag{1.1.14}$$

с выбором параметра α, в соответствии с принципом невязки. Кроме того, этот параметр можно определить также перебором, визуально оценивая каждый раз качество восстановленного изображения.

§1.1.2. Краткий обзор по некоторым ОЗ, связанные с ИУВ-1. Как отметили выше, что есть множества прикладных ОЗ, где вырождаются некорректные ИУВ-1 с решениями в классе ОФ, причем при регуляризации указанных ИУ имеют место те дефекты, которые вышеуказаны (см. п. 1.1.1).

Поэтому, рассмотрим некоторые работы, которые необходимы в прямом или косвенном смысле, для изучения задач данной работы. Например, в работах [40,42] при изучении ОЗ вырождаются некорректные ИУВ-1 с ядрами, которые тождественно обращаются в нуль на диагонале.

Регуляризируемость рассматривается в $Z^p(0,T)$ с особой функцией $\Omega_\varepsilon(t)$ вида (1.1.6) с условием:

$$(\varphi(t))^{-\beta} \in L^1(0,T),\, p < \beta, \qquad (1.1.15)$$

причем $Z^p(0,T)$ - пространство всех суммируемых на $[0,T]$ функций со степенью p, т.е. $L^p[0,T]$, а также СОФ, сосредоточенные в начале отрезка $[0,T]$.

Далее, в работе [41] указанный МР с весовыми функциями было модифицировано для решения ОЗ типа Эйлера-Дарбу с условием (1.1.10) и ограничением вида (1.1.15), где вырождаются ИУВ-3, и т.д.

Известно, что в электромагнитных методах геофизики используются как поля искусственных источников, так поле естественного происхождения (магнитотеллурическое поле - МП), источники которого находятся в магнитосфере и ионосфере Земли. Кроме того, так как источники МП находятся высоко над Землей, то математическая модель МП упрощается, в результате получим ОЗ магнитотеллурического зондирования (МТЗ; см. работу [62] (стр.54-75):

$$\begin{cases} u''(z) + iw\mu_0\sigma(z)u(z) = 0, \quad z \in (0,H), \\ u(z=0) = 1, \quad u'(z=H) - i\sqrt{iw\mu_0\sigma_H}\,u(z=H) = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

$$Y(w) = \frac{H_y(z=0)}{E_x(z=0)} = \frac{1}{E_x(z=0)}\left(-\frac{i}{w\mu_0}\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)_{z=0}, \qquad (2)$$

где (2) - это адмитанса (проводимость) электромагнитного поля, при этом вектор функция: $P=(u,\sigma)$ является неизвестным (первая функция относительное электрическое поле (ЭП) в Земле, а вторая функция распределение электропроводности), причем, в основном исследуемая ОЗ неустойчива.

Действительно, сказанное вытекает из того, что по известному адмитансу $Y(w)$ однозначно и устойчиво определяется интегральная проводимость (ИП):

$$S(z) = \int_0^z \sigma(s)ds,\, z \in [0,H], \qquad (1.1.16)$$

и при условии: $\|Y_1(w)-Y_2(w)\|_{L^2}\to 0$, следует: $\|S_1(z)-S_2(z)\|_C\to 0$.

Причем, соответствующие $\sigma_1(z),\sigma_2(z)$ определяются из ИУВ-1 (1.1.16), решение которого неустойчиво, а это означает, что близким $S_1(z),S_2(z)$ могут соответствовать как угодно сильно отличающиеся $\sigma_1(z)$ и $\sigma_2(z)$.

С другой стороны, исследуемое уравнение (1) с теми условиями, которые указаны выше преобразуется к ИУ-2, и оно однозначно разрешимо. Следовательно, с учетом (2) следует, что адмитанс непрерывно зависит от ИП (эти выводы хорошо указаны вышеотмеченной книге). ЧиТП.

При исследовании этой задачи, интересен не эти выводы, которые отмечены относительно полученных уравнений, а то, что сказано, т.е. ИП (1.1.16) в ОЗ МТЗ определяется устойчиво. Это означает, что для всех $\sigma(z)\in\sum_\delta$ имеем близкие ИП, т.е.:

$$\|S(\sigma)-S(\bar{\sigma})\|_C\le\varepsilon(\delta),\sigma(z)\in\sum{}_\delta,(\varepsilon(\delta)\to 0\ \text{ при }\ \delta\to 0). \qquad (1.1.17)$$

Таким образом, множество эквивалентных решений $\sum_\delta$ эквивалентно по ИП, т.е., это позволяет создать метод решения ОЗ, основанный на предварительном вычислении $S(z)$.

Если найдется некоторое распределение $\hat{\sigma}(z)$, удовлетворяющее условию:

$R^2(\tilde{\rho}_k,\rho_k^T(T,\sigma))\le\delta^2,\sigma\in\sum_N$, (N – слойных след с периодом T), т.е. $\hat{\sigma}(z)\in\sum_\delta$, причем $\hat{\sigma}(z)$ может сильно отличаться от истинного распределения электропроводности $\bar{\sigma}(z)$. При этом, если вычислим ИП:

$$\tilde{S}(z)=\int_0^z\hat{\sigma}(s)ds, \qquad (1.1.18)$$

а так как $S(z)$ определяется устойчиво, то

$$\left\| \tilde{S}(z) - \int_0^z \sigma(s)ds \right\|_{L^2} \le \varepsilon(\delta), \delta \in \sum{}_\delta . \qquad (1.1.19)$$

Определение $\hat{\sigma}(z) \in \sum_\delta$ не требует применения устойчивого метода, так как является промежуточным результатом для получения приближенной $\tilde{S}(z),$ хотя в указанном пространстве не можем указать близости $\hat{\sigma}(z), \sigma(z)$ при выполнении неравенство (1.1.19).

Преимущество такого подхода заключается в следующем:

а) знание ИП играет большую роль в электроразведке, так как позволяет проводить пространственный анализ распределения ИП;

б) во-вторых, приходим к более простой линейной ОЗ, что упрощает применение МР, так как приближенно известна ИП $\tilde{S}(z)$.

В результате приближенное распределение электропроводности вычисляется из задачи минимизации по стандартной схеме Тихонова, т.е.:

$$\tilde{\sigma} = \left\{ \sigma_\alpha : \inf_\sigma \left[\left\| \tilde{S}(z) - \int_0^z \sigma(s)ds \right\|_{L^2}^2 + \alpha \left\| q(z)(\sigma(z) - \sigma^0(z)) \right\|_{L^2}^2 \right] \right\}$$

с выбором параметра регуляризации α, в соответствии с принципом невязки, $\sigma^0(z)$ – гипотетическое распределение электропроводности, построенное по априорным данным, $q(z) > 0$ учитывает достоверность априорной информации на различных глубинах $(0 < q(z) < 1)$.

В нашем случае, так как в рассматриваемых ОЗ вырождаются некорректные ИУВ-1 с решениями, которые связаны с ФД, то регуляризируемость этих ИУВ-1 в $Z^2(0,T)$ понимается в обобщенном смысле с условием (1.1.19), только вместо L^2 будет $Z^2(0,T)$ (см. стр. 13 или $Z^p(0,T), (1 < p < \infty)$, см. стр.17; здесь не учитываются условия (1.1.7) и (1.1.15), соответственно), в чем и сильно отличается от указанной задачи.

Значит, рассматриваемые задачи и их результаты исследований не только дополняют теории ИУВ-1 и ОЗ, где вырождаются эти уравнения, но и имеют практическую значимость в этой области.

§1.1.3. Исследуемые задачи диссертационной работы. Основные результаты работы содержатся в трех главах данной диссертации, а точнее в главах 2,3 и 4. Содержание главы 2 состоит из двух параграфов, где изучены следующие ИУВ-1:

Задача 2.1. Рассматривается некорректное нелинейное ИУВ-1:

$$H\theta \equiv \int_0^x K(x,\tau)\theta^2(\tau)d\tau = F(x) \tag{2.1.1}$$

с условиями

$$\begin{cases} K(x,\tau) \in C(D_0) \cap Lip(x\left|L_K\right.); K(.) \ge 0; K(0,0) \ne 0; \left|K(.)\right| \le C_{01}, \\ D_0 = \{(x,\tau): 0 \le \tau \le x \le X\}, \\ C[0,X] \ni F(x) \cap Lip(x\left|L_F\right.); \left|F(x)\right| \le C_{02}; F(x) \ge \alpha > 0, \forall x \in [0,X], \\ 0 < L_K, L_F = const, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

F, K - известные функции, причем $\theta -$ неизвестная неотрицательная функция, связанная с ФД, т.е. из класса $Z^2(0,X)$. При этом ставится задача, доказать регуляризируемости (2.1.1) в вышеуказанном пространстве, так как при условии (2.1.2) ИУВ-1 (2.1.1) некорректно поставлено в $C[0,X]$.

Задача 2.2. Пусть задается система ИУВ-1 в векторно-матричной записи:

$$H\theta \equiv \int_0^x\int_0^y K(x,y,\tau,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau = F(x,y), \tag{2.2.1}$$

где

$$\begin{cases} K(x,y,\tau,\nu) \in C_{n\times n}(D_0) \cap Lip(x\left|L_K\right.); K(.) \ge 0; \left\|K(.)\right\| \le C_{01}, \\ K(0,y,0,y) \ne 0, \forall y \in [0,b], (D_0 = [0,X]\times[0,b]\times\{0 \le \tau \le x \le X, 0 \le \nu \le y \le b\}), \\ (x,y) \in \bar{D}_1, (D_1 = (0,X)\times(0,b)), \\ F(x,y) \in C_n^{0,1}(\bar{D}_1) \cap Lip(x\left|L_F\right.); F(0,y) \ne 0, \\ F(x,0) = 0; F(x,y) > 0, \forall x \in [0,X], y \in (0,b]; \ \left\|F(x,y)\right\| \le C_{02}, \forall (x,y) \in \bar{D}_1, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

F, K - известные данные, т.е. n -мерная векторная функция (столбец), $n\times n$ - матричная функция , соответственно. Нормы в указанных случаях определяются, например, $\left\|A\right\| -$ норма для $n\times n$ матрицы A:

$$\|A\| = \{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\}^{\frac{1}{2}},$$

а для n – мерного вектора $u \in R^n$: $\|u\| = \{\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2\}^{\frac{1}{2}}$. При этом θ – неизвестная неотрицательная n- мерная векторная функция из пространства $Z_n^2(D_1)$, т.е. всех n-мерных вектор-функций с компонентами из $Z^2(D_1)$, содержащее все элементы $L^2(\bar{D}_1)$, а также неотрицательных элементов: $z(x,y)$, связанные с ФД по аргументу x.

Так как, при условии (2.2.2) система (2.2.1) некорректна по Адамару, т.е. не имеет решение в $C_n(\bar{D}_1)$, то, чтобы исследовать однозначной разрешимости и регуляризируемости системы (2.2.1) в обобщенном смысле в $Z_n^2(D_1)$, поступим также, как и в случае параграфа 2.1.

Глава 3 состоит из следующих задач:

Задача 3.1. Если задается ОЗ:

$$V_{t^2} - b^2V_{x^2} + K_0(x)[\Phi(V) + \int_0^t \Psi(t-s)V(s,x-b(t-s))\frac{\partial}{\partial x}[V_s(s,x) - bV_x(s,x)]ds] = \\ = (J\theta)(t), \forall(t,x) \in \bar{D}_0, \tag{3.1.1}$$

$$\begin{cases} V(t,x)\big|_{t=0} = 0, V(t,x)_t\big|_{t=0} = \psi(x), \forall x \in R, \\ (V_t - bV_x)\big|_{x=x_0} = g(t),\ \forall t \in [0,T], (D_0 = (0,T) \times R, x_0 \in R), \end{cases} \tag{3.1.2}$$

с условием согласования

$$(V_t - bV_x)\big|_{t=0} = \psi(x),\ (g(0) = \psi(x_0)), \tag{3.1.3}$$

где

$$(J\theta)(t) \equiv \lambda \int_0^{M(t)} K(t,\eta)\theta^2(\eta)d\eta \tag{*}$$

при этом относительно известных функций:

$0 < b, 0 < \lambda < 1, (b, \lambda = const); K_0(x) \in C^1(R); \Phi(V) \in C^2(R); \Psi(t) \in C^1[0,T],$

$g(t) \in C^1[0,T], \psi(x) \in C^2(R), M(t), K(t,s)$ имеют место условия

а) $\sup\left|\Phi_V^{(j)}\right| \le \beta_1, (j=0,1); \Phi_V(V) \in C(R) \cap Lip(V\left|L_{\Phi_V}\right.),$

б) $\left|g^{(j)}(t)\right| \le \beta_2; \left|\Psi^{(j)}(t)\right| \le \beta_3, \forall t \in [0,T], (j=0,1); \left|\psi^{(i)}(x)\right| \le \beta_4, (i=0,1,2),$

в) $\begin{cases} 0 \le K_0(x) \le \tilde{K}_0 < \infty : \int\limits_R K_0(x)dx \le \tilde{K}_{02} = const, (\left|K_0'(x)\right| \le \tilde{K}_{03} = const), \\ \tilde{K}_0 = \max(\tilde{K}_{01}, \tilde{K}_{02}, \tilde{K}_{03}); \text{например: } K_0(x) \equiv e^{-\beta x^2} \ (\beta > 0; \lim\limits_{x\to\pm\infty} K_0(x) = 0), \end{cases}$

г) $K(t,s) \in C(D) \cap Lip(t\left|L_K\right.), 0 < L_K = const; 0 \le K(t,t), K(0,0) \ne 0; \left|K(.)\right| \le C_{01},$

$D = \{(t,s): 0 \le s \le t \le T\},$

д) $0 \le M(t) \le t \le T, M(0) = 0$, $M(t) \in C[0,T] \cap Lip(t\left|L_M\right.), 0 < L_M = const.$

То в рамках указанных условий, требуется доказать регуляризируемости ОЗ в обобщенном смысле в введенном пространстве, так как вектор функция $P = (V, \theta)$ является неизвестным, причем $\theta(t)$- неотрицательная функция, связанная с ФД.

Задача 3.2. Рассматривается нелокальная ОЗ:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\lambda D(U)\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}] = \lambda \frac{\partial U}{\partial t} + f(x)(J\theta)(t), \tag{3.2.1}$$

$$\begin{cases} U\big|_{t=0} = \varphi(x), \forall x \in [0,H], \\ U_x\big|_{x=0} = \psi_1(t); U\big|_{x=H} = \psi_0(t), \forall t \in [0,T], \\ \psi_0(0) = \varphi(H), \psi_1(0) = \varphi_x(0), \end{cases} \tag{3.2.2}$$

$$U_{x^2}(x_0,t) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i U_x(x_i,t) = g(t), \forall t \in [0,T], ((x_0; x_i) \in (0,H)), \tag{3.2.3}$$

где интегральный оператор определяется по правилу:

$$J\theta \equiv \int\limits_0^t K(t,s)\theta^3(s)ds, \tag{3.2.4}$$

а известные функции:

$$\lambda = A^{-1}, \lambda_i, (i=1,2); D(U), f(x), \varphi(x), \psi_0(t), \psi_1(t), g(t)$$

изучаемой ОЗ допускают условия:

a$_1$) $0<\lambda,\lambda_i=const; C^2(R)\ni D(U); C[0,H]\ni f(x); C^2[0,H]\ni \varphi(x); \psi_0(t),\psi_1(t), g(t)\in C^1[0,T]$,

a$_2$) $K(t,s)\in C(D_1)\cap Lip(t|L_K), 0<L_K=const; 0\le K(t,t), K(0,0)\ne 0; |K(.)|\le C_{01}$,

$D_2=\{(t,s): 0\le s\le t\le T\}$.

Неизвестным является вектор функция: $P=(U,\theta)$, поэтому требуется доказать регуляризируемости исходной ОЗ в обобщенном смысле в введенном пространстве, так как относительно функции θ из исходной ОЗ вырождается нелинейное ИУВ-1 с неотрицательным особым решением, связанная с ФД, т.е.:

$$\int_0^t K(t,s)\theta^3(s)ds=F(t) \qquad (*)$$

с условием

a$_3$) $F(t)\in C[0,T]\cap Lip(t|L_F), 0<L_F; F(t)\ge\alpha>0, |F(t)|\le C_{02}, \forall t\in[0,T]$.

Значит, регуляризируемость этого ИУ принимается в $Z^3(0,T)$.

Задача 3.3. Пусть задается ОЗ:

$$u_{tx^2y}+\lambda u_{x^2y}=\lambda_1 u_y+\Phi_0(u,u_x,u_{x^2})+f(t)(H\theta)(x,y), \qquad (3.3.1)$$

$$\begin{cases} u(0,y,t)=u_x(0,y,t)=0, \\ u(x,0,t)=0; u(x,y,0)=\varphi(x,y), \forall(x,y,t)\in\bar\Omega, (\Omega=(0,X)\times(0,b)\times(0,\infty)), \\ \varphi(0,y)=\varphi(x,0)=\varphi(0,0)=0, (\varphi_x(0,y)=0; u(t,0,0)=0; u(0,0,0)=0), \end{cases} \qquad (3.3.2)$$

$$\begin{cases} (u_t+\lambda u)\big|_{t=T}=g(x,y), \forall(x,y)\in\bar D_1, \\ g\big|_{x=0}=g\big|_{y=0}=0, (g(0,0)=0; D_1=(0,X)\times(0,b); T\in(0,\infty)), \end{cases} \qquad (3.3.3)$$

где

$$H\theta\equiv\int_0^x\int_0^y K(x,\tau,y,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau, \qquad (*)$$

и относительно известных функций:

$\lambda,\lambda_1,\Phi_0,f,\varphi,g,K$

допускаются условия:

$$\begin{cases} C(D_0) \ni K(x,\tau,y,\nu): \left|K(.)\right| \le C_{01}, \forall (x,\tau,y,\nu) \in D_0, \\ D_0 = \{(x,\tau): 0 \le \tau \le x \le X\} \times [0,b] \times [0,b], \\ K(.) \ge 0; K(0,0,y,y) \ne 0, \forall y \in [0,b], \\ C^{1,1,1}(D_2) \ni \Phi_0(u_1,u_2,u_3), (D_2 = R \times R \times R), \\ \left|\Phi_0\right| \le \beta_1, \left|\Phi_{0u_i}\right| \le \beta_2, (i = \overline{1,3}), \\ C^{2,1}(\bar{D}_1) \ni \varphi(x,y): \\ \sup\limits_{\bar{D}_1}[\left|\varphi(.)\right|, \left|\varphi_x\right|, \left|\varphi_{x^2}\right|, \left|\varphi_y\right|, \left|\varphi_{xy}\right|, \left|\varphi_{x^2 y}\right|] \le \beta_3, \\ C^{1,1}(\bar{D}_1) \ni g(x,y): \\ \sup\limits_{\bar{D}_1}[\left|g(.)\right|, \left|g_x(.)\right|, \left|g_y(.)\right|, \left|g_{xy}(.)\right|] \le \beta_4, \\ C(R_+) \ni f(t): 0 \le f(t) \le f_{01} < \infty: \int\limits_{R_+} f(t)dt \le f_{02} = const, \\ f(T) \ne 0; \left\|f(t)\right\|_C \left|f^{-1}(T)\right| \le \beta_5, \\ f_0 = \max(f_{01}, f_{02}), \beta_0 = \max \beta_i, (i = \overline{1,5}). \end{cases} \tag{3.3.4}$$

Неизвестным является вектор-функция: $P = (u, \theta)$, причем, так как из ОЗ (3.3.1)-(3.3.3) вырождается некорректное ИУВ-1:

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^y K(x,\tau,y,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau = F(x,y)$$

с неотрицательным решением, связанное с ФД, то регуляризируемость этого ИУ при условии

$$\begin{cases} F(x,y) \in C^{0,1}(\bar{D}_1) \cap Lip(x| \;\; L_F), 0 < L_F = const, \\ \left|F(x,y)\right| \le C_{02}, \forall (x,y) \in \bar{D}_1, \\ F(0,y) \ne 0; F(x,0) = 0; F(x,b) \ge \alpha > 0, \forall x \in [0,X] \end{cases}$$

рассмативается в обобщенном смысле в $Z^2(D_1)$ (см. задачу 2.2).

В главе 4 исследуются следующие ОЗ:

Задача 4.1. Рассматривается нагруженная коэффициентная ОЗ:

$$U_t + \lambda_1 U (U_{x^2}(x_0,t))^2 + \lambda_2 U = (\Upsilon\theta)(t)U(x,0), \tag{4.1.1}$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \forall x \in R, \tag{4.1.2}$$

$$U\Big|_{x=0} = g(t), \forall t \in [0,T], (x_0 \in R), \tag{4.1.3}$$

где: А) $\Upsilon\theta \equiv f(t)$ или

Б) $\begin{cases} \Upsilon\theta \equiv \int\limits_0^t h(s)\Phi(s,\theta(s))ds, \\ \Phi \in C^{0,1}(D_0 = [0,T]\times R), \Phi_\theta \ge \alpha > 0, (\theta(0) = q_0, \theta \in C[0,T]), \end{cases}$

или В) $\Upsilon\theta \equiv \int\limits_0^t h(s)\theta(s)ds, (\theta(0) = 0, \theta \in L^2[0,T])$.

При этом, относительно известных функций допускаются условия:

а) $q_0, \lambda_1, 0 < \lambda_2, \alpha = const, \varphi(x) \in C^2(R), g(t) \in C^1[0,T]$,

$t \in [0,T], x \in R, \forall (x,t) \in \bar{D}, (D = R \times (0,T))$,

б) $0 < h(t) \in L^1(0,T), \phi(t) = \int\limits_0^t h(s)ds$.

Тогда, в рамках указанных условий требуется восстановить векторную функцию, в случаях (А,Б):

$$P_0 = (U(x,t), f(t)), (P = (U(x,t), \theta(t))), \text{ в}$$

$$\begin{cases} W_C(\bar{D}) = \{(U, f) : U \in C^{2,1}(\bar{D}), f(t) \in C[0,T]\} \\ \text{или} \\ W_C(\bar{D}) = \{(U, \theta) : U \in C^{2,1}(\bar{D}), \theta(t) \in C[0,T]\} \end{cases}$$

с нормой

$$\begin{cases} \|P_0\|_{W_C} = \|U\|_{C^{2,1}(\bar{D})} + \|f\|_{C\ [0,T]} \\ \text{или } \ \|P\|_{W_C} = \|U\|_{C^{2,1}(\bar{D})} + \|\theta\|_{C\ [0,T]}, \end{cases} \tag{4.1.4}$$

а в случае (В): $P = (U(x,t), \theta(t))$ в $W^2(\bar{D})$, где норма определяется по правилу:

$$\begin{cases} \|P\|_{W^2(\bar{D})} = \|U\|_{C\ (\bar{D})} + \sum\limits_{i=1}^{2} \|U_{x^i}^{(i)}\|_{C(\bar{D})} + \|U_t\|_2 + \|\theta\|_{L^2[0,T]}, \\ \|U_t\|_2 = (\sup\limits_R \int\limits_0^T |U_s(x,s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\theta\|_{L^2[0,T]} = (\int\limits_0^T |\theta(s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Отсюда видно, что результаты этого параграфа содержатся в трех пунктах данного параграфа.

Задача 4.2. Пусть задается ОЗ:

$$U_t + \lambda U (U_x(t, x_0))^2 + U_{x^3} = \varphi(x)(J\theta)(t), \forall (t,x) \in \bar{D}, (D = (0,T) \times R), \tag{4.2.1}$$

$$U(0,x) = \varphi(x), \forall x \in R, \tag{4.2.2}$$

$$(U_t + U_{x^3})\Big|_{x=0} = g(t), \forall t \in [0,T], \tag{4.2.3}$$

где

$$J\theta \equiv \sum_{i=0}^{1} (\lambda_i \int_0^t K_0(t,s)\theta(s)ds)^{i+1}, (\lambda_0 = 1), \tag{*}$$

и $\lambda, \lambda_1, \varphi(x), g(t), K_0(t,s) -$ известные функции удовлетворяют условия:

а) $\lambda < 1, 0 < \lambda_1; \lambda, \lambda_1 = const; \varphi(x) \in C^3(R); g(t) \in C^1[0,T]$,

б) $K_0(t,s) \in C\ (D_0) \cap Lip(t\big|L_{K_0}), (D_0 = \{(t,s): 0 \le s \le t \le T\}), K_0(t,s) \ge 0,$

$K_0(t,0) \equiv q = const; \big|K_0(t,s)\big| \le C_{01} = const.$

Неизвестным является вектор-функция: $P = (U, \theta)$ из векторного пространства:

$$\tilde{G}^1_{[\tilde{W}^1(D); Z^1(0,T)]}(D) = \{(U(t,x), \theta(t)) : U \in \tilde{W}^1(D), \theta \in Z^1(0,T)\}$$

с нормой:

$$\begin{cases} \|P\|_{\tilde{G}^1_{[\tilde{W}^1(D);Z^1(0,T)]}(D)} = \|U\|_{\tilde{W}^1(D)} + \|\theta\|_{Z^1(0,T)}, \\ \|U\|_{\tilde{W}^1(D)} = \|U\|_{C^{0,3}(\bar{D})} + \|U_t\|_1, \\ \|U_t\|_1 = \sup\limits_R \int_0^T |U_t(t,x)|dt. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Здесь $Z^1(0,T)$ - пространство, содержащее все элементы $L^1[0,T]$, а также неотрицательных элементов $z(t)$, связанные с ФД, причем, если существует пробная функция с условием $g(0) = 0$, то $< g, z >= 0$.

Тогда, в рамках указанных условий регуляризируемость ОЗ доказывается в обобщенном смысле в векторном пространстве $\tilde{G}^1_{[\tilde{W}^1(D);Z^1(0,T)]}(D)$.

§1.2. Краткий обзор по обобщенным функциям и по пространствам, которые связаны с пространствами данной работы

Как отметили в первом параграфе, если исследуемые ИУВ-1 или ОЗ, где вырождаются эти ИУ имеют особые решения, связанные с ФД (СОФ), то, чтобы доказать регуляризируемости в обобщенном смысле и единственности решения изучаемых задач используются специальные пространства, которые введены в работе.

§1.2.1. Краткий обзор по ОФ. А) Здесь в краткой форме укажем необходимые общие понятия по ОФ, особенно по СОФ, которые нужны для данной работы. Поэтому, нет необходимости цитировать те фундаментальные работы, которые существуют в этой области.

В связи с этим, в данной работе цитируются книги [16,26], так как указанные понятия ОФ с приложениями в области физики и математики в достаточном объеме хорошо указаны, но, это не означает, что другие работы не соответствуют сказанному.

Кроме того, чтобы ввести более простые понятия об ОФ ограничимся функциями одной переменной $f(x), x \in R$, так как в данной работе, в основном исследуются некорректные одномерные ИУВ-1. С другой стороны, в приложениях ОФ в физике [18,28] и др., пользуются такими идеализированными понятиями, как, например, плотность материальной точки, точечного заряда, диполя, интенсивности силы и др., которые в основном рассматриваются в R^3. Например, на самом деле, реально нельзя измерить плотность вещества в точке, а можно измерить лишь его среднюю плотность в достаточно малой окрестности этой точки и указать, что это и является плотностью вещества в данной точке.

Чтобы показать сказанное, определим плотность, создаваемую материальной точкой массы $m=1$, где точка совпадает с началом координат. Далее, распределим массу $m=1$ равномерно внутри шара U_ε - это идеализированная модель шара достаточно малого радиуса ε (плотность указанного шара есть единица, поделенная на обьем шара). Кроме того, пусть в пространстве нет других масс, то в результате получим среднюю плотность по следующему закону:

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\pi\varepsilon^3}, |x| \le \varepsilon, \\ 0, |x| > \varepsilon, \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

где $x \in R^3$. При этом

$$\int_{R^3} \delta_\varepsilon(x)dx = \int_{|x|\le\varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} dx = 1, (x \in R^3) \,. \qquad (1.2.2)$$

Если устремим $\varepsilon \to +0$, то из (1.2.1) следует, что предельная плотность $\delta(x)$ имеет вид:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, x = 0, \\ 0, x \ne 0. \end{cases} \qquad (1.2.3)$$

На основе плотности (1.2.3), нельзя восстановить массу при помощи интегрирования, так как функция (1.2.3) не интегрируема ни по Риману, ни в несобственном смысле. Поэтому, рассмотрим вместо поточечного предела функции $\delta_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to +0$, так называемый «слабый предел».

Для этого $\delta_\varepsilon(x)$ будем рассматривать как линейный функционал над линейным пространством непрерывных в R^3 функции, ставящий в соответствие каждой непрерывной в R^3 функции $\varphi(x)$ число :

$$< \delta_\varepsilon, \varphi >= \int_{R^3} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{|x|\le\varepsilon} \frac{3\varphi(x)}{4\pi\varepsilon^3} dx \,,$$

или используя теорему о среднем и учитывая (1.2.2) из последнего равенства с переходом пределу, когда $\varepsilon \to +0$ получим

$$\lim_{\varepsilon\to+0} < \delta_\varepsilon, \varphi >= \lim_{\varepsilon\to+0} \varphi(\tilde{x}_\varepsilon) = \varphi(0) =< \delta, \varphi >, \qquad (1.2.4)$$

где δ есть линейный функционал, ставящий в соответствие непрерывной функции число $\varphi(0)$, то говорят, что линейный функционал δ есть слабый предел линейных функционалов δ_ε при $\varepsilon \to +0$. Причем, этот функционал и называют функцией Дирака (ФД).

Отметим, что при таком подходе по плотности можем восстановить массу точки, т.е. она равна

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{R^3}\delta_\varepsilon(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}<\delta_\varepsilon,1>=1=<\delta,1>. \qquad (1.2.5)$$

Заметим, что если в точке $x=0$ сосредоточена:

1) масса m, то соответствующая плотность следует считать равной $m\delta(x)$;

2) а если масса m сосредоточена в точке x_0, то ее плотность считается равной $m\delta(x-x_0)$, где:

$$<m\delta(x-x_0),\varphi>=m\varphi(x_0).$$

3) В общем случае, если в различных точках $x_k,(k=1,2,...,n)$, сосредоточены массы m_k, то соответствующая плотность определяется в виде:

$$\sum_{k=1}^{n}m_k\delta(x-x_k).$$

Таким образом, плотность, создаваемая материальными точками, не может быть описана в рамках классического понятия функций, и поэтому для ее описания следует привлекать линейные непрерывные функционалы (ОФ).

Так как используемые локально интегрируемые функции и дельта-функция Дирака в физических приложениях описывают распределения (плотности) масс, зарядов, сил и др., поэтому ОФ также называются распределениями.

Б) Теперь, в краткой форме перейдем более общему теоретическому изложению ОФ $f(x), x\in R$. Известно, в соответствии с определением [16], что в общем, ОФ называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций. Но сингулярную ОФ нельзя отождествить ни с какой локально интегрируемой функцией, так как ОФ, определяемые локально интегрируемыми в R функциями по правилу:

$$< f,\varphi >= \int f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in D \qquad (1.2.6)$$

называются регулярными ОФ, где имеет место линейность этого функционала и непрерывность на D - пространство основных функций. С другой стороны, чем уже это пространство, то тем больше существует линейных непрерывных функционалов на нем. Поэтому, чтобы построить содержательную теорию ОФ, введем важное пространство основных функций D. Знаем, так как носителем функции $\varphi(x)$ называется замыкание множества тех x, где $\varphi(x) \neq 0$, причем если носитель функции есть ограниченное множество, то функция $\varphi(x)$ называется финитной (обращающаяся в нуль вне некоторого конечного отрезка).

Пусть к множеству $D\ (R)$ отнесем все финитные бесконечно дифференцируемые в R функции, где сходимость в D определяется следующим образом, т.е. последовательность $\{\varphi_n\}$ элементов из D сходится к функции $\varphi \in D$, если:

а) существует число R_0, что $\sup\varphi_n \subset U_{R_0}$, т.е. вне этой окрестности все φ_n равны нулю;

б) при $\forall k,\ (k = 0,1,2,...)$ последовательность производных $\{\varphi_n^{(k)}\}$ сходится равномерно на R к $\varphi^{(k)}(x)$ (равномерность сходимости по различным k не предполагается), то, в этом случае можем писать:

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{D} \varphi(x) \text{ при } n \to \infty. \qquad (1.2.7)$$

При этом линейное множество D с введенной в нем сходимостью называем пространством основных функций D, причем операция k – дифференцирования непрерывна из D в D.

Известно, что ОФ, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках, тем не менее, имеет место обращении в нуль ОФ в области. Тогда очевидно, что ОФ обращается в нуль и в окрестности каждой точки этой области, справедливо и обратное. Для наглядности сказанного, приводим некоторые леммы из книги [16].

Лемма 1.2.1. Если ОФ обращается в нуль в окрестности каждой точки области E , то она обращается в нуль и в области E.

Лемма 1.2.2 (дю Буа-Реймон). Для того чтобы локально интегрируемая в E функция $f(x)$ обращалась в нуль в указанной области в смысле ОФ, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)=0$ почти везде в E. Классическим примером сингулярной ОФ является δ – функция Дирака, т.е.:

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty, x=0,\\ 0, x\neq 0,\end{cases}$$

причем, определяемая как функционал, действующий на функции $\varphi(x)\in D,$ по правилу:

$$<\delta,\varphi>=\varphi(0), \tag{1.2.8}$$

$\delta\in D_0'$ – пространство СОФ, так как здесь не содержится регулярные ОФ, при этом линейность и непрерывность функционала (1.2.8) очевидны. Поэтому, D_0' отличается от общего пространства ОФ, символически которое обозначается в виде [16,26]: D'- это линейное пространство всех ОФ (регулярных и сингулярных), где сходимость в D' рассматривается как слабая сходимость последовательности функционалов, т.е. последовательность ОФ $\{f_n\}_1^\infty$ из D' сходится к ОФ $f\in D',$ если для любой $\varphi\in D$:

$$<f_n,\varphi>\xrightarrow[n\to\infty]{}<f,\varphi>. \tag{1.2.9}$$

В этом случае можем писать и символической форме:

$f_n\xrightarrow{D'}f$ при $n\to\infty$, (называется слабой сходимостью).

Весьма важным является свойство полноты пространства D'.

Теорема 1.2.1. Пусть последовательность $\{f_n\}_1^\infty$ из D' таково, что для каждой $\varphi\in D$ числовая последовательность $<f_n,\varphi>$ сходится при $n\to\infty$. Тогда функционал f на D , определенный равенством:

$$<f,\varphi>=\lim_{n\to\infty}<f_n,\varphi>,(\varphi\in D),$$

также является линейным и непрерывным на D, т.е. $f \in D'$.

Как следствие этой теоремы следует лемма вида:

Лемма 1.2.3. Если последовательность функционалов $\{f_n\}_1^\infty$ из D' удовлетворяет условиям теоремы 1.2.1 и последовательность основных функций $\{\varphi_n\}_1^\infty$ из D стремится к нулю в D. То: $< f_n, \varphi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Замечание 1.2.1. Известно, если ОФ $f \in D',$ то объединение всех окрестностей, где $f = 0,$ образует открытое множество (ОМ) Q_f, которое называется нулевым множеством ОФ f. Кроме того, Q_f есть наибольшее ОМ, где ОФ f обращается в нуль, так по лемме 1.2.1 в каждой области, содержащейся в Q_f, $f = 0$.

Носителем ОФ f называется дополнение Q_f до R, причем носитель f обозначится $\sup f$, так что $\sup f = R \setminus Q_f$; $\sup f$ – замкнутое множество. При этом, если $\sup f$ – ограниченное множество, то, как в случае основных функций и ОФ f называется финитной. Можем сказать, что носитель f состоит из тех только точек, ни в какой окрестности которых f не обращается в нуль.

Замечание 1.2.2. Иногда, вместо последовательности $f_n \in D'$ рассматривается семейство функционалов $\{f_\varepsilon\}$, ε – малый параметр (см. физическое приложение). В этом случае формула: $f_\varepsilon \xrightarrow{D'} f$ при $\varepsilon \to +0$ означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} < f_\varepsilon, \varphi > \longrightarrow < f, \varphi > \text{ для } \forall \varphi \in D. \qquad (1.2.10)$$

В частности, запись: $f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} \delta$ при $\varepsilon \to +0$ означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} < f_\varepsilon, \varphi > \longrightarrow < \delta, \varphi > = \varphi(0) \text{ для } \forall \varphi \in D. \qquad (1.2.11)$$

Пример 1(математический пример). Показать, что

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} \xrightarrow{D'} \delta(x) \text{ при } \varepsilon \to +0. \qquad (1.2.12)$$

В самом деле, что функция $f_\varepsilon(x)$ локально интегрируема и значит порождает регулярный функционал в D'. Поэтому, взяв любую функцию $\varphi \in D,$ считая, что ее носитель лежит на отрезке $[-T,T]$, имеем

$$< f_\varepsilon, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{-T}^{T} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} [\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)]dx. \quad (1.2.13)$$

Так как функция φ дифференцируема на R и финитна, то, применяя формулу Лагранжа, получим неравенство

$$\left|\varphi(x) - \varphi(0)\right| = \left|x\varphi'(\tau)\right| \le C_0 \left|x\right|, (\sup_{x \in [-T,T]} \left|\varphi(x)\right| = C_0) \text{ при } \varepsilon \to +0. \quad (1.2.14)$$

Тогда, на основе (1.2.13) справедливы следующие утверждения:

$$1) \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \varphi(0) \int_{-T}^{T} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} dx = \left|\text{здесь подинтегральная функция четная } (**)\right| =$$

$$= \varphi(0) \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2 \int_{0}^{\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{-\rho^2} d\rho \to \varphi(0) \text{ при } \varepsilon \to +0,$$

так как: $\frac{1}{\sqrt{\pi}} 2 \int_{0}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho = 1;$

$$2) \left| \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} [\varphi(x) - \varphi(0)]dx \right| \le \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} C_0 \int_{-T}^{T} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} \left|x\right| dx = \left|\text{см. } (**)\right| \le \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi}} C_0 2 \int_{0}^{\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{-\rho^2} \rho d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi}} C_0 (1 - e^{-\frac{T^2}{\varepsilon}}) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to +0.$$

Отсюда следует, что для любой $\varphi \in D$ выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \to +0} < f_\varepsilon, \varphi >= \varphi(0) =< \delta, \varphi > . \quad (1.2.15)$$

Это означает, что: $f_\varepsilon \xrightarrow{D'} \delta$ при $\varepsilon \to +0$. ЧиТП.

§1.2.2. Краткий обзор по пространствам и терминологиям, которые необходимы для данного пункта. А) В §1.1 отмечено, что при доказательстве регуляризируемости некорректных нелинейных ИУВ-1 и ОЗ, связанные с этими ИУ, используются специальные пространства, например $Z^p(0,T), (1 < p < \infty)$, содержащее все элементы $L^p[0,T]$, а также СОФ сосредоточенные в начале отрезка $[0,T]$ и др.

Отметим, что пространство $L^p[0,T]$ не является полным, поэтому, введем $\tilde{L}^p(0,T)$ – линейное пространство Лебега [16,26,56,60], по определению, является пополнением пространства $L^p[0,T]$, элементами которого являются некоторые функции, приблизиться к которым с любой
степенью точности (в среднем с показателем *p*) можно с помощью непрерывных на [*0,T*] функций, так как $L^p[0,T]$ плотно в $\tilde{L}^p(0,T)$ и интегралы понимаются в смысле Лебега.

В связи с этим и приводим некоторые понятия краткой форме по пространствам, которые относятся пространствам данной работы.

Известно, что в общем случае [60] векторное лебегово пространство определяется следующим образом, т.е., если $J \subset R$ – заданный интервал, а X – банахово пространство, при этом $1 < p \leq \infty$, то $\tilde{L}^p_J(X)$ это пространство всех сильно измеримых функций (ИФ) $f : J \to X$, для которых: $\int\limits_J \|f(t)\|^p dt < \infty$ с нормой:

$$\|f\|_p = (\int\limits_J \|f(t)\|^p dt)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.2.16}$$

а $\tilde{L}^\infty_J(X)$ – пространство всех сильно ИФ $f : J \to X$, для которых: $ess \sup\limits_J \|f\| < \infty$ суть существенно ограниченные функции с нормой:

$$\|f\|_\infty = ess \sup_J \|f\|. \tag{1.2.17}$$

А также придерживаемся условных обозначений, описанных выше и полагаем: $\tilde{L}^p(0,T)$ или $\tilde{L}^p(R)$ (обычные линейные пространства Лебега).

Неравенство Гельдера для скалярных функций может быть записано:

$$\int\limits_J |\varphi(t)\psi(t)| dt \leq \|\varphi\|_p \|\psi\|_q \tag{1.2.18}$$

для всех

$$\varphi \in \tilde{L}^p(J), \psi \in \tilde{L}^q(J), p^{-1} + q^{-1} = 1. \tag{1.2.19}$$

Одним из важных утверждений относительно пространства Лебега является лемма следующего вида.

Лемма 1.2.4. Пространства $\tilde{L}_J^p(X), (1 < p \le \infty)$, полны, если $q^{-1} = 1 - p^{-1}$, то отображение:

$$\psi \to \psi^* : \tilde{L}_J^q(X) \to (\tilde{L}_J^p(X))^*,$$

определяемое билинейным функционалом:

$$< \varphi, \psi^* >= \int_J \varphi(t)\psi(t)dt, \qquad (1.2.20)$$

является изометрическим мономорфизмом и в случае $p < \infty$ конгруэнцией.

Отметим, что при $1 < p < \infty$, $\tilde{L}_J^p(X)$ рефлексивно, а в случае $p = 2 : \tilde{L}_J^2(X)$ - называется гильбертовым пространством со скалярным произведением:

$$< \varphi, \psi >= \int_J \varphi(t)\overline{\psi}(t)dt. \qquad (1.2.21)$$

Б) Терминологии, которые вышеуказаны [26]**:**

- если *X* и *У* - банаховы пространства, то [*X;У*] обозначает банахово пространство всех ограниченных (т.е. непрерывных) линейных отображений *X* в *У*. Теорема об открытых отображениях позволяет называть элементы [*X;У*] гомоморфизмами;

- гомоморфизм называем эпиморфизмом, если он сюръективен (отображением на, т.е. если каждый элемент из У является образом некоторого элемента из X, в этом случае он является открытым отображением);

- мономорфизмом, если он инъективен (взаимно однозначен, т.е. если различные элементы из X отображаются в различные элементы из У);

- изоморфизмом, если он биективен (одновременно сюръективным и инъективным);

-гомеоморфизм – частный случай изоморфизма – взаимно однозначное соответствие между двумя метрическими пространствами, при котором оба взаимно обратных отображения, определяемые этим соответствием, непрерывны;

- если $T \in [X;Y]$ является изометрическим изоморфизмом, то T называется конгруэнцией, а про *X* и *У* говорят, что они конгруэнтны (относительно отображения *T*);

- если R - действительная прямая и обозначим μ - меру Лебега на R, то (измеримая) характеристическая функция каждого измеримого множества $E \subset J$ обозначается χ_E;

- если $E \subset J$ измеримо, $\mu(E) > 0$ и φ - действительная ИФ на J, то существенной верхней гранью функции φ на E называется:

$$ess \sup_E \varphi = \inf\{\lambda \in R : \lambda\chi_E \leq \chi_E\varphi\}, \tag{1.2.22}$$

аналогично определяется: $ess \inf_E \varphi$;

- если t_0 – конец интервала J или его внутренная точка, то

$$ess \limsup_{t \to t_0} \varphi(t) = \lim_{\delta \to 0} \ ess \sup_{J \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)} \varphi \tag{1.2.23}$$

и аналогично определяется: $ess \liminf_{t \to t_0} \varphi(t)$;

- если верхний и нижний пределы совпадают, то их общее значение есть: $ess \lim_{t \to t_0} \varphi(t)$. С очевидными изменениями определяются и существенные пределы при $t \to -\infty$ или $t \to +\infty$;

- рефлексивность (от лат. reflexio- отражение) – в теории множеств - неразличимость объекта самого с собой, т.е. А=А;

- если рассмотрим *Н*-гильбертово пространство, то сопряженное пространство *Н** само является гильбертовым, то в свою очередь можно рассматривать второе сопряженное пространство *(Н*)*=Н***, при этом каждому элементу $\varphi \in H$ можно поставить в соответствие некоторый элемент из *Н***. Поэтому, отождествляя элемент из *Н* с порожденной им функцией из *Н***, получаем изометричное вложение пространства *Н* в *Н***, причем это вложение таково, что *Н=Н***, т.е. гильбертово пространство является рефлексивным.

В) Краткий обзор о топологических пространствах. В.1) Понятие топологического пространства [12,26] и др., можем вести произвольно не вводя в данном множестве метрику, непосредственно определив в R систему открытых множеств посредством аксиом.

Определение 1.2.1. Пусть X - некоторое множество – пространство-носитель. Топологией в X называется любая система τ его подмножеств G, удовлетворяющая следующим требованиям:

1*) само множество X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат τ ;

2*) сумма (объединение) любого (конечного и бесконечного) и пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежат τ . Тогда множество X с заданной в нем топологией τ , т.е. пара (X,τ), называется топологическим пространством.

Множества, принадлежащие системе τ , называются открытыми. Ясно, что в одном и том же множестве X можно вводить разные топологии, превращая его тем самым в различные топологические пространства. Различные топологии на одном и том же множестве образуют частично упорядоченное множество. Топологическое пространство, т.е. пара (X,τ), для краткости обозначается одной буквой, например Т.

Известно $T\setminus G$, дополнение к открытым, называется замкнутыми множествами топологического пространства Т, (здесь G открытое множество). Из аксиом 1* и 2* в силу соотношений двойственности (в теории множеств - принцип двойственности)) вытекает, что:

1) множество $\varnothing$ и все Т замкнуты;

2) пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуты.

На основе этих определений естественно вводятся во всяком топологическом пространстве понятия окрестности, точки прикосновения, замыкание множеств и др.

Примеры:

1) Пусть T - произвольное множество, причем будем считать открытыми все его подмножества. При этом аксиомы 1* и 2*, очевидно выполнены. Тогда, действительно получаем топологическое пространство. В нем все множества одновременно и открыты и замкнуты, и, значит, каждое из них совпадает со своим замыканием.

2) Пусть T состоит из двух точек a и ∂, причем открытыми множествами считаем все T, пустое множество и множество, состоящее из одной точки ∂. Здесь, также выполняются аксиомы 1* и 2*. В этом пространстве (иногда называют связным двоеточием) замкнуты такие подмножества: все T, пустое множество и точка a. Замыкание одноточечного множества $\{\partial\}$ есть все T.

B.2) Чтобы ввести о понятиях компактности, предкомпактности топологических пространств, сперва, сформулируем лемму Гейне-Бореля, так как эта лемма играет фундаментальную роль не только в анализе, но и имеет важное значение и топологическом пространстве.

Лемма 1.2.5 (Гейне-Бореля). Из любого покрытия отрезка $[a,b]$ числовой прямой интервалами можно выбрать конечное подпокрытие.

Известно, что, если вместо интервалов рассмотрим любые открытые множества, то имеем: из всякого открытого покрытия отрезка $[a,b]$ можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 1.2.2. Топологическое пространство Т называется компактным, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Как знаем, что свойством компактности наряду с отрезками обладают все замкнутые ограниченные подмножества евклидова пространства любой конечной размерности. Наоборот, например, прямая, плоскость, трехмерное пространство служат примерами некомпактных пространств.

Определение 1.2.3. Система $\{A\}$ подмножеств пространства Т называется центрированной, если любая ее конечная подсистема имеет непустое пересечение, (т.е.: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ членов этой системы не пусто).

Теорема 1.2.2. Топологическое пространство T компактно тогда и только тогда, когда всякая центрированная система его замкнутых только тогда, когда всякая центрированная система его замкнутых подмножеств $\sigma = \{A\}$ имеет непустое пересечение.

И в качестве одним из основных свойств компактных пространств, сформулируем теорему вида.

Теорема 1.2.3. Если T – компактное пространство, то каждое его бесконечное подмножество имеет хотя бы одну предельную точку.

Теорема 1.2.4. Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

Определение 1.2.4. Множество *M*, лежащее в некотором топологическом пространстве *T*, называется предкомпактным (или компактным относительно *T*), если его замыкание в *T* компактно.

Г) Обзор о метрических пространствах. Отметим, что обобщая представление о действительных числах как о множестве, в котором введено расстояние между элементами, приходим к понятию метрического пространства.

Определение 1.2.5. Метрическим пространством называется пара (X, ρ), состоящая из некоторого множества *X* элементов, (или точек, или векторов (чисел, функций и т.д.)) такое, что каждой паре элементов $(x, y) \in X$ ставится в соответствие неотрицательное действительное число $\rho(x, y)$ (расстояние между *x* и *y*), подчиненной следующим трем аксиомам:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x=y$,
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ – аксиома симметрии,
3) $\rho(x, z) = \rho(x, y) + \rho(y, z)$ – аксиома треугольника.

Само метрическое пространство, т.е. пару (X, ρ) будем обозначать, как правило, одной буквой: $M = (X, \rho)$ (иногда для простоты, метрическое пространство обозначают тем же символом, что и сам *X*).

п.1.) Положив для элементов произвольного множества:

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, x=y,\\ 1, x\neq y,\end{cases}$$

получим, метрическое пространство (пространство изолированных точек).

п.2.) Множество действительных точек с расстоянием:

$$\rho(x,y)=|x-y|$$

образует метрическое пространство R^1.

п.3.) Множество упорядоченных элементов из n действительных чисел $x=(x_1,...,x_n)$ с расстоянием:

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\ (x_i-y_i)^2}\ ,$$

называется n – мерным арифметическим евклидовым пространством R^n (справедливость аксиом 1-3 очевидна), 3-аксиома:

$$\begin{cases}\rho(x,z)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\ (x_i-z_i)^2},\\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\ (x_i-z_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\ (x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\ (y_i-z_i)^2}.\end{cases}$$

Известно, что основные понятия теории метрических пространств (предельная точка, точка прикосновения, замыкание множеств и др.) вводили, опираясь на понятие окрестности или, что, по существу то же самое, на понятие открытого множества. Эти понятия в свою очередь определялись с помощью метрики, заданной в рассматриваемом метрическом пространстве, в отличие от произвольного топологического пространства, где обеспечивается значительно большая свобода действий, чем в метрическом пространстве. Но, несмотря на это, нам необходимо дать обзор и по понятием компактности, предкомпактности в случае метрических пространств. Компактные метрические пространства просто называют компактами, а компактные подпространства - компактными множествами метрического пространств. Свойства компактности в этом пространстве можно выразить на языке сходящихся последовательностей.

Определение 1.2.6. Множество X метрического пространства M называется секвенциально компактным, если всякая последовательность его элементов содержит сходящуюся в M подпоследовательность.

Теорема 1.2.5. Множество X метрического пространства M компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и секвенциально компактно.

Отметим, что замкнутость и секвенциальная компактность следует из замкнутости компактного множества и существования предельной точки у каждой бесконечной последовательности.

Теорема 1.2.6. Для того, чтобы метрическое пространство M, (R) было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было одновременно: а) вполне ограниченным, б) полным.

Теорема 1.2.7. Чтобы множество X, лежащее в полном метрическом пространстве R, было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне ограниченным.

Отметим, что в общем топологическом пространстве компактность и секвенциальная компактность - понятия не равносильные.

Все вышеуказанные понятия компактности и предкомпактности их свойства, и доказательства приведенных вышеуказанных теорем хорошо даны в работах [12,16,26,56,60] и др.

Известно, что в n - мерном евклидовом пространстве предкомпактность множества равносильно его ограниченности [26]. Однако для более общих метрических пространств это уже неверно.

Заметим, что для множеств в конкретных пространствах, иногда дают специальные критерии компактности (или предкомпактности), которые удобны на практике. В частности, для широко используемого в анализе $C[a,b]$ и для его подмножеств, важным критерием предкомпактности является теорема Арцела.

Теорема 1.2.8 (Арцела). Для того, чтобы семейство F непрерывных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, было предкомпактным в $C[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Замечание 1.2.3. Семейство F функций f, определенных на некотором отрезке $[a,b]$, называется равномерно ограниченным, если существует такое число M_0, что: $|f(x)| < M_0, \forall x \in [a,b]$ и всех $f(x) \in F$.

Семейство $F = \{f\}$ называется равностепенно непрерывным, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ для всех $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что: $\rho(x_1, x_2) < \delta$, и для всех $f(x) \in F$.

Указанная теорема 1.2.8 хорошо применяется для исследования ИУВ-1, когда правая сторона, т.е. свободная функция согласуется с верхним пределом интеграла в начале отрезка, т.е., когда регуляризируемость рассматриваются в пространствах Банаха. Поэтому, в нашем случае, когда исследуются регуляризируемость в обобщенном смысле некорректных ИУВ-1, при использовании сингулярного МР из параметризованного уравнения следует система из ИУ относительно тех функций, которые содержатся в соотношениях асимптотического характера. Причем, одним из этихуравнений системы являяется ИУВ-1 вышеуказанного вида, где решение является элементом пространства Банаха.

Глава 2

Специальная методология регуляризации в обобщенном смысле некорректных нелинейных ИУВ-1 с ядрами определенного класса

Глава 2 носит вступительный характер, так как в этой главе рассматривается методология исследований нелинейных некорректных ИУВ-1, в отличие от тематики диссертационной работы. Чтобы изучать ОЗ работы, где вырождаются указанные классы ИУВ-1, сперва, необходимо разработать МР для доказательства регуляризируемости указанных уравнений в обобщенном смысле в введенных пространствах.

С этой целью, в данной главе разработаны специальные регуляризирующие алгоритмы асимптотического характера (АХ), которые дают ответ к поставленным задачам. Здесь, излагаемый МР модифицирует метод работы [40], при этом не требуется условие вида ((1.1.7), см. главу 1, стр. 13), т.е. доказательство регуляризируемости ИУВ-1 становится более общим, чем в указанном методе. Отмеченные классы ИУ-1, как уже показали встречаются во многих прикладных ОЗ, например, в ОЗ теплопроводности, задачах наследственной среды, ОЗ МТЗ, задачах обработки фотоизображений и восстановительных процессов [18,57,62] и т.д.

А) Известно, что в области построения особых решений ИУВ-1 сушествуют определенные работы, например, работы [21,53,62] и др. Но, как выше заметили общего метода исследований относительно этих ИУ-1 не имеется, так как в каждом случае это зависит от ядра указанных уравнений.

Кроме того, знаем что в области некорректных нелинейных ИУВ-1 вопрос о сходимости решений регуляризованных уравнений к обобщенному решению исходного уравнения обстоит сложнее, чем в линейных уравнениях. Поэтому не повторяясь, то, что указали теоретически в главе 1, здесь, эти факты покажем на примере ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД [21], т.е. (пример 1):

$$\begin{cases} \int_0^t y^2(s)\,ds = 1, (0 < t \le 1), \\ f(t) \equiv 1; t = 0 : f(0) = 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

где решение можно формально написать:

$$y(t) = \sqrt{\delta(t)}, \tag{2.2}$$

однако неизвестно, какой смысл можно придать этому выражению. С другой стороны, если введем вспомогательную функцию (ВФ) вида:

$$y^2(t) = \rho(t), (\rho \ge 0), \tag{*}$$

то имеем: $(y - \sqrt{\rho})(y + \sqrt{\rho}) = 0$. А так как по условию решение ИУ (2.1) решение неотрицательное, тогда получим: $y = \sqrt{\rho}$. Значит, относительно ВФ, учитывая (*) и (2.1) получим линейное ИУВ-1:

$$\int_0^t \rho(s)ds = 1, (0 \le t \le 1) \tag{**}$$

при этом, если для ВФ введем: $\rho = \alpha\delta(t) + \rho_0(t), (\alpha > 0, \rho_0 \ge 0)$, то из (**) опреде-яются: $\alpha, \rho_0(t)$, т.е.: $\alpha = 1, \rho_0 = 0$. Следовательно, $\rho = \delta(t)$, а это значит, что в самом деле имеет место (2.2).

Далее, регуляризованное ИУ:

$$\varepsilon y(t,\varepsilon) + \int_0^t y^2(s,\varepsilon)ds = 1, (0 \le t \le 1) \tag{2.3}$$

относительно (2.1) имеет единственное решение в виде:

$$y(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{t + \varepsilon^2}, \tag{2.4}$$

причем

$$y(t,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \begin{cases} 0, t > 0, \\ \infty, t = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Поэтому, для него имеет место

$$\int_0^t \frac{\varepsilon}{s + \varepsilon^2} ds = \varepsilon \ln \frac{t + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \to 0, (\varepsilon \to 0), \tag{2.6}$$

т.е. слабое сходимость. Однако: $y_0(t)=0$ не является решением ИУВ-1 (2.1) ни в каком смысле. Это значит, что действительно нельзя «естественно» определить никакую нелинейную функцию в пространстве СОФ.

Пример 2. Аналогичное явление имеет место и в случае ИУВ-1 с двумя переменными с неотрицательным решением, связанное с ФД по аргументу *x* (см.[46]):

$$\begin{cases} \Phi\theta \equiv \int\limits_0^x \int\limits_0^y \theta^2(s,\tau)\,d\tau ds = \dfrac{1}{1+y}y, \\ K(x,y,s,\tau)\equiv 1,\ f(x,y)\equiv \dfrac{1}{1+y}y, \end{cases} \tag{2.7}$$

где решение (2.7) формально определяется в виде:

$$\theta(x,y)=\frac{1}{y+1}\sqrt{\delta(x)}. \tag{2.8}$$

В самом деле, учитывая $\theta^2=\rho(x,y),(\rho\ge 0)$ и неотрицательности функции $\theta\ge 0$, обсуждая, как и в случае (*) имеем: $\theta=\sqrt{\rho}$. Тогда, относительно ВФ, на основе (2.7) получим линейное ИУВ-1:

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^y \rho(s,\tau)\,d\tau ds = \frac{1}{1+y}y \tag{2.9}$$

при этом, если для ВФ введем:

$$\rho=\alpha(y)\delta(x)+\rho_0(x,y),(\alpha\ge\alpha_0>0,\rho_0\ge 0),$$

то из (2.9) следует

$$\int\limits_0^y \alpha(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^x \int\limits_0^y \rho_0(s,\tau)\,d\tau ds = \frac{1}{1+y}y$$

или допуская *x=0,* получим

$$\int\limits_0^y \alpha(\tau)\,d\tau = \frac{1}{1+y}y. \tag{2.10}$$

Тогда, дифференцируя (2.10) имеем

$$\begin{cases}\alpha\left(y\right)=(\frac{1}{1+y}y)'_y=\frac{1}{(1+y)^2},\\ \int\limits_0^y\frac{1}{(1+\tau)^2}d\tau=(1-\frac{1}{1+y})=\frac{1}{1+y}y.\end{cases}\tag{2.11}$$

Следовательно, с учетом (2.11) имеет место

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^y\rho_0\left(s,\tau\right)d\tau ds=0,\tag{2.12}$$

т.е.: $\rho_0(x,y)=0$, кроме того, это решение должно быть единственным в пространстве Банаха (или Гильберта). Значит, действительно имеет место (2.8).

Из (2.7) видно, что интегральный оператор имеет не согласованности со свободной функцией в начале отрезка $[0,X]$ по переменной x, а по y имеет согласованности на [0,1]. Поэтому, в самом деле ИУ (2.7) имеет особое решение в виде (2.8), сосредоточенное в начале отрезка по переменной x, (точнее решение (2.8) связано с ФД).

Следовательно, и как в случае примера 1, и в этом примере рассмотрим параметризированное ИУ:

$$\begin{cases}\varepsilon\theta_\varepsilon\left(x,y\right)+(\Phi\,\theta_\varepsilon)(x,y)=f_\varepsilon(x,y),\\ (\Phi\,\theta_\varepsilon)(x,y)\equiv\int\limits_0^x\int\limits_0^y\theta_\varepsilon^2\left(s,\tau\right)d\tau ds,\\ f_\varepsilon(x,y)\equiv\frac{1}{1+y}y+\frac{\varepsilon^2(1-y)}{(x+\varepsilon^2)(1+y)},((x,y)\in\overline{D},D=(0,X)\times(0,1)),\end{cases}\tag{2.13}$$

при этом:

$$\theta_\varepsilon\left(x,y\right)=\frac{\varepsilon}{(x+\varepsilon^2)(y+1)},\tag{2.14}$$

т.е. (2.14) является единственным решением (2.13), причем:

$$\theta_\varepsilon\left(x,y\right)\xrightarrow[\varepsilon\to0,\forall y\in[0,1]]{}\begin{cases}0,x>0,\\ \infty,x=0.\end{cases}\tag{2.15}$$

Следовательно, для него имеет место (см. (2.6)):

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^y\frac{\varepsilon}{s+\varepsilon^2}\times\frac{1}{\tau+1}d\tau ds=\varepsilon(\ln(y+1))\ln\frac{x+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\to0,\left(\varepsilon\to0,\forall y\in[0,1]\right),\tag{2.16}$$

т.е. (2.16) считается слабой сходимости. Но $\theta_0(x,y)=0,(x,y)\in\overline{D}$, как и в случае примера 1, не является решением ИУ (2.7) ни в каком смысле. Значит, и для этого примера имеют место все выводы, которые были указаны в примере 1.

Замечание 2.1. Полученные выводы примера 2 можем указать и в $L^2(D)$.

Для этого, сперва, учитывая (2.7), (2.13) проверим оценку разности: $f_\varepsilon(x,y)-f(x,y)$, т.е.:

$$\begin{cases} \|f_\varepsilon(x,y)-f(x,y)\|_{L^2}\le\varepsilon, \\ \int\limits_0^x\int\limits_0^y [f_\varepsilon(s,\tau)-f(s,\tau)]^2 d\tau ds=\int\limits_0^x\int\limits_0^y \dfrac{\varepsilon^4(1-\tau)^2}{(s+\varepsilon^2)^2(1+\tau)^2}d\tau ds\le\int\limits_0^x\int\limits_0^y \dfrac{\varepsilon^4 d\tau ds}{(s+\varepsilon^2)^2(1+\tau)^2}\le \\ \le\varepsilon^2(1-\dfrac{1}{y+1})(1-\dfrac{\varepsilon^2}{x+\varepsilon^2})\le\varepsilon^2. \end{cases} \tag{2.17}$$

Известно, что оценка (2.17) является априорной информацией для свободной функции ИУ (2.7).

Поэтому, с учетом (2.17) и

$$\begin{cases} \int\limits_0^x\int\limits_0^y |\theta_\varepsilon(s,\tau)|^2 d\tau ds=\int\limits_0^x\int\limits_0^y \varepsilon^2\dfrac{d\tau ds}{(s+\varepsilon^2)^2(1+\tau)^2}\le\varepsilon^2(1-\dfrac{1}{y+1})(\dfrac{1}{\varepsilon^2}-\dfrac{1}{x+\varepsilon^2})= \\ =(1-\dfrac{1}{y+1})(1-\dfrac{\varepsilon^2}{x+\varepsilon^2})\le 1, \\ (\sup\limits_{\overline{D}}\int\limits_0^x\int\limits_0^y |\theta_\varepsilon(s,\tau)|^2 d\tau ds)^{\frac{1}{2}}=\|\theta_\varepsilon\|_{L^2(D)}\le 1 \end{cases} \tag{2.18}$$

оценим разность: $(\Phi\theta_\varepsilon-f(x,y))$ в $L^2(D)$. Для этого, сперва, учитывая (2.7) и (2.13) имеем:

$$\Phi\theta_\varepsilon-f(x,y)=\varepsilon\theta_\varepsilon+\Phi\theta_\varepsilon-f_\varepsilon(x,y)+f_\varepsilon(x,y)-f(x,y)-\varepsilon\theta_\varepsilon=\frac{\varepsilon^2(1-y)}{(x+\varepsilon^2)(1+y)}-\varepsilon\theta_\varepsilon$$

или возведя в квадрат и интегрируя по совокупности переменных, получим:

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^y [(\Phi\theta_\varepsilon)(s,\tau)-f(s,\tau)]^2 d\tau ds\le 4[\int\limits_0^x\int\limits_0^y \frac{\varepsilon^4(1-\tau)^2}{(s+\varepsilon^2)^2(1+\tau)^2}d\tau ds+\int\limits_0^x\int\limits_0^y \varepsilon^2|\theta_\varepsilon(s,\tau)|^2 d\tau ds]\le$$

$$\le 4[\int\limits_0^x\int\limits_0^y \frac{\varepsilon^4 d\tau ds}{(s+\varepsilon^2)^2(1+\tau)^2}+\int\limits_0^x\int\limits_0^y \varepsilon^2|\theta_\varepsilon(s,\tau)|^2 d\tau ds]\le 4[\varepsilon^2(1-\frac{1}{y+1})(1-\frac{\varepsilon^2}{x+\varepsilon^2})+$$

$$+\int_0^x\int_0^y \varepsilon^2 \left|\theta_\varepsilon(s,\tau)\right|^2 d\tau ds] \le 4\varepsilon^2[1+\left\|\theta_\varepsilon\right\|^2_{L^2(D)}] \le 8\varepsilon^2. \tag{2.19}$$

Тогда, с учетом нормы $L^2(D)$ имеем:

$$\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y)-f(x,y)\right\|_{L^2} \le 2\sqrt{2}\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{2.20}$$

Это означает, что имеют место аналогичные выводы, которые были получены в случае (1.1.19) (см. гл.1).

Поэтому, в данной главе и исследуются нелинейные ИУВ-1 с неотрицательными решениями, связанные с ФД, т.е.:

$$H\theta \equiv \int_0^x K(x,\tau)\theta^2(\tau)d\tau = F(x), \tag{2.21}$$

$$H\theta \equiv \int_0^x\int_0^y K(x,y,\tau,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau = F(x,y), \tag{2.22}$$

обобщающие вышеуказанные примеры, тем более с известными функциями, которые допускают условия вида (см, ИУ этого §2.1 и §2.2):

$$\begin{cases} K(x,\tau)\in C(D_0)\cap Lip(x\left|L_K\right.); K(.)\ge 0; K(0,0)\ne 0, \left|K(.)\right|\le C_{01}, \\ D_0=\{(x,\tau): 0\le\tau\le x\le X\}; C[0,X]\ni F(x)\cap Lip(x\left|L_F\right.), \\ \left|F(x)\right|\le C_{02}; F(x)\ge\alpha>0, \forall x\in[0,X], (0<L_K, L_F = const) \end{cases} \tag{2.23}$$

и

$$\begin{cases} K(x,y,\tau,\nu)\in C_{n\times n}(D_0)\cap Lip(x\left|L_K\right.); K(.)\ge 0; \left\|K(.)\right\|\le C_{01}, \\ D_0=[0,X]\times[0,b]\times\{0\le\tau\le x\le X, 0\le\nu\le y\le b\}, \\ K(0,y,0,y)\ne 0, \forall y\in[0,b]; (x,y)\in\bar{D}_1, (D_1=(0,X)\times(0,b)), \\ F(x,y)\in C_n^{0,1}(\bar{D}_1)\cap Lip(x\left|L_F\right.); F(0,y)\ne 0; F(x,0)=0, \\ F(x,y)>0, \forall x\in[0,X], y\in(0,b]; \left\|F(x,y)\right\|\le C_{02}, \forall(x,y)\in\bar{D}_1, \end{cases} \tag{2.24}$$

соответственно. Отсюда видно, что если относительно (2.21) формально воспользуемся способом решение примера 1, то учитывая полученные результаты, имеем ВырИУ:

$$\begin{cases} \int_0^x K(x,\tau)\rho_0(\tau)d\tau = F(x)-K(x,0)F(0)(K(0,0))^{-1}\equiv F_0(x), \\ \alpha=F(0)(K(0,0))^{-1}, C[0,X]\ni K(\tau,\tau)\ge 0, \end{cases} \tag{2.25}$$

где свободная функция имеет условия:

$$F_0(x) \in C^1[0, X], F_0(0) = 0. \qquad (2.26)$$

Но ИУВ-1 (2.25) с указанным ядром, пока еще не исследовано в пространстве Банаха, следовательно не получим ответа к тем вопросам, которые были поставлены относительно ИУ (2.21), т.е. о регуляризируемости в обобщенном смысле и единственности решения задачи в введенном пространстве. Аналогичные проблемы возникаются и в ИУВ-1 (2.22).

Поэтому, в этой главе и излагаются варианты МР некорректных ИУВ-1 (2.21),(2.22) в обобщенном смысле, а в дальнейшем могут быть использованы для решения ОЗ, где вырождаются указанные ИУ-1 с различными пределами интегрирования.

Б) Отметим, что разработанный алгоритм регуляризации ИУВ-1 (2.21) применяется и для регуляризации линейных некорректных ИУВ-1 в обобщенном смысле в пространстве $Z^1(0, X)$, например для ИУ:

$$A\varphi \equiv \int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), \qquad (2.27)$$

когда некорректность понимается на основе не согласованности интегрального оператора со свободной функцией $f(x)$ в начале отрезка [0,X], т.е.: $f(0) \neq 0$ [21,40], где особое решение ИУ (2.27) связано с ФД, причем ядро допускает условие:

$$K(x,s) \in C\ (D) \cap Lip(x|L_K), 0 \leq K(x,x) \in C[0, X]. \qquad (2.28)$$

Замечание 2.2 (пример 3). Если рассмотрим нелинейное ИУВ-1 с действительным (неотрицательным) особым решением, связанное с ФД, т.е. :

$$\begin{cases} \int_0^t \theta^3(s)\,ds = 1, (0 < t \leq 1), \\ f(t) \equiv 1; t = 0 : f(0) = 1 \end{cases} \qquad (2.29)$$

с формальным решением:

$$\theta(t) = \sqrt[3]{\delta(t)}. \qquad (2.30)$$

Если введем ВФ вида:

$$\theta^3(t) = \rho(t), (\rho \geq 0), \tag{2.31}$$

то имеем:

$$(\theta - \sqrt[3]{\rho})(\theta^2 + \theta\sqrt[3]{\rho} + \sqrt[3]{\rho^2}) = 0, (D = \sqrt{-3\sqrt[3]{\rho^2}} < 0).$$

Тогда, учитывая условия относительно (2.29) получим: $\theta = \sqrt[3]{\rho}$. Следовательно, относительно ВФ, учитывая (2.31) и (2.29) получим линейное ИУВ-1 виде (**), причем введя: $\rho = \alpha\delta(t) + \rho_0(t), (\alpha > 0, \rho_0 \geq 0)$, то из полученного линейного ИУ-1 определяются: $\alpha, \rho_0(t)$, т.е.: $\alpha = 1, \rho_0 = 0$. Следовательно, $\rho = \delta(t)$, а это значит, что в самом деле имеет место (2.30). А далее, обсуждается, как и в случае примера 2, только в пространстве $L^3(0,1)$.

Значит, если рассмотрим некорректное ИУВ-1 с неотрицательным особым решением, связанное с ФД, т.е.:

$$H\theta \equiv \int_0^x K(x,\tau)\theta^3(\tau)d\tau = F(x), \tag{2.32}$$

где известные функции допускают условия вида (2.23), то в этом случае, результаты параграфа 2.1 обобщаются для ИУВ-1 (2.32) в $Z^3(0, X)$.

Поэтому, ИУВ-1 (2.27) и (2.32) с теми условиями, которые указаны в данной главе, здесь не исследуются, чтобы не повторится. Так как ОЗ, где в частности вырождаются некорректные ИУВ-1 (2.32) и (2.27), соответственно рассматриваются в параграфах 3.2(гл.3) и 4.2(гл.4).

Замечания: 1) Если функции (см. (2.21),(2.32)): $K(x,\tau) \equiv 1, F(x) \equiv 1,$ то

$$\varphi = (\delta(x))^{\frac{1}{n}}, (n = 2, 3),$$

т.е., в работе словосочетание связанность с ФД везде понимается в этом смысле.

2**)** Из вышеуказанных ИУВ-1 видно, что нелинейность рассматривается как степень искомой функции, а точнее второй и третьей степени (в общем и может *n*-степени). Естественно, возникается вопрос, нельзя ли исследовать более общие нелинейные ИУВ-1, например типа Урысона или Гаммерштейна. Так как, в нашем случае, решение ИУВ-1 связано с функцией Дирака (ФД), то нелинейность в степени является важным фактором для исследования указанных ИУВ-1.

Во-первых, чисто из физической точки зрения, так как в общих ИУ Урысона или Гаммерштейна не объяснимы, каким образом решение этих уравнений связаны с ФД. Во-вторых, если подходим с математической позиции относительно этих нелинейных ИУ, то введение пространств с элементами, которые связаны с ФД, когда суммируемость элементов, например p степени ($1 < p < \infty$), то не объяснимы: во-первых, какое значение имеет интегральный член с такой функцией; во-вторых, такое пространство СОФ в классе указанных нелинейных ИУ, в общем может и не существовать.

Например, в случае Урысона, если: $K_y(x,s,y(s)) \le 0,\ (\ge 0)$, а в случае Гаммерштейна: $G_y(x,y(x)) \le 0,\ (\ge 0)$, когда решение связано с ФД, то даже математически не обоснованы эти ИУ.

Поэтому, чтобы не противоречить к указанным пунктам относительно общих нелинейных ИУ, в данной работе и исследуются нелинейные ИУВ-1, где нелинейность этих ИУ понимается, как степень искомых функций.

§2.1. Регуляризация некорректного нелинейного ИУВ-1 с ядром специального вида

В теории ИУВ-1 рассмотрены различные варианты МР, связанные с ядрами данных уравнений, которые встречаются в работах [2,19,21,31,32,36,40,52,53,63] и др. Но как выше отметили, есть проблемы в этом направлении, а точнее, когда исследуются некорректные нелинейные ИУВ-1 с неотрицательными и непрерывными ядрами. Поэтому, в этом параграфе относительно некорректного ИУВ-1 с ядром отмеченного типа, раасматривается специальный вариант МР, где учитывается алгоритм АХ, имеющее сингулярности относительно малого параметра. При этом доказаны вопросы единственности решения и регуляризируемости исходного ИУВ-1 в обобщенном смысле в введенном пространстве.

В связи с этим, в настоящем параграфе изучается некорректное ИУВ-1:

$$H\theta \equiv \int_0^x K(x,\tau)\theta^2(\tau)d\tau = F(x), \qquad (2.1.1)$$

где F, K - известные функции, причем $\theta -$ неизвестная неотрицательная функция, связанная с ФД, т.е. из класса $Z^2(0,X)$ (см. стр. 13, без учета (1.1.7)). В рамках условий:

$$\begin{cases} K(x,\tau)\in C(D_0)\cap Lip(x\,|L_K); K(.)\ge 0; K(0,0)\ne 0; |K(.)|\le C_{01}, \\ D_0=\{(x,\tau): 0\le\tau\le x\le X\},\ C[0,X]\ni F(x)\cap Lip(x\,|L_F), \\ |F(x)|\le C_{02}, F(x)\ge\alpha>0, \forall x\in[0,X], (0<L_K, L_F=const), \end{cases} \qquad (2.1.2)$$

ставится задача, доказать регуляризируемости ИУВ-1 (2.1.1) в вышеуказанном пространстве, так как при условии (2.1.2) ИУ (2.1.1) некорректно поставлено в $C[0,X]$.

§2.1.1. Регуляризирующие алгоритмы в ИУВ-1

Чтобы доказать регуляризируемость (2.1.1) при условиях (2.1.2) в обобщенном смысле, сперва проводим некоторые математические преобразования на основе заданных функций, а точнее имеет место:

Лемма 2.1.1. При условии (2.1.2) относительно заданных данных существуют функции: $h(x), h_0(x), \phi_0(x), F_0(x)$, которые определяются в следующем виде с условиями:

$$\begin{cases} h(x)\equiv[\gamma+\dfrac{1}{\alpha}\lambda(x)]F(x)\ge m>0, (1<\gamma=const), \\ h_0(x)\equiv\gamma+\dfrac{1}{\alpha}\lambda(x); 0\le\lambda(x)\in L^1(0,X), \\ \phi_0(x)=\displaystyle\int_0^x[\gamma+\dfrac{1}{\alpha}\lambda(\tau)]F(\tau)d\tau=\int_0^x h(\tau)d\tau, \\ F_0(x)\equiv F(x)-F(0), F_0(0)=0, \end{cases} \qquad (2.1.3)$$

$$\begin{cases} h_0(x) \le \alpha^{-1}h(x); 0 < \max C_{0j} = C_0, (j=1,2), \\ \left|F_0(x) - F_0(\tau)\right| \le L_{F_0} M_0(\phi_0(x) - \phi_0(\tau)), (\tau \le x; \gamma > 1; M_0 = (\gamma\alpha)^{-1}), \\ x \in [0, X]: \quad x = (x^{\frac{2}{7}})^{\frac{7}{2}} \le (\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}, (\lambda(x) = \dfrac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}), \\ x \le M_1(\phi_0(x))^2, (M_1 = \sup\limits_{[0,X]}(\phi_0(x))^{\frac{3}{2}}). \end{cases}$$

Доказательство. В самом деле, с учетом (2.1.2) относительно исходных данных (2.1.1) выбор функций виде (2.1.3) (см. 1-3 строки), закономерны. Кроме того, условия, которые расположены в строке 4 и 5, очевидны. Поэтому, покажем 6-8 строки (2.1.3).

Действительно, так как $F(x)$, на основе (2.1.2) допускает условия Липшица по x, то относительно функции $F_0(x)$ выполняется это условие, т.е.:

$$\left|F_0(x) - F_0(\tau)\right| \le L_{F_0}(x-\tau) \le L_{F_0}\frac{1}{\gamma\alpha}\int\limits_{\tau}^{x}[\gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda(\tau)]F(\tau)d\tau =$$

$$= L_{F_0}M_0(\phi_0(x) - \phi_0(\tau)), (\tau \le x; \gamma > 1; M_0 = \frac{1}{\gamma\alpha}).$$

С другой стороны, так как имеет место: $x \in [0, X]: x = (x^{\frac{2}{7}})^{\frac{7}{2}}$, где $\int\limits_0^x \lambda(s)ds = x^{\frac{2}{7}}$ при $\lambda(x) \equiv \dfrac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}$. Здесь: $\int\limits_0^x \dfrac{2}{7\sqrt[7]{s^5}}ds$ - является несобственным интегралом второго рода с переменным верхним пределом, причем

$$\int\limits_0^x \frac{2}{7\sqrt[7]{s^5}}ds = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\delta}^{x}\frac{2}{7\sqrt[7]{s^5}}ds = \lim_{\delta\to 0}\frac{2(x^{-\frac{5}{7}+1} - \delta^{-\frac{5}{7}+1})}{7(-\dfrac{5}{7}+1)} = x^{\frac{2}{7}}.$$

Далее, имеем

$$x \le (\int\limits_0^x \lambda(s)ds)^{\frac{7}{2}} \le (\int\limits_0^x \frac{1}{\alpha}\lambda(s)F(s)ds)^{\frac{7}{2}} \le (\int\limits_0^x [\gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda(s)]F(s)ds)^{\frac{7}{2}} = (\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}.$$

Значит

$$x \le (\phi_0(x))^{\frac{7}{2}} = (\phi_0(x))^{\frac{3}{2}}(\phi_0(x))^2 \le M_1(\phi_0(x))^2, (M_1 = \sup_{[0,X]}(\phi_0(x))^{\frac{3}{2}}).$$

Что и требовалось доказать (ЧиТД).

Далее, в рамках условий (2.1.2),(2.1.3) и оператора Вольтерра, т.е.:

$$< h, \theta >_{[0,x]} = \int_0^x h(\tau)\theta(\tau)d\tau \qquad (*)$$

ИУВ-1 (2.1.1) эквивалентно преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \int_0^x h(\tau)\theta(\tau)d\tau = (Q\theta)(x) + F(x), \\ Q\theta \equiv \int_0^x h_0(\tau)\theta(\tau)(H\theta)(\tau)d\tau - (H\theta)(x). \end{cases} \qquad (2.1.4)$$

Далее, рассмотрим уравнение с малым параметром ε, т.е.:

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(x) + (\Phi\,\theta_\varepsilon)(x) = F_\varepsilon(x), \\ (\Phi\,\theta_\varepsilon)(x) \equiv \int_0^x h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau)d\tau - (Q\theta_\varepsilon)(x), \end{cases} \qquad (2.1.5)$$

с условием

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon}F(0), \\ C[0,X] \ni F_\varepsilon(x) : \|F_\varepsilon(x) - F(x)\|_C \le \Delta_0(\varepsilon), \\ F_\varepsilon(0) = F(0). \end{cases} \qquad (2.1.6)$$

Решение этого ИУ ищем по правилу:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(x) + \upsilon(x) + \xi_\varepsilon(x), \\ \Pi_\varepsilon(0) = F(0), \upsilon(0) = 0, \xi_\varepsilon(0) = 0, \end{cases} \qquad (2.1.7)$$

причем, относительно неизвестных функций имеют место:

$$\Pi_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x h(\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau + F(0), \qquad (2.1.8)$$

$$\int_0^x h(\tau)\upsilon(\tau)d\tau = (Q\upsilon)(x) + F_0(x), \qquad (2.1.9)$$

$$\varepsilon\xi_\varepsilon + \int_0^x h(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau = (Q[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon])(x) - (Q\upsilon)(x) + F_\varepsilon(x) - F(x) - \varepsilon\upsilon(x), \qquad (2.1.10)$$

где: а) $\Pi_\varepsilon(x)$ - является решением (2.1.8), которое доопределяет особую функцию $\Omega_\varepsilon(x)$ (см. (2.1.7)), т.е.:

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(x), \\ \left|\Omega_\varepsilon(x)\right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \begin{cases} 0, x \neq 0, \\ \infty, x = 0; \end{cases} \end{cases} \qquad (2.1.11)$$

б) $\upsilon(x)$ - решение видоизмененного вырожденного уравнения (2.1.9), где свободный член:

$$F_0(x)\Big|_{x=0} = 0.$$

При этом функция $\upsilon(x) \in C[0, X]$ и доказывается, что ИУВ (2.1.9) регуляризируема в пространстве $C[0, X]$.

в) Функция $\xi_\varepsilon(x)$ определяется единственным образом из (2.1.10), причем сходится к нулю в смысле $C[0, X]$ когда малый параметр: $\varepsilon \to 0$.

В самом деле, в случае (а) из (2.1.8) следует:

$$\begin{cases} \Pi_\varepsilon(x) = F(0)\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \\ \left|\Pi_\varepsilon(x)\right| \le C_{02}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)) \le C_0\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \end{cases} \qquad (2.1.12)$$

так как для ядра $(-\frac{1}{\varepsilon}h(\tau))$ существует резольвента:

$$R(x,\tau,\varepsilon) \equiv -\frac{1}{\varepsilon}h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^x h(s)ds), (\tau \le x). \qquad (**)$$

Следовательно, действительно ИУ(2.1.8) преобразуется к (2.1.12), где допускается оценка, которое указано там же. Значит, получим (2.1.11).

Отметим, что трансформирование ИУВ (2.1.1) к виду (2.1.4), на основе (*), сделает возможным применить теорию резольвенты относительно (2.1.8)-(2.1.10). Кроме того, полученных ИУ после обращений с учетом резольвенты, создается удобства применения условий леммы 2.1.1.

В качестве подтверждения вышеуказанных предложений, для наглядности оценим (2.1.12) в $Z^2(0, X)$. С этой целью, сформулируем лемму вида:

Лемма 2.1.2. В условиях леммы 2.1.1 из (2.1.11) и (2.1.12) следуют оценки:

$$\begin{cases} \left\|\Pi_\varepsilon\right\|_{Z^2(0,X)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{4}}, (\gamma_1 = C_0 2^{-\frac{7}{2}}[7^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \\ \left\|\Omega_\varepsilon(x)\right\|_{Z^2(0,X)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}. \end{cases}$$

Доказательство. Действительно, из оценки (2.1.12) получим

$$\begin{cases} \int\limits_0^x \left|\Pi_\varepsilon(\tau)\right|^2 d\tau \le C_0^2 \int\limits_0^x \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d\tau = C_0^2[\tau \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))\Big|_0^x + \\ +\int\limits_0^x \tau \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))] = C_0^2[x\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)) + \int\limits_0^x 2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{2}}(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))^{\frac{7}{2}} \times \\ |\times \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))] \le C_0^2 2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{2}}[(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}} \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)) + \\ +\int\limits_0^\infty e^{-\rho}\rho^{\frac{7}{2}} d\rho] \le C_0^2 2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{2}}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}] = C_0^2 2^{-7}\varepsilon^{\frac{7}{2}}[7^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}], \\ \rho \equiv \frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x); \chi(\rho) \equiv \rho^k \exp(-\rho); \sup\limits_{\rho\ge 0}\chi(\rho) = k^k \exp(-k), (k = 1, 2, \frac{7}{2}), \\ \rho = 0 : \chi(0) = 0; \rho \to \infty : \chi \to 0, \end{cases}$$

или в смысле нормы $Z^2(0,X)$, следует:

$$\|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2(0,X)} \le C_0 2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{4}}[7^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}} = \gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{4}}.$$

Поэтому:

$$\left\|\Omega_\varepsilon(x)\right\|_{Z^2(0,X)} = \frac{1}{\varepsilon}\left\|\Pi_\varepsilon\right\|_{Z^2(0,X)} \le \frac{1}{\varepsilon}\gamma_1\varepsilon^{\frac{7}{4}} = \gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}. \text{ ЧиТД.}$$

Замечание 2.1.1. Отметим, что при доказательстве леммы 2.1.2, отказались от ограничения ((1.1.7), см. гл.1, стр. 13), так как оно сужает класс исследуемых ИУВ-1. Здесь, изложен другой алгоритм доказательства указанной леммы, а точнее, сперва применяется интегрирования по частям, затем используется условие из формулы (2.1.3) и понятие из математического анализа, связанное с нахождением наибольшего значения функции. Результаты леммы, далее применяются и при доказательства пункта (в).

Доказательства в случаях (б,в), объединяем в следующую лемму:

Лемма 2.1.3. В рамках допустимых условий:

1) функция $\upsilon(x)$ считается решением ИУ (2.1.9) и является пределом параметризированного ИУ:

$$\delta\upsilon_\delta(x)+\int_0^x h(\tau)\upsilon_\delta(\tau)d\tau=(Q\upsilon_\delta)(x)+F_0(x), \qquad (2.1.13)$$

которое определяется однозначно в $C[0,X]$;

2) функция ξ_ε однозначно определено в $C[0,X]$ при этом равномерно сходится к нулю для любого $x\in[0,X]$, когда $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. 1) В условиях леммы 2.1.3 ИУ (2.1.13), с учетом резольвенты (**) преобразуется к ИУ:

$$\begin{aligned}
&\upsilon_\delta(x)=-\frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{(Q\upsilon_\delta)(\tau)-(Q\upsilon_\delta)(x)+\\
&+F_0(\tau)-F_0(x)\}d\tau+\frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))\{(Q\upsilon_\delta)(x)+F_0(x)\}=\\
&=-\frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int_0^\tau h_0(\tilde\tau)\upsilon_\delta(\tilde\tau)\int_0^{\tilde\tau} K(\tilde\tau,\bar\tau)\times\\
&\times\upsilon_\delta^2(\bar\tau)d\bar\tau d\tilde\tau-\int_0^x h_0(\tilde\tau)\upsilon_\delta(\tilde\tau)\int_0^{\tilde\tau} K(\tilde\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^2(\bar\tau)d\bar\tau d\tilde\tau-\int_0^\tau K(\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^2(\bar\tau)d\bar\tau+\\
&+\int_0^x K(x,\bar\tau)\upsilon_\delta^2(\bar\tau)d\bar\tau\}d\tau+\frac{1}{\delta}\{\int_0^x h_0(\tau)\upsilon_\delta(\tau)\int_0^\tau K(\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^2(\bar\tau)d\bar\tau d\tau-\\
&-\int_0^x K(x,\tau)\upsilon_\delta^2(\tau)d\tau\}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))+\Delta_*(F_0,\delta)\equiv P\upsilon_\delta)(x),
\end{aligned} \qquad (2.1.14)$$

где выражение со свободным членом определяется в виде:

$$\Delta_*(F_0,\delta)=-\frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{F_0(\tau)-F_0(x)\}d\tau+\frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))F_0(x),$$

при этом следуют оценки(аналогичные оценки, как в случае леммы 2.1.2):

$$\begin{cases}
\mathrm{a}_1)\ \left|\ \frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{(Q\upsilon_\delta)(x)-(Q\upsilon_\delta)(\tau)\}d\tau\ \right|\le\\
\le\left|\ \frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int_\tau^x h_0(\tilde\tau)\left|\upsilon_\delta(\tilde\tau)\right|\int_0^{\tilde\tau}\left|K(\tilde\tau,\bar\tau)\right|\times\left|\upsilon_\delta^2(\bar\tau)\right|d\bar\tau d\tilde\tau+\right.\\
+\int_0^\tau\left|K(x,\bar\tau)-K(\tau,\bar\tau)\right|\times\left|\upsilon_\delta^2(\bar\tau)\right|d\bar\tau+\int_\tau^x\left|K(x,\bar\tau)\right|\times\left|\upsilon_\delta^2(\bar\tau)\right|d\bar\tau\}d\tau\le
\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\le 2[C_{01}X\,\dfrac{1}{\alpha}r_1^2+\dfrac{1}{\alpha\gamma}r_1(L_K X+C_{01})]\displaystyle\int_0^\infty e^{-z}zdz\left\|\upsilon_\delta\right\|_C=N_0\left\|\upsilon_\delta\right\|_C,\\
\left|\dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))(Q\upsilon_\delta)(x)\right|\le\dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))\left|\{\displaystyle\int_0^x h_0(\tau)\left|\upsilon_\delta(\tau)\right|\times\right.\\
\times[\displaystyle\int_0^\tau\left|K(\tau,\overline{\tau})\right|\times\left|\upsilon_\delta^2(\overline{\tau})\right|d\overline{\tau}]d\tau+\int_0^x\left|K(x,\tau)\right|\times\left|\upsilon_\delta^2(\tau)\right|d\tau\}\le\\
\le[\dfrac{1}{\alpha}(\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x)))XC_{01}r_1^2+C_{01}r_1\,\delta(\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))^2\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))]\times\\
\times\left\|\upsilon_\delta\right\|_C\le[\dfrac{1}{\alpha}e^{-1}XC_0r_1^2+C_0r_1\,\delta 2^2e^{-2}]\left\|\upsilon_\delta\right\|_C\le N_1\left\|\upsilon_\delta\right\|_C,(0<\delta<1)\\
\displaystyle\int_0^\infty e^{-s}sds=1;\ \rho\equiv\frac{1}{\delta}\phi_0(x);\chi(\rho)\equiv\rho^k\exp(-\rho);\sup_{\rho\ge0}\chi(\rho)=k^k\exp(-k),\\
\rho=0:\chi(0)=0;\rho\to\infty:\chi\to0,(k=1,2);,\\
S_{r_1}(0)=\left\{\upsilon_\delta(x)\in C[0,X]:\left|\upsilon_\delta(x)\right|\le r_1,\forall x\in[0,X]\right\},
\end{cases}
$$

а также, следуют аналогичные оценки относительно членов, содержащие свободную функцию $F_0(x)$, т.е.:

$$
\mathrm{a}_2)\left|\ \Delta_*(F_0,\delta)\ \right|\le\Big|\ \frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))L_{F_0}(x-\tau)d\tau+
$$

$$
+L_{F_0}\frac{x}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))\le\frac{1}{\alpha\gamma}L_{F_0}\int_0^x(\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\times
$$

$$
\times d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))+L_{F_0}M_1\delta(\frac{1}{\delta}\phi_0(x))^2\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))\le
$$

$$
\le L_{F_0}[\frac{1}{\alpha\gamma}\int_0^\infty e^{-z}zdz+2^2e^{-2}M_1\delta]\le L_0.
$$

Тогда имеет место

$$
\begin{cases}
\left\|\upsilon_\delta(x)\right\|_C\le(1-L_P)^{-1}L_0=r_1,\\
0<L_P=N_0+N_1<1,\\
P:S_{r_1}(0)\to S_{r_1}(0),
\end{cases}
\tag{2.1.15}
$$

здесь L_P - коэффициент Липшица оператора P . Это значит, что на основе условия принципа Банаха ИУ (2.1.14) однозначно разрешимо в $C[0,X]$.

С другой стороны, с помощью подстановки:

$$\upsilon_\delta(x)=\upsilon(x)+\mu_\delta(x), \tag{2.1.16}$$

относительно остаточной функции следует:

$$\delta\mu_\delta(x)+\int_0^x h(\tau)\mu_\delta(\tau)d\tau=(Q[\upsilon+\mu_\delta])(x)-(Q\upsilon)(x)-\delta\upsilon(x),$$

где: $\mu_\delta(x)\in S_{r_2}(0)=\{\mu_\delta(x)\in C[0,X]:|\mu_\delta(x)|\le r_2,\forall(x)\in[0,X]\}$,

или, на основе резольвенты (**) это ИУ преобразуется к эквивалентному виду

$$\begin{aligned}\mu_\delta(x)=&-\frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{(Q[\upsilon+\mu_\delta])(\tau)-(Q\upsilon)(\tau)-\\&-(Q[\upsilon+\mu_\delta])(x)+(Q\upsilon)(x)\}d\tau+\frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))\{(Q[\upsilon+\mu_\delta])(x)-\\&-(Q\upsilon)(x)\}+\Delta(\delta,\upsilon)\equiv(\tilde{P}\mu_\delta)(x)+\Delta(\delta,\upsilon)\equiv(P_0\mu_\delta)(x),\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

здесь

$$\begin{cases}\Delta(\delta,\upsilon)=-\dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))[-\upsilon(\tau)+\upsilon(x)]d\tau-\upsilon(x)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)),\\ \|\Delta(\delta,\upsilon)\|_c\le L_\upsilon\{\displaystyle\int_0^x(\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))(x-\tau)d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))+x\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)\}\le\\ \le L_\upsilon\dfrac{1}{\gamma\alpha}\{\displaystyle\int_0^x(\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))[\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))]\ \delta d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))+\\ +\delta(\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)\}\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\delta\{\displaystyle\int_0^\infty e^{-z}zdz+e^{-1}\}\le\beta\delta,\\ L_\upsilon\dfrac{1}{\gamma\alpha}\{\displaystyle\int_0^\infty e^{-z}zdz+e^{-1}\}\le 2L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}=\beta,(0<L_\upsilon=const),\\ |\upsilon(x)-\upsilon(\bar{x})|\le L_\upsilon|x-\bar{x}|.\end{cases} \tag{2.1.18}$$

Следовательно, относительно ИУ (2.1.17) учитывая оценки аналогичные к видам (a_1,a_2), т.е.:

$$\begin{cases}a_3)\ |\ \dfrac{1}{\delta^2}\displaystyle\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int_\tau^x h_0(\tilde{\tau})[\upsilon(\tilde{\tau})+\mu_\delta(\tilde{\tau})]\times\\ \times\displaystyle\int_0^{\tilde{\tau}} K(\tilde{\tau},\bar{\tau})[2\upsilon(\bar{\tau})\mu_\delta(\bar{\tau})+\mu_\delta^2(\bar{\tau})]d\bar{\tau}d\tilde{\tau}+\int_\tau^x h_0(\tilde{\tau})\mu_\delta(\tilde{\tau})\times\\ \times\displaystyle\int_0^{\tilde{\tau}} K(\tilde{\tau},\bar{\tau})\upsilon^2(\bar{\tau})d\bar{\tau}d\tilde{\tau}+\int_0^\tau[K(x,\bar{\tau})-K(\tau,\bar{\tau})][2\upsilon(\bar{\tau})\mu_\delta(\bar{\tau})+\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
+\mu_\delta^2(\bar\tau)]d\bar\tau+\int\limits_\tau^x K(x,\bar\tau)[2\upsilon(\bar\tau)\mu_\delta(\bar\tau)+\mu_\delta^2(\bar\tau)]d\bar\tau\}d\tau \quad \Big|\le \\
\le 2\dfrac{1}{\alpha}\{XC_{01}(\tilde r_1+r_2)(2\tilde r_1+r_2)+\tilde r_1^{\,2}XC_{01}+\dfrac{1}{\gamma}(2\tilde r_1+r_2)(L_K X+C_{01})\}\times \\
\times\|\mu_\delta(x)\|_C=\tilde N_0\|\mu_\delta(x)\|_C; \\
\Big|\ \dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))(Q[\upsilon+\mu_\delta])(x)-(Q\upsilon)(x)\ \Big|\le\dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))\times \\
\times[\int\limits_0^x |K(x,\tau)\ |\times\left|2\upsilon(\tau)\mu_\delta(\tau)+\mu_\delta^2(\tau)\right|d\tau+\int\limits_0^x h_0(\tau)|\upsilon(\tau)+ \\
+\mu_\delta(\tau)|\int\limits_0^\tau |K(\tau,\bar\tau)|\times|2\upsilon(\bar\tau)\mu_\delta(\bar\tau)+\mu_\delta^2(\bar\tau)\ |d\bar\tau d\tau+\int\limits_0^x h_0(\tau)\times \\
\times|\ \mu_\delta(\tau)|\int\limits_0^\tau |K(\tau,\bar\tau)\ |\times\left|\upsilon^2(\bar\tau)\right|d\bar\tau d\tau]\le[C_{01}M_1(2\tilde r_1+r_2)2^2e^{-2}\delta+ \\
+C_{01}X\dfrac{1}{\alpha}(\tilde r_1+r_2)(2\tilde r_1+r_2)e^{-1}+C_{01}X\dfrac{1}{\alpha}\tilde r_1^{\,2}e^{-1}]\|\mu_\delta(x)\|_C\le\tilde N_1\|\mu_\delta(x)\|_C, \\
0<\delta<1;|\upsilon|\le\tilde r_1,\forall x\in[0,X],
\end{cases}
$$

и условие (2.1.18), получим

$$
\begin{cases}
\|\mu_\delta(x)\|_c\le\left(1-L_{P_0}\right)^{-1}\beta\delta, \\
0<L_{P_0}=\tilde N_0+\tilde N_1<1; P_0:S_{r_2}(0)\to S_{r_2}(0).
\end{cases} \tag{2.1.19}
$$

Кроме того, из полученных результатов видно, что коэффициент Липшица оператора L_{P_0} допускает условия Банаха, поэтому решение ИУ (2.1.17) определяются единственным образом в $C[0,X]$, причем это решение равномерно сходится к нулю при $\delta\to 0,\forall x\in[0,X]$.

А это означает, что на основе (2.1.16) и (2.1.19) следует:

$$
\upsilon_\delta(x)\underset{\delta\to 0}{\to}\upsilon(x),\forall x\in[0,X], \tag{2.1.20}
$$

действительно, решение ИУ (2.1.13) сходится к решению ИУ (2.1.9) в смысле $C[0,X]$. Первая часть леммы 2.1.3, доказана.

2) Чтобы определить $\xi_\varepsilon(x)$, сперва, относительно ИУ (2.1.10) воспользуемся формулой частичного обращения с помощью резольвенты (**), т.е.:

$$\xi_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(\tau)-$$
$$-(Q\upsilon)(\tau)-(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x)+(Q\upsilon)(x)\}d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))\times \qquad (2.1.21)$$
$$\times\{(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x)-(Q\upsilon)(x)\}+\Delta(\varepsilon,\upsilon)+\Delta_1(\varepsilon,F_\varepsilon,F)\equiv(P_1\xi_\varepsilon)(x)+\Delta(\varepsilon,\upsilon)+$$
$$+\Delta_1(\varepsilon,F_\varepsilon,F),$$

где

$$\begin{cases}\Delta(\varepsilon,\upsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))[-\upsilon(\tau)+\upsilon(x)]d\tau-\upsilon(x)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)),\\ \Delta_1(\varepsilon,F_\varepsilon,F) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{F_\varepsilon(\tau)-F(\tau)\}d\tau+\frac{1}{\varepsilon}[F_\varepsilon(x)-F(x)],\\ \left|F_\varepsilon(x)-F(x)\right|\le\Delta_0(\varepsilon),\forall x\in[0,X].\end{cases} \qquad (2.1.22)$$

Далее, для оценки (2.1.21) учитываем факты, как и в случае (a_3, (2.1.18)):

$$\begin{cases}a_4)\ \left\|\Delta(\varepsilon,\upsilon)\right\|_c\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\{\int_0^x (\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))[\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))]\ \varepsilon d(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))+\\ +\varepsilon(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)\}\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\varepsilon\{\int_0^\infty e^{-z}zdz+e^{-1}\}\le\beta\varepsilon,\\ \left|\Delta_1(\varepsilon,F_\varepsilon,F)\right|\le\frac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon),(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0),\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}a_5)\ \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int_\tau^x h_0(\tilde\tau)\left|\ \upsilon(\tilde\tau)+\xi_\varepsilon(\tilde\tau)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde\tau)\ \right|\times\\ \times\int_0^{\tilde\tau}\left|K(\tilde\tau,\bar\tau)\right|[2\left|\upsilon(\bar\tau)\ \right|\times\left|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau)\ \right|+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau)+2\frac{1}{\varepsilon}\left|\ \Pi_\varepsilon(\bar\tau)\ \right|(\left|\ \upsilon(\bar\tau)\ \right|+\\ +\left|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau)\ \right|)]d\bar\tau d\tilde\tau+\int_\tau^x h_0(\tilde\tau)\left|\ \xi_\varepsilon(\tilde\tau)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde\tau)\ \right|\left|\int_0^{\tilde\tau}\left|K(\tilde\tau,\bar\tau)\right|\upsilon^2(\bar\tau)d\bar\tau d\tilde\tau+\right.\\ +\int_0^\tau\left|K(x,\bar\tau)-K(\tau,\bar\tau)\right|[2\left|\ \upsilon(\bar\tau)\ \right|\times\left|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau)\ \right|+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau)+2\frac{1}{\varepsilon}\left|\ \Pi_\varepsilon(\bar\tau)\ \right|\times\\ \times(\left|\ \upsilon(\bar\tau)\ \right|+\left|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau)\ \right|)]d\bar\tau+\int_\tau^x\left|K(x,\bar\tau)\ \right|\times[2\left|\ \upsilon(\bar\tau)\ \right|\times\left|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau)\ \right|+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau)+\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
+2\dfrac{1}{\varepsilon}\left|\Pi_{\varepsilon}(\bar\tau)\right|\left(\left|\upsilon(\bar\tau)\right|+\left|\xi_{\varepsilon}(\bar\tau)\right|\right)+\dfrac{1}{\varepsilon^{2}}\Pi_{\varepsilon}^{2}(\bar\tau)]d\bar\tau\}d\tau\ \Big|\le\dfrac{1}{\alpha}(\tilde r_1+\tilde r_2)\times \\
\times[XC_{01}(2\tilde r_1+\tilde r_2)+2C_{01}C_0\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]\left\|\xi_{\varepsilon}\right\|_C+\dfrac{1}{\alpha}(\tilde r_1+\left\|\xi_{\varepsilon}\right\|_C)\times \\
\times[2\tilde r_1C_{01}C_0\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+C_{01}C_0^2\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\dfrac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]+\dfrac{1}{\alpha}C_{01}C_0^2\times \\
\times[2\tilde r_1\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+C_0\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\dfrac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]+\dfrac{1}{\alpha}C_{01}C_0[2C_0\times \\
\times\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+(2\tilde r_1+\tilde r_2)\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]\left\|\xi_{\varepsilon}\right\|_C+ \\
+\dfrac{1}{\alpha}C_{01}\tilde r_1^2[X\left\|\xi_{\varepsilon}\right\|_C+C_0\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]+L_K\dfrac{1}{\gamma\alpha}\{[X(2\tilde r_1+\tilde r_2)+ \\
+2C_0\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]\left\|\xi_{\varepsilon}\right\|_C+2\tilde r_1C_0\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+C_0^2\dfrac{1}{\varepsilon^2}\times \\
\times\displaystyle\int_0^x\exp(-\dfrac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau\}+C_{01}\{\dfrac{1}{\gamma\alpha}(2\tilde r_1+\tilde r_2)\left\|\xi_{\varepsilon}\right\|_C+2C_0\tilde r_1\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+ \\
+\dfrac{2}{\varepsilon^2}C_0\displaystyle\int_0^x\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau\left\|\xi_{\varepsilon}\right\|_C+C_0^2\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau\}\le T_3\sqrt{\varepsilon}+\tilde q_1\left\|\xi_{\varepsilon}\right\|_C, \\
\left|\xi_{\varepsilon}(x)\right|\le\tilde r_2,\ \forall x\in[0,X], \\
\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))\left|(Q[\upsilon+\xi_{\varepsilon}+\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_{\varepsilon}])(x)-(Q\upsilon)(x)\right|\le\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))\times \\
\times\{\displaystyle\int_0^x h(\tilde\tau)\left|\upsilon(\tilde\tau)+\xi_{\varepsilon}(\tilde\tau)+\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_{\varepsilon}(\tilde\tau)\right|\displaystyle\int_0^{\tilde\tau}\left|K(\tilde\tau,\bar\tau)\right|[2\left|\upsilon(\bar\tau)\right|\times\left|\xi_{\varepsilon}(\bar\tau)\right|+\xi_{\varepsilon}^2(\bar\tau)+ \\
+2\dfrac{1}{\varepsilon}\left|\Pi_{\varepsilon}(\bar\tau)\right|\left(\left|\upsilon(\bar\tau)\right|+\left|\xi_{\varepsilon}(\bar\tau)\right|\right)+\dfrac{1}{\varepsilon^2}\Pi_{\varepsilon}^2(\bar\tau)]d\bar\tau d\tilde\tau+\displaystyle\int_0^x h_0(\tilde\tau)\left|\xi_{\varepsilon}(\tilde\tau)+\right. \\
\left.+\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_{\varepsilon}(\tilde\tau)\right|\displaystyle\int_0^{\tilde\tau}\left|K(\tilde\tau,\bar\tau)\right|\upsilon^2(\bar\tau)d\bar\tau d\tilde\tau+\displaystyle\int_0^x\left|K(x,\bar\tau)\right|[2\left|\upsilon(\bar\tau)\right|\times\left|\xi_{\varepsilon}(\bar\tau)\right|+ \\
+\xi_{\varepsilon}^2(\bar\tau)+2\dfrac{1}{\varepsilon}\left|\Pi_{\varepsilon}(\bar\tau)\right|\left(\left|\upsilon(\bar\tau)\right|+\left|\xi_{\varepsilon}(\bar\tau)\right|\right)+\dfrac{1}{\varepsilon^2}\Pi_{\varepsilon}^2(\bar\tau)]d\bar\tau\}\le\dfrac{1}{\alpha}(\tilde r_1+\tilde r_2)\times \\
\times[XC_{01}(2\tilde r_1+\tilde r_2)+2C_{01}C_0\displaystyle\int_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]\left\|\xi_{\varepsilon}\right\|_C+\dfrac{1}{\alpha}(\tilde r_1+\left\|\xi_{\varepsilon}\right\|_C)\times
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\times[2\tilde{r}_1 C_{01}C_0\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}+C_{01}C_0^2\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]+\frac{1}{\alpha}C_{01}C_0^2\times \\
\times[2\tilde{r}_1\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}+C_0\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]+\frac{1}{\alpha}C_{01}C_0\times \\
\times[2C_0\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}+(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C+ \\
+\frac{1}{\alpha}C_{01}\tilde{r}_1^2[X\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C+C_0\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]+[C_{01}(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)\times \\
\times\varepsilon^{\frac{5}{2}}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))+2C_{01}C_0\varepsilon^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))]\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C+ \\
+C_{01}C_0^2\sqrt{\varepsilon}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))\le\tilde{T}_3\sqrt{\varepsilon}+\tilde{q}_2\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C,
\end{cases}
$$

причем для получения этих оценок, учтены следующие факты, которые связаны с доказательством леммы 2.1.2, т.е.:

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}=\frac{1}{\varepsilon^3}\overline{\tau}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))\Big|_0^x+\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^3}\overline{\tau}\times \\
\times\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\overline{\tau}))\le\frac{1}{\varepsilon^3}x\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(x))+\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}\times \\
\times\int\limits_0^x(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\overline{\tau}))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}\le\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\times \\
\times\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(x))+\int\limits_0^{\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)}\rho^{\frac{7}{2}}\mathrm{e}^{-\rho}\,d\rho]\le\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\int\limits_0^\infty\rho^{\frac{7}{2}}\mathrm{e}^{-\rho}\,d\rho]= \\
=\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\frac{105}{8}\int\limits_0^\infty\rho^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\rho}\,d\rho]=\sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2^7}}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\frac{105\sqrt{\pi}}{16}]=T_1\sqrt{\varepsilon}, \\
\text{аналогично}: \int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}\le\ldots\le\varepsilon^{\frac{5}{2}}\left[\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\frac{105\sqrt{\pi}}{16}\right]=T_2\varepsilon^{\frac{5}{2}}, \\
\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}\le\ldots\le T_2\varepsilon^{\frac{3}{2}}, \\
\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}\le\ldots\le T_1\varepsilon^{\frac{3}{2}},(0<T_i=const,i=1,2;0<\varepsilon<1).
\end{cases}
$$

Поэтому, имеет место

$$\begin{cases} \left\|\xi_{\varepsilon}(x)\right\|_{c} \le \left(1-L_{p_0}\right)^{-1}[\beta\varepsilon+\frac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)+T_0\sqrt{\varepsilon}]=\Delta_2(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0, \\ L_{p_0}=\tilde{q}_1+\tilde{q}_2<1;\ T_0=T_3+\tilde{T}_3;\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0. \end{cases} \qquad (2.1.23)$$

А это значит, что при выполнении условия леммы 2.1.3 и (2.1.23) ИУ (2.1.10) однозначно разрешимо в $C[0,X]$, причем при $\varepsilon\to 0$ сходится к нулю в смысле $C[0,X]$. ЧиТД.

Выводы:

А) Если выполняются условия лемм 2.1.2; 2.1.3, то решение ИУ (2.1.5) единственным образом представимо в виде (2.1.7), при этом $\forall x\in\left(0,X\right]$ решение уравнения (2.1.5) сходится (неравномерная сходимость) при $\varepsilon\to 0$ к решению уравнения (2.1.9) с оценкой:

$$\begin{cases} \left|\theta_{\varepsilon}-\upsilon\right|\le\Delta_2(\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\left|\Pi_{\varepsilon}(x)\right|\le\Delta_2(\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \\ \left|\Pi_{\varepsilon}(x)\right|\le C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \\ \left|\Omega_{\varepsilon}(x)\right|\le\frac{1}{\varepsilon}C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)). \end{cases} \qquad (2.1.24)$$

Б) Причем, на основе (2.1.7),(2.1.11) следует: $x=0:\theta_{\varepsilon}(0)=\frac{1}{\varepsilon}F(0).$

Кроме того, имеет место (2.1.11). Поэтому, учитывая вышеуказанные дефекты, пока не можем сказать близости решений уравнений (2.1.5) и (2.1.9) в определенном смысле.

§2.1.2. Регуляризация ИУВ-1 в $Z^2(0,X)$

В этом пункте докажем, в каком смысле устанавливается близость решений (2.1.5) и (2.1.9), когда малый параметр стремится к нулю, так как (2.1.24) не дает полного ответа на этот вопрос. С этой целью, в работе введено пространство $Z^2(0,X)$, а также, чтобы в итоге показать регуляризируемости исходного ИУВ-1 в обобщенном смысле в указанном пространстве, доказана теорема.

Теорема 2.1.1. Пусть выполняются условия лемм 2.1.1-2.1.3 и имеет место (2.1.24). Тогда следуют:

$$1)\ \begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2(0,X)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{4}}, (\gamma_1 = C_0 2^{-\frac{7}{2}}[7^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \\ \|\Omega\|_{Z^2(0,X)} = \frac{1}{\varepsilon}\|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2(0,X)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{cases} \quad (2.1.25)$$

$$2)\ \| \theta_\varepsilon - \upsilon \|_{Z^2(0,X)} \le 2[\Delta_2(\varepsilon)\sqrt{X} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon), \quad (2.1.26)$$

$$\| \theta_\varepsilon \|_{Z^2(0,X)} \le r_* = const, \quad (2.1.27)$$

$$3)\ \|(\Phi\theta_\varepsilon)(x) - F(x)\|_{Z^2(0,X)} \le \tilde{M}(\varepsilon), (\tilde{M}_0(\varepsilon), \tilde{M}(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0). \quad (2.1.28)$$

Доказательство. В самом деле, условие (2.1.25) показано в условиях леммы 2.1.2, поэтому переходим к доказательству (2.1.26).

С этой целью, когда относительно первого соотношение формулы (2.1.24) проводим оценку в смысле нормы пространства $Z^2(0,X)$, то, не только учитываем результаты леммы 2.1.3 и (2.1.25), но и воспользуемся неравенством:

$$(a_1 + a_2)^n \le 2^n (a_1^n + a_2^n),\ a_1 \ge 0, a_2 \ge 0 .$$

Тогда, действительно из (2.1.24) при оценке в смысле нормы указанного пространсва, следует неравенство

$$\| \theta_\varepsilon - \upsilon \|_{Z^2} \le 2[\Delta_2(\varepsilon)\sqrt{X} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon).$$

Кроме того

$$\|\theta_\varepsilon\|_{Z^2(0,X)} \le 4[\frac{1}{\varepsilon}\|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2} + \sqrt{X}(\tilde{r}^1 + \Delta_2(\varepsilon))] \le 4[\gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}} + \sqrt{X}(\tilde{r}^1 + \Delta_2(\varepsilon))] \le r_*.$$

А это означает, что и выполняются неравенста (2.1.26), (2.1.27).

С другой стороны, как отмечены выше, что при исследовании некорректных нелинейных ИУВ-1 с решением, связанное с функцией Дирака, нельзя естественно определить никакую нелинейную функцию в пространстве ОФ. А это означает, что решение регуляризованного ИУ может слабо сходится к некоторой функции, но эту функцию нельзя рассматривать как решение исходного ИУВ-1, так как в прямом смысле не можем потвердить близости функций $\theta_\varepsilon(x), \theta(x)$ ни в каком смысле. Поэтому, введется понятие регуляризируемости в обобщенном смысле введенном обобщенном пространстве [21,40,41,62] и др., (например, см. параграф 1.2, п. 1.2.1, схему (1.2.5)), в нашем случае $Z^2(0,X)$ при этом и доказывается условие (2.1.28).

Чтобы доказать (2.1.28), сперва, оценивая выражение: $(\Phi\theta_\varepsilon)(x) - F(x)$ имеем:

$$\left|(\Phi\theta_\varepsilon)(x) - F(x)\right| = \left|\varepsilon\theta_\varepsilon + (\Phi\theta_\varepsilon)(x) - F_\varepsilon(x) - \varepsilon(\theta_\varepsilon - \upsilon + \upsilon) + F_\varepsilon(x) - F(x)\right|, \qquad (2.1.29)$$

где функция $F(x)$ свободный член ИУВ (2.1.4) (или (2.1.1)), а оператор $(\Phi\theta_\varepsilon)(x)$ определяется по правилу (2.1.5).

Далее, переходя из (2.1.29) по норме $Z^2(0,X)$**,** получим

$$\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(x) - F(x)\right\|_{Z^2(0,X)} \le 4[\left\|F_\varepsilon(x) - F(x)\right\|_{Z^2} + \varepsilon\left\|\theta_\varepsilon(x) - \upsilon(x)\right\|_{Z^2} + \varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{X}\,] \le$$

$$\le 4[\Delta_0(\varepsilon)\sqrt{X} + \varepsilon\tilde{M}_0(\varepsilon) + \varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{X}\,] = \tilde{M}(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

ЧиТД.

Из полученных результатов пунктов 2.1.1;2.1.2, в итоге имеем:

Утверждение 2.1.2. В условиях теоремы 2.1.1 ИУВ-1 (2.1.1) регуляризируется по правилу (2.1.5) в $Z^2(0,X)$ в обобщенном смысле.

§2.2. Регуляризация системы некорректных двумерных нелинейных ИУВ-1

В данном параграфе, исследуется система нелинейных некорректных двумерных ИУВ-1, где относительно ядра исследуемых ИУВ-1 требуются аналогичные условия, как в параграфе 2.1. Поэтому, на основе модификации МИО строится эквивалентные системы, допускающие применение метода сингулярных возмущений, предложенный в параграфе 2.1, т.е. метода АХ с особой функцией относительно малого параметра. При этом доказаны вопросы регуляризируемости и единственности решения исходной системы в введенном пространстве.

В связи с этим, пусть задается система ИУВ-1 в векторно-матричной форме:

$$H\theta \equiv \int_0^x\int_0^y K(x,y,\tau,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau = F(x,y), \tag{2.2.1}$$

где

$$\begin{cases} K(x,y,\tau,\nu)\in C_{n\times n}(D_0)\cap Lip(x\left|L_K\right.); K(.)\geq 0; \|K(.)\|\leq C_{01}, \\ K(0,y,0,y)\neq 0, \forall y\in[0,b], (D_0=[0,X]\times[0,b]\times\{0\leq\tau\leq x\leq X, 0\leq\nu\leq y\leq b\}), \\ (x,y)\in\bar{D}_1, (D_1=(0,X)\times(0,b)); F(x,y)\in C_n^{0,1}(\bar{D}_1)\cap Lip(x\left|L_F\right.); F(0,y)\neq 0, \\ F(x,0)=0; F(x,y)>0, \forall x\in[0,X], y\in(0,b]; \ \|F(x,y)\|\leq C_{02}, \forall(x,y)\in\bar{D}_1, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

F, K - известные данные, т.е. n -мерная векторная функция (столбец), $n\times n$ - матричная функция , соответственно. Нормы в указанных случаях определяются, например, $\|A\|-$ норма для $n\times n$ матрицы A:

$$\|A\| = \{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left|a_{ij}\right|^2\}^{\frac{1}{2}},$$

а для $n-$ мерного вектора $u\in R^n$:

$$\|u\| = \{\sum_{i=1}^n\left|u_i\right|^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

При этом $\theta-$ неизвестная неотрицательная n- мерная векторная функция из пространства $Z_n^2(D_1)$, т.е. всех n-мерных вектор-функций с компонентами из $Z^2(D_1)$, содержащее все элементы $L^2(\overline{D}_1)$, а также неотрицательных элементов $z(x,y)$, связанные с ФД по аргументу x.

Так как, при условии (2.2.2) система (2.2.1) некорректна по Адамару, то регуляризируемость системы (2.2.1) доказывается в $Z_n^2(D_1)$.

§2.2.1. Регуляризация системы ИУВ-1

Чтобы исследовать однозначной разрешимости и регуляризируемости системы (2.2.1) в $Z_n^2(D_1)$, поступим также, как и в случае параграфа 2.1. С этой целью, сперва, на основе ИУ (2.2.1) имеем:

$$(H\theta)(x,b) \equiv \int_0^x\int_0^b K(x,\tau,b,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau = F(x,b)\,. \tag{2.2.3}$$

Далее, предполагая, что относительно известных функций выполняются условия (2.2.2),(2.2.3) при этом допуская, что существует диоганально- матричная функция $H_0(x,b)$, получим следующие условия (см. лемму 2.1.1, т.е. результаты указанной леммы обобщаются к матричным и векторным функциям):

$$\begin{cases} H_0(x,b) \equiv G(x)F(x,b); G(x) \equiv \gamma + \dfrac{1}{\alpha}\lambda(x), \\ H_0(x,b) = diag(H_{01}(x,b),...,H_{0n}(x,b)), \\ H_{0i}(x,b) \equiv [\gamma + \dfrac{1}{\alpha}\lambda_i(x)]F_i(x,b), (i=\overline{1,n}; 1<\gamma = const), \\ 0<\lambda_0(x) = \min\limits_{1\le i\le n}\lambda_i(x) \in L^1(0,X); \phi(x) = \displaystyle\int_0^x \lambda_0(\tau)d\tau, \\ \min\limits_{1\le i\le n} F_i(x,b) = \tilde{F}(x,b) \ge \alpha > 0, \forall x\in[0,X]; F_0(x,y) \equiv F(x,y) - F(0,y), \\ F_0\big|_{x=0} = 0, \forall y\in[0,b]; \|F_0(x,y) - F_0(\tau,y)\| \le L_{F_0}|x-\tau|, \\ \|H_0(x,b)\| \le C_{03}h(x); \|G(x)\| \le C_{04}h(x), \\ h_0(x) \equiv \gamma + \dfrac{1}{\alpha}\lambda_0(x); h(x) \equiv h_0(x)\tilde{F}(x,b), \end{cases} \tag{2.2.4}$$

$$\begin{cases} 0 < \max C_{0j} = \tilde{C}_1 = const, (j = \overline{1,4}), \\ C_1 = \max(1, \sqrt{n^m}\tilde{C}_1^k), (m = \overline{0,4}; k = \overline{1,6}), \\ \phi_0(x) = \int\limits_0^x h(\tau)d\tau = \int\limits_0^x [\gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda_0(\tau)]\tilde{F}(\tau,b)d\tau; \ \exp(-\phi_0(x)) \le \exp(-\phi(x)). \end{cases}$$

Тогда, проведя относительно системы (2.2.1) математические действия, на основе оператора H_0, задаваемой формулой:

$$H_0\theta \equiv \int\limits_0^x H_0(\tau,b)\theta(\tau,y)d\tau, \qquad (*)$$

указанная система эквивалентна преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \int\limits_0^x H_0(\tau,b)\theta(\tau,y)d\tau = (Q\theta)(x,y) + F(x,y), \\ Q\theta \equiv (\tilde{Q}\theta)(x,y) - (H\theta)(x,y), \\ \tilde{Q}\theta \equiv \int\limits_0^x G(\tau)(Q_0\theta)(\tau,y)d\tau, \end{cases} \qquad (2.2.5)$$

где вектор-функция

$$Q_0\theta = colon\{Q_{01}\theta,...,Q_{0n}\theta\}; Q_{0i}\theta \equiv \theta_i(x,y)(H_i\theta)(x,b), (i = \overline{1,n}),$$

$$(H\theta)(x,b) \equiv \int\limits_0^x\int\limits_0^b K(x,\tau,b,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau; \theta \in R^n.$$

Из системы (2.2.5) видно, что для матричной функции $H_0(x,b)$, на основе (2.2.4) существуют собственные значения $\lambda_i(x)$, причем: $0 < \lambda_0(x) = \min\{\lambda_i(x) | i = 1,..,n\}$.

Далее, так как в теории ИУВ-1 одним из возможных методов исследования, являются регуляризирующие алгоритмы, то и в нашем случае, так как система (2.2.5) состоит из ИУВ-1, введем параметризированную систему:

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(x,y) + (\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) = F_\varepsilon(x,y), \\ (\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) \equiv \int\limits_0^x H_0(\tau,b)\theta_\varepsilon(\tau,y)d\tau - (Q\theta_\varepsilon)(x,y), \end{cases} \qquad (2.2.6)$$

имеющая особенность относительно малого параметра, где допускается условие:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(0,y) = \dfrac{1}{\varepsilon} F(0,y), \\ C_n(\overline{D}_1) \ni F_\varepsilon(x,y) : \left\| F_\varepsilon(x,y) - F(x,y) \right\|_{C_n} \le \Delta_0(\varepsilon), \\ F_\varepsilon(0,y) = F(0,y). \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Решение этой системы, как и в случае параграфа 2.1 ищем с помощью представления АХ, где содержатся неизвестные вектор-функции: $(\Pi_\varepsilon(x,y), \upsilon(x,y), \xi_\varepsilon(x,y))$, т.е.:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(x,y) = \dfrac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(x,y) + \upsilon(x,y) + \xi_\varepsilon(x,y), \\ \Pi_\varepsilon(0,y) = F(0,y), \upsilon(0,y) = 0, \xi_\varepsilon(0,y) = 0, \end{cases} \tag{2.2.8}$$

причем, относительно указанных вектор-функций, получим соответствующие системы ИУ:

$$\Pi_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x H_0(\tau,b) \Pi_\varepsilon(\tau,y)\, d\tau + F(0,y), \tag{2.2.9}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^x H_0(\tau,b)\upsilon(\tau,y)\, d\tau = (Q\upsilon)(x,y) + F_0(x,y), \\ F_0 \equiv F(x,y) - F(0,y), \end{cases} \tag{2.2.10}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon\xi_\varepsilon + \int_0^x H_0(\tau,b)\xi_\varepsilon(\tau,y)\, d\tau = (Q[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon])(x,y) - (Q\upsilon)(x,y) + F_\varepsilon(x,y) - \\ -F(x,y) - \varepsilon\upsilon(x,y). \end{gathered} \tag{2.2.11}$$

При этом, эти системы ИУ при использовании матричной функции Коши имеют полное или частичные обращения, которые позволяют провести оценки указанных систем.

Лемма 2.2.1. При выполнении условий (2.2.2),(2.2.4),(2.2.7) и (2.2.8) имеют место следующие выводы:

а) $\Pi_\varepsilon(x,y)$ является решением системы (2.2.9), которое доопределяет особую векторную функцию $\Omega_\varepsilon(x,y)$ условием

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon(x,y) = \dfrac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(x,y) = \dfrac{1}{\varepsilon} W(x,b,0,\varepsilon) F(0,y), \\ \left\| \Omega_\varepsilon(x,y) \right\| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \begin{cases} 0, x \ne 0, \\ \infty, x = 0; \end{cases} \end{cases} \tag{**}$$

б) видоизмененная вырожденная система (2.2.10) регуляризируема в $C_n\left(\overline{D}_1\right)$, т.е. решение параметризированного ИУ

$$\delta\upsilon_\delta(x,y)+\int\limits_0^x h(\tau)\upsilon_\delta(\tau,y)\,d\tau=(Q\upsilon_\delta)(x,y)+F_0(x,y) \tag{2.2.12}$$

сходится к функции $\upsilon(x,y)$ в смысле $C_n\left(\overline{D}_1\right)$ при $\delta\to 0$, причем (2.2.10) имеет решение в $C_n\left(\overline{D}_1\right)$;

в) функция $\xi_\varepsilon(x,y)$ определяется единственным образом из системы (2.2.11), причем сходится к нулю в смысле $C_n\left(\overline{D}_1\right)$, когда малый параметр: $\varepsilon\to 0$.

Доказательсво. 1) В самом деле, известно, так как для матричной функции Коши $W(x,b,0,\varepsilon)$ системы:

$$U_x(x,y)=-\frac{1}{\varepsilon}H_0(x,b)U(x,y),$$

в силу неравенства Важевского, допускается оценка:

$$\left\|W(x,b,0,\varepsilon)\right\|\le\sqrt{n}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)\right)\le\sqrt{n}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(x)\right). \tag{2.2.13}$$

Тогда из системы (2.2.9), на основе (2.2.13) следует:

$$\begin{cases}\Pi_\varepsilon(x,y)=W(x,b,0,\varepsilon)F(0,y),\\ \left\|\Pi_\varepsilon(x,y)\right\|\le C_{02}\sqrt{n}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)\right)\le C_1\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)\right).\end{cases} \tag{2.2.14}$$

Значит, для вектор-функции $\Omega_\varepsilon(x,y)$, действительно имеет место (**).

2) Далее, так как вектор-функция $\upsilon(x,y)$ является решением системы (2.2.10), то приближением к этому решению при выполнении условий леммы, может послужить решение системы с малым параметром вида (2.2.12).

В самом деле, чтобы показать это, сперва, ИУ (2.2.12) с помощью матричной функции Коши преобразуется к эквивалентному виду

$$\begin{gathered}\upsilon_\delta(x,y)=-\frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^x W(x,b,\tau,\varepsilon)H_0(\tau,b)\{(Q\upsilon_\delta)(\tau,y)-(Q\upsilon_\delta)(x,y)+\\ +F_0(\tau,y)-F_0(x,y)\}d\tau+\frac{1}{\delta}W(x,b,0,\varepsilon)\{(Q\upsilon_\delta)(x,y)+F_0(x,y)\}\equiv(P_0\upsilon_\delta)(x,y).\end{gathered} \tag{2.2.15}$$

Далее, для оценки этой системы, учитывая формулы Дирихле и проведя некоторые математические преобразования относительно интегральных членов этой системы, где содержится искомая функция имеем следующие оценки

$$\begin{cases}
\text{a}_1)\ \left\| \dfrac{1}{\delta^2}\int\limits_0^x W(x,b,\tau,\varepsilon)H_0(\tau,b)\{(Q\upsilon_\delta)(x,y)-(Q\upsilon_\delta)(\tau,y)\}d\tau \right\| \le \\
\le \sqrt{n}C_{03}\dfrac{1}{\delta^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\dfrac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int\limits_\tau^x C_{04}h(\tilde{\tau})\left\| \upsilon_\delta(\tilde{\tau},y) \right\|\times \\
\times\int\limits_0^{\tilde{\tau}}\int\limits_0^b \left\| K(\tilde{\tau},b,\overline{\tau},\nu) \right\|\times\left\|\upsilon_\delta^2(\overline{\tau},\nu)\right\| d\nu d\overline{\tau} d\tilde{\tau} + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^y \left\|K(x,y,\overline{\tau},\nu)- \right. \\
\left. -K(\tau,y,\overline{\tau},\nu)\right\|\times\left\|\upsilon_\delta^2(\overline{\tau},\nu)\right\| d\nu d\overline{\tau} + \int\limits_\tau^x\int\limits_0^y \left\|K(x,y,\overline{\tau},\nu)\right\|\times\left\|\upsilon_\delta^2(\overline{\tau},\nu)\right\| d\nu d\overline{\tau}\} d\tau \le \\
\le 2C_1[bX\dfrac{1}{\alpha}r_1^2 + b\dfrac{1}{\alpha\gamma}r_1(L_K X+1)]\int\limits_0^\infty e^{-z}zdz\left\|\upsilon_\delta\right\|_{C_n} = N_0\left\|\upsilon_\delta\right\|_{C_n}; \\
\left\| \dfrac{1}{\delta}W(x,b,0,\varepsilon)(Q\upsilon_\delta)(x,y) \right\| \le \sqrt{n}\dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))\{\int\limits_0^x C_{04}h(\tau)\left\|\upsilon_\delta(\tau,y)\right\|\times \\
\times[\int\limits_0^\tau\int\limits_0^b \left\|K(\tau,b,\overline{\tau},\nu)\right\|\times\left\|\upsilon_\delta^2(\overline{\tau},\nu)\right\| d\nu d\overline{\tau}]d\tau + \int\limits_0^x\int\limits_0^y \left\|K(x,y,\tau,\nu)\right\|\times \\
\times\left\|\upsilon_\delta^2(\tau,\nu)\right\| d\nu d\tau\} \le C_1[\dfrac{1}{\alpha}(\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x)))Xbr_1^2 + br_1\,\delta\times \\
\times(\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))^2\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))]\left\|\upsilon_\delta\right\|_{C_n} \le C_1[\dfrac{1}{\alpha}e^{-1}Xbr_1^2 + br_1\,\delta 2^2 e^{-2}]\times \\
\times\left\|\upsilon_\delta\right\|_{C_n} \le N_1\left\|\upsilon_\delta\right\|_{C_n}, (0<\delta<1), \\
S_{r_1}(0) = \left\{\upsilon_\delta(x,y)\in C_n(\overline{D}_1) : \left\|\upsilon_\delta(x,y)\right\| \le r_1, \forall(x,y)\in\overline{D}_1\right\}, \\
\int\limits_0^\infty e^{-s}sds = 1; \rho \equiv \delta^{-1}\phi_0(x), \\
\chi(\rho) = \rho^k\exp(-\rho): \\
\sup\limits_{\rho\ge 0}\chi(\rho) = k^k\exp(-k), (k=1,2,\dfrac{7}{2}), \\
\rho = 0 : \chi(0) = 0; \rho\to\infty : \chi\to 0, \\
x-\tau \le \dfrac{1}{\gamma\alpha}\int\limits_\tau^x [\gamma + \dfrac{1}{\alpha}\lambda(\tau)]\tilde{F}(\tau,b)d\tau = M_0(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)), (\tau\le x; \gamma>1),
\end{cases}$$

$$\begin{cases} M_0 = \dfrac{1}{\gamma\alpha}; x \in [0, X]: \quad x = (x^{\frac{2}{7}})^{\frac{7}{2}} \le (\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}, \\ \phi(x) = \int\limits_0^x \lambda(s)ds = x^{\frac{2}{7}}, (\lambda(x) \equiv \dfrac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}); x \le M_1(\phi_0(x))^2, (M_1 = \sup\limits_{[0,X]}(\phi_0(x))^{\frac{3}{2}}) \end{cases}$$

и ограничений относительно членов, где содержится свободная функция, содержащиеся в (2.2.15):

$$a_2) \parallel \frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^x W(x,b,\tau,\varepsilon)H_0(\tau,b)\{F_0(x,y)-F_0(\tau,y)\}d\tau + \frac{1}{\delta}W(x,b,0,\varepsilon)\times$$

$$\times F_0(x,y) \parallel \le \sqrt{n}[C_{03}\frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))L_{F_0}(x-\tau)d\tau +$$

$$+L_{F_0}\frac{x}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))] \le C_1[\frac{1}{\alpha\gamma}L_{F_0}\int\limits_0^x \exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\times$$

$$\times\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))) + L_{F_0}M_1\delta(\frac{1}{\delta}\phi_0(x))^2\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))] \le$$

$$\le L_{F_0}C_1[\frac{1}{\alpha\gamma}\int\limits_0^\infty e^{-z}zdz + 2^2e^{-2}M_1\delta] \le L_0.$$

Поэтому, на основе этих фактов из оценки системы (2.2.15), следует:

$$\begin{cases} \left\|\upsilon_\delta(x,y)\right\|_{C_n} \le (1-L_{P_0})^{-1}L_0 = r_1, \\ 0 < L_{P_0} = N_0 + N_1 < 1, \\ P_0 : S_{r_1}(0) \to S_{r_1}(0), \end{cases} \qquad (2.2.16)$$

С другой стороны, пусть имеет место:

$$\upsilon_\delta(x,y) = \upsilon(x,y) + \mu_\delta(x,y),$$

где относительно остаточной функции, введется замкнутое множество из пространства Банаха:

$$\mu_\delta(x,y) \in S_{r_2}(0) = \left\{\mu_\delta(x,y) \in C_n(\overline{D}_1) : \left\|\mu_\delta(x,y)\right\| \le r_2, \forall(x,y) \in \overline{D}_1\right\}.$$

Тогда из системы (2.2.12) получим систему ИУ:

$$\delta\mu_\delta(x,y) + \int\limits_0^x H_0(\tau,b)\mu_\delta(\tau,y)d\tau = (Q[\upsilon+\mu_\delta])(x,y) - (Q\upsilon)(x,y) - \delta\upsilon(x,y),$$

или, на основе матричной функции Коши от этой системы следует

$$\mu_\delta(x,y)=-\frac{1}{\delta^2}\int_0^x W(x,b,\tau,\varepsilon)H_0(\tau,b)\{(Q[\upsilon+\mu_\delta])(\tau,y)-(Q\upsilon\ )(\tau,y)-$$
$$-(Q[\upsilon+\mu_\delta])(x,y)+(Q\upsilon\ )(x,y)\}d\tau+\frac{1}{\delta}W(x,b,0,\varepsilon)\{(Q[\upsilon+\mu_\delta])(x,y)- \tag{2.2.17}$$
$$-(Q\upsilon\ )(x,y)\}+\Delta(\delta,\upsilon)\equiv(P\mu_\delta)(x,y)+\Delta(\delta,\upsilon),$$

где

$$\begin{cases}\Delta(\delta,\upsilon)=-\frac{1}{\delta}\int_0^x W(x,b,\tau,\varepsilon)H_0(\tau,y_0)[-\upsilon(\tau,y)+\upsilon(x,y)]d\tau-W(x,b,0,\varepsilon)\upsilon(x,y),\\ \left\|\Delta(\delta,\upsilon)\right\|_{C_n}\le L_\upsilon\sqrt{n}\{C_{03}\int_0^x(\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))(x-\tau)d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))+\\ +x\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)\}\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}C_1\{\int_0^x(\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))[\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))]\ \times\\ \times\delta d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))+\delta(\frac{1}{\delta}\phi_0(x))\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x))\}\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\delta C_1\{\int_0^\infty e^{-z}zdz+e^{-1}\}\le\beta\delta,\\ L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}C_1\{\int_0^\infty e^{-z}zdz+e^{-1}\}\le 2C_1L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}=\beta,(0<L_\upsilon=const),\\ \left\|\upsilon(x,y)-\upsilon(\bar{x},y)\right\|\le L_\upsilon\left|x-\bar{x}\right|.\end{cases} \tag{2.2.18}$$

Чтобы оценить ИУ (2.2.17), как и в случае (2.2.15), учитываются следующие факты относительно ИУ (2.2.17) (аналогичные оценки, были показаны в парагрфе 2.1):

$$\begin{cases}\mathrm{a}_3)\ \|\ \frac{1}{\delta^2}\int_0^x W(x,b,\tau,\varepsilon)H_0(\tau,b)\{(Q[\upsilon+\mu_\delta])(\tau,y)-(Q\upsilon\ )(\tau,y)-\\ -(Q[\upsilon+\mu_\delta])(x,y)+(Q\upsilon\ )(x,y)\}d\tau\ \ \|\le C_{03}\sqrt{n}\frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\times\\ \times\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{C_{04}\int_\tau^x h_0(\tilde{\tau})[\left\|\upsilon(\tilde{\tau},y)\ \right\|+\left\|\ \mu_\delta(\tilde{\tau},y)\right\|]\times\\ \times\int_0^{\tilde{\tau}}\int_0^b\left\|K(\tilde{\tau},b,\bar{\tau},\nu)\right\|[2\left\|\upsilon(\bar{\tau},\nu)\ \right\|\times\left\|\mu_\delta(\bar{\tau},\nu)\ \right\|+\left\|\mu_\delta^2(\bar{\tau},\nu)\right\|]d\nu d\bar{\tau}d\tilde{\tau}+\\ +C_{04}\int_\tau^x h_0(\tilde{\tau})\left\|\mu_\delta(\tilde{\tau},y)\right\|\int_0^{\tilde{\tau}}\int_0^b\left\|K(\tilde{\tau},b,\bar{\tau},\nu)\right\|\times\left\|\upsilon^2(\bar{\tau},\nu)\right\|d\nu d\bar{\tau}d\tilde{\tau}+\\ +\int_0^\tau\int_0^y\left\|K(x,y,\bar{\tau},\nu)-K(\tau,\bar{\tau},y,\nu)\right\|\times[2\left\|\upsilon(\bar{\tau},\nu)\ \right\|\times\left\|\mu_\delta(\bar{\tau},\nu)\ \right\|+\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
+\left\|\mu_\delta^2(\bar\tau,\nu)\right\|]d\nu d\bar\tau+\int\limits_\tau^x\int\limits_0^y\left\|K(x,\bar\tau,y,\nu)\right\|[2\left\|\upsilon(\bar\tau,\nu)\right\|\times\left\|\mu_\delta(\bar\tau,\nu)\right\|+\left\|\mu_\delta^2(\bar\tau,\nu)\right\|]\times \\
\times d\nu d\bar\tau\}d\tau\le 2C_1\dfrac{1}{\alpha}\{[bX(\tilde r_1+r_2)(2\tilde r_1+r_2)+\tilde r_1^{\,2}bX]+b\dfrac{1}{\gamma}(2\tilde r_1+r_2)\times \\
\times(L_K X+1)\}\left\|\mu_\delta(x,y)\right\|_{C_n}=\tilde N_0\left\|\mu_\delta(x,y)\right\|_{C_n}; \\
\left\|\ \dfrac{1}{\delta}W(x,b,0,\varepsilon)\{(Q[\upsilon+\mu_\delta])(x,y)-(Q\upsilon\ )(x,y)\}\ \right\|\le\sqrt{n}\,\dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))\times \\
\times\left\|\ (Q[\upsilon+\mu_\delta])(x,y)-(Q\upsilon)(x,y)\ \right\|\le\sqrt{n}\,\dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))[\int\limits_0^x\int\limits_0^y\left\|K(x,\tau,y,\nu)\right\|\times \\
\times(2\left\|\upsilon(\tau,\nu)\right\|\times\left\|\mu_\delta(\tau,\nu)\right\|+\left\|\mu_\delta^2(\tau,\nu)\right\|)d\nu d\tau+\int\limits_0^x C_{04}h_0(\tau)(\left\|\upsilon(\tau,y)\right\|+ \\
+\left\|\mu_\delta(\tau,y)\right\|)\int\limits_0^\tau\int\limits_0^b\left\|K(\tau,b,\bar\tau,\nu)\right\|\times(2\left\|\upsilon(\bar\tau,\nu)\right\|\times\left\|\mu_\delta(\bar\tau,\nu)\right\|+\left\|\mu_\delta^2(\bar\tau,\nu)\right\|)\times \\
\times d\nu d\bar\tau d\tau+\int\limits_0^x C_{04}h_0(\tau)\left\|\mu_\delta(\tau,y)\right\|\int\limits_0^\tau\int\limits_0^b\left\|K(\tau,b,\bar\tau,\nu)\right\|\times\left\|\upsilon^2(\bar\tau,\nu)\right\|d\nu d\bar\tau d\tau]\le \\
\le C_1[bM_2(2\tilde r_1+r_2)2^2e^{-2}\delta+(bX\dfrac{1}{\alpha}(\tilde r_1+r_2)(2\tilde r_1+r_2)e^{-1}+bX\dfrac{1}{\alpha}\tilde r_1^{\,2}e^{-1})]\times \\
\times\left\|\mu_\delta(x,y)\right\|_{C_n}\le\tilde N_1\left\|\mu_\delta\right\|_{C_n}, \\
0<\delta<1;\left\|\upsilon\right\|_{C_n}\le\tilde r_1,
\end{cases}
$$

и (2.2.18). Поэтому, из оценки системы (2.2.17) в смысле нормы векторного пространства $C_n(\bar D_1)$ получим:

$$
\begin{cases}
\left\|\mu_\delta(x,y)\right\|_{C_n}\le(1-L_P)^{-1}\beta\delta, \\
0<L_P=\tilde N_0+\tilde N_1=C^1\{(2+e^{-1})\dfrac{1}{\alpha}bX(\tilde r_1+r_2)(2\tilde r_1+r_2)+(2+e^{-1})\dfrac{1}{b}bX\tilde r_1^{\,2}+ \\
+[\dfrac{1}{\alpha\gamma}2(1+L_K X)+4e^{-2}M_1]b(2\tilde r_1+r_2)\}<1.
\end{cases}
\tag{2.2.19}
$$

Это значит, что система (2.2.17) однозначна разрешима в классе непрерывных векторных функций и сходится равномерно к нулю при малом параметре, стремящиеся к нулю. Поэтому, имеем:

$$
\upsilon_\delta(x,y)\underset{\delta\to 0}{\to}\upsilon(x,y),\forall(x,y)\in\bar D_1, \tag{2.2.20}
$$

т.е. решение системы ИУ (2.2.12) сходится к решению (2.2.10) в смысле $C_n(\overline{D}_1)$. Доказано условие (б), леммы 2.2.1.

3) Чтобы определить вектор-функцию $\xi_\varepsilon(x,y)$, сперва систему ИУ (2.2.11) с учетом матричной функции Коши, преобразуем к виду

$$\xi_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x W(x,b,\tau,\varepsilon)H_0(\tau,b)\{(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(\tau,y)-(Q\upsilon)(\tau,y)-$$
$$-(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x,y)+(Q\upsilon)(x,y)+F_\varepsilon(\tau,y)-F(\tau,y)\}d\tau+\frac{1}{\varepsilon}W(x,b,0,\varepsilon)\times \tag{2.2.21}$$
$$\times\{(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x,y)-(Q\upsilon)(x,y)\}+\frac{1}{\varepsilon}[F_\varepsilon(x,y)-F(x,y)]+\Delta(\varepsilon,\upsilon)\equiv$$
$$\equiv(P_1\xi_\varepsilon)(x,y)+\Delta(\varepsilon,\upsilon)+\Delta_1(\varepsilon,F_\varepsilon,F),$$

где введенные выражения в систему (2.2.21) определяются по правилу:

$$\begin{cases}\Delta(\varepsilon,\upsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x W(x,b,\tau,\varepsilon)H_0(\tau,b)[-\upsilon(\tau,y)+\upsilon(x,y)]d\tau-W(x,b,0,\varepsilon)\upsilon(x,y),\\ \Delta_1(\varepsilon,F_\varepsilon,F)=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x W(x,b,\tau,\varepsilon)H_0(\tau,b)[F_\varepsilon(\tau,y)-F(\tau,y)]d\tau+\frac{1}{\varepsilon}[F_\varepsilon(x,y)-F(x,y)],\\ \left\|\Delta(\varepsilon,\upsilon)\right\|_c\le\sqrt{n}L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\{\int_0^x C_{03}(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))[\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))]\ \varepsilon d(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))+\\ +\varepsilon(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)\}\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\varepsilon C_1\{\int_0^\infty e^{-z}zdz+e^{-1}\}\le\beta\varepsilon,\\ \|\ \Delta_1(\varepsilon,F_\varepsilon,F)\ \|\le\sqrt{n}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x C_{03}h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\left\|F_\varepsilon(\tau,y)-F(\tau,y)\right\|d\tau+\\ +\frac{1}{\varepsilon}\left\|F_\varepsilon(x,y)-F(x,y)\right\|\}\le(C_1+1)\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon),(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0).\end{cases} \tag{2.2.22}$$

Далее, так как относительно системы ИУ (2.2.22) допускаются оценки, на основе (2.2.13), т.е.:

$$\begin{cases}\mathrm{a}_4)\ \|\ \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x W(x,b,\tau,\varepsilon)H_0(\tau,b)\{(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(\tau,y)-(Q\upsilon)(\tau,y)-\\ -(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x,y)+(Q\upsilon)(x,y)\}d\tau\ \ \|\le\sqrt{n}\{C_{03}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x h(\tau)\times\\ \times\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int_\tau^x C_{04}h_0(\tilde{\tau})[\left\|\upsilon(\tilde{\tau},y)\right\|+\left\|\xi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)\right\|+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\Pi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)\right\|]\times\\ \times\int_0^{\tilde{\tau}}\int_0^b\left\|K(\tilde{\tau},b,\overline{\tau},\nu)\right\|[2\left\|\upsilon(\overline{\tau},\nu)\right\|\times\left\|\xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\right\|+\left\|\xi_\varepsilon^2(\overline{\tau},\nu)\right\|+2\frac{1}{\varepsilon}\left\|\Pi_\varepsilon(\overline{\tau},y)\right\|\times\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\times(\|\upsilon(\bar\tau,\nu)\|+\|\xi_\varepsilon(\bar\tau,\nu)\|)]d\nu\, d\bar\tau\, d\tilde\tau+\int\limits_\tau^x C_{04}h_0(\tilde\tau)[\|\xi_\varepsilon(\tilde\tau,y)\|+\dfrac{1}{\varepsilon}\|\Pi_\varepsilon(\tilde\tau,y)\|]\times \\
\times\int\limits_0^{\tilde\tau}\int\limits_0^{b}\|K(\tilde\tau,b,\bar\tau,\nu)\|\times\|\upsilon^2(\bar\tau,\nu)\|d\nu\, d\bar\tau\, d\tilde\tau+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{y}\|K(x,y,\bar\tau,\nu)-K(\tau,y,\bar\tau,\nu)\|\times \\
\times[2\|\upsilon(\bar\tau,\nu)\|\times\|\xi_\varepsilon(\bar\tau,\nu)\|+\|\xi_\varepsilon^2(\bar\tau,\nu)\|+2\dfrac{1}{\varepsilon}\|\Pi_\varepsilon(\bar\tau,y)\|(\|\upsilon(\bar\tau,\nu)\|+\|\xi_\varepsilon(\bar\tau,\nu)\|)]\times \\
\times d\nu\, d\bar\tau+\int\limits_\tau^{x}\int\limits_0^{y}\|K(x,y,\bar\tau,\nu)\|[2\|\upsilon(\bar\tau,\nu)\|\times\|\xi_\varepsilon(\bar\tau,\nu)\|+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau,\nu)+ \\
+2\dfrac{1}{\varepsilon}\|\Pi_\varepsilon(\bar\tau,y)\|(\|\upsilon(\bar\tau,\nu)\|+\|\xi_\varepsilon(\bar\tau,\nu)\|)+\dfrac{1}{\varepsilon^2}\Pi_\varepsilon^2(\bar\tau,y)]d\nu\, d\bar\tau\}d\tau\le \\
\le C_1\{\dfrac{1}{\alpha}(\tilde r_1+\tilde r_2)[bX(2\tilde r_1+\tilde r_2)+2b\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]\|\xi_\varepsilon\|_{C_n}+ \\
+\dfrac{1}{\alpha}(\tilde r_1+\|\xi_\varepsilon\|_{C_n})[2\tilde r_1 b\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+b\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\dfrac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]+ \\
+\dfrac{1}{\alpha}b[2\tilde r_1\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\dfrac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]+ \\
+\dfrac{1}{\alpha}b[2\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+(2\tilde r_1+\tilde r_2)\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]\|\xi_\varepsilon\|_{C_n}+ \\
+\dfrac{1}{\alpha}b\tilde r_1^2[X\|\xi_\varepsilon\|_C+\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]+L_K\dfrac{1}{\gamma\alpha}b\{[X(2\tilde r_1+\tilde r_2)+ \\
+2\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]\|\xi_\varepsilon\|_{C_n}+2\tilde r_1\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+ \\
+\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\dfrac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau\}+b\{\dfrac{1}{\gamma\alpha}(2\tilde r_1+\tilde r_2)\|\xi_\varepsilon\|_{C_n}+2\tilde r_1\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+ \\
+2\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau\|\xi_\varepsilon\|_{C_n}+\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau\}\}\le T_3\sqrt{\varepsilon}+\tilde q_1\|\xi_\varepsilon\|_{C_n}, \\
\|\xi_\varepsilon(x,y)\|\le\tilde r_2,\forall(x,y)\in\bar D_1,
\end{cases}
$$

и

$$
\begin{cases}
\mathrm{a}_5)\ \|\ \dfrac{1}{\varepsilon}W(x,b,0,\varepsilon)\{(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x,y)-(Q\upsilon)(x,y)\}\ \|\le \\
\le\sqrt{n}\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))\|(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x,y)-(Q\upsilon)(x,y)\|\le
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\le \dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{n}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))\{\int\limits_0^x C_{04}h(\tilde{\tau})[\left\|\upsilon(\tilde{\tau},y)\right\|+\left\|\xi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)\right\|+\dfrac{1}{\varepsilon}\left\|\Pi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)\right\|]\times \\
\times\int\limits_0^{\tilde{\tau}}\int\limits_0^b\left\|K(\tilde{\tau},b,\overline{\tau},\nu)\right\|[2\left\|\upsilon(\overline{\tau},\nu)\right\|\times\left\|\xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\right\|+\left\|\xi_\varepsilon^2(\overline{\tau},\nu)\right\|+2\dfrac{1}{\varepsilon}\left\|\Pi_\varepsilon(\overline{\tau},y)\right\|\times \\
\times(\left\|\upsilon(\overline{\tau},\nu)\right\|+\left\|\xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\right\|)+\dfrac{1}{\varepsilon^2}\left\|\Pi_\varepsilon^2(\overline{\tau},\nu)\right\|]d\nu d\overline{\tau}d\tilde{\tau}+\int\limits_0^x C_{04}h(\tilde{\tau})[\left\|\xi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)\right\|+ \\
+\dfrac{1}{\varepsilon}\left\|\Pi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)\right\|]\int\limits_0^{\tilde{\tau}}\int\limits_0^b \left\|K(\tilde{\tau},b,\overline{\tau},\nu)\right\|\times\left\|\upsilon^2(\overline{\tau},\nu)\right\|d\nu d\overline{\tau}d\tilde{\tau}+\int\limits_0^x\int\limits_0^y\left\|K(x,y,\overline{\tau},\nu)\right\|\times \\
\times[2\left\|\upsilon(\overline{\tau},\nu)\right\|\times\left\|\xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\right\|+\left\|\xi_\varepsilon^2(\overline{\tau},\nu)\right\|+2\dfrac{1}{\varepsilon}\left\|\Pi_\varepsilon(\overline{\tau},y)\right\|(\left\|\upsilon(\overline{\tau},\nu)\right\|+ \\
+\left\|\xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\right\|)+\dfrac{1}{\varepsilon^2}\left\|\Pi_\varepsilon^2(\overline{\tau},\nu)\right\|]d\nu d\overline{\tau}\}\le C_1\{\dfrac{1}{\alpha}(\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)[bX(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)+ \\
+2b\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]\left\|\xi_\varepsilon\right\|_{C_n}+\dfrac{1}{\alpha}(\tilde{r}_1+\left\|\xi_\varepsilon\right\|_{C_n})[2\tilde{r}_1 b\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}+ \\
+b\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\dfrac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]+\dfrac{1}{\alpha}b[2\tilde{r}_1\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}+ \\
+\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\dfrac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]+\dfrac{1}{\alpha}b[2\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}+(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)\times \\
\times\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]\left\|\xi_\varepsilon\right\|_{C_n}+\dfrac{1}{\alpha}b\tilde{r}_1^2[X\left\|\xi_\varepsilon\right\|_{C_n}+\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]+ \\
+[b(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)\varepsilon^{\frac{5}{2}}(\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))+2b\varepsilon^{\frac{3}{2}}(\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))]\times \\
\times\left\|\xi_\varepsilon\right\|_{C_n}+b\sqrt{\varepsilon}(\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))\}\le\tilde{T}_3\sqrt{\varepsilon}+\tilde{q}_2\left\|\xi_\varepsilon\right\|_{C_n},
\end{cases}
$$

где в полученных оценках, учтены следующие факты, которые показывают методику, каким образом получаются регулярность интегральных членов относительно малого параметра, а точнее, способы доказательства леммы 2.1.2, т.е.:

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^x\dfrac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\dfrac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}=\dfrac{1}{\varepsilon^3}[\overline{\tau}\exp(-\dfrac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))\Big|_0^x+\int\limits_0^x \overline{\tau}\exp(-\dfrac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))\times \\
\times d(\dfrac{2}{\varepsilon}\phi_0(\overline{\tau}))]\le\dfrac{1}{\varepsilon^3}x\exp(-\dfrac{2}{\varepsilon}(\phi_0(x))+\dfrac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^x(\dfrac{2}{\varepsilon}\phi_0(\overline{\tau}))^{\frac{7}{2}}\exp(-\dfrac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))\times
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\times d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau} \le \frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(x)) + \int\limits_0^{\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)} \rho^{\frac{7}{2}} e^{-\rho} d\rho] \le \\
\le \frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \int\limits_0^{\infty} \rho^{\frac{7}{2}} e^{-\rho} d\rho] = \ldots = \frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105\sqrt{\pi}}{16}] = T_1\sqrt{\varepsilon}, \\
\text{аналогично}: \int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau} \le \ldots \le T_2\varepsilon^{\frac{5}{2}}, \\
\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau} \le \ldots \le T_2\varepsilon^{\frac{3}{2}}, \\
\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau} \le \ldots \le T_1\varepsilon^{\frac{3}{2}}, (0 < T_i = const, i = 1,2; 0 < \varepsilon < 1).
\end{cases}
$$

Тогда, с учетом вышеуказанных условий из оценки системы (2.2.21), следует

$$
\begin{cases}
\left\|\xi_\varepsilon(x,y)\right\|_{C_n} \le \left(1 - L_{P_0}\right)^{-1}[\beta\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon) + T_0\sqrt{\varepsilon}] = \Delta_2(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\
L_{P_1} = \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 < 1; T_0 = T_3 + \tilde{T}_3; \frac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.
\end{cases}
\tag{2.2.23}
$$

Это значит, что в условиях леммы 2.2.1 и (2.2.23) система (2.2.11) однозначна разрешима в $C_n(\bar{D}_1)$ и при $\varepsilon \to 0$ сходится к нулю в $C_n(\bar{D}_1)$. ЧиТД.

Выводы:

А) При условиях леммы 2.2.1, то решение системы (2.2.6) единственным образом представимо в виде (2.2.8), при этом $\forall x \in (0, X]$ решение (2.2.6) сходится к решению (2.2.10) (неравномерная сходимость) при $\varepsilon \to 0$ с оценкой:

$$
\begin{cases}
\left\|\theta_\varepsilon - \upsilon\right\| \le \Delta_2(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\Pi_\varepsilon(x,y)\right\| \le \Delta_2(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}C_1\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \\
\left\|\Pi_\varepsilon(x,y)\right\| \le C_{02}\sqrt{n}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)) \le C_1\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)\right), \\
\left\|\Omega_\varepsilon(x,y)\right\| = \frac{1}{\varepsilon}\left\|\Pi_\varepsilon(x,y)\right\| \le \frac{1}{\varepsilon}C_1\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)\right),
\end{cases}
\tag{2.2.24}
$$

Б) кроме того, в начале отрезка решение параметризированной системы (2.2.6) допускает условие: $x = 0 : \theta_\varepsilon(0, y) = \frac{1}{\varepsilon}F(0, y)$.

Поэтому, на основе (2.2.24) возникает вопрос, в каком смысле доказывается близость решений систем (2.2.6) и (2.2.10), когда малый параметр стремится к нулю.

§2.2.1. Регуляризируемость системы ИУВ-1 в $Z_n^2(D_1)$

В этом пункте, для этого и введено векторное пространство $Z_n^2(D_1)$, чтобы полноценно отценить близости решений указанных ИУ, кроме того, в итоге покажем и регуляризируемости исходного ИУВ-1 в обобщенном смысле в этом пространстве.

Теорема 2.2.1. Пусть имеют место условия леммы 2.2.1. Тогда, на основе (2.2.8) следуют:

$$1)\ \begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z_n^2(D_1)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{4}}, (\gamma_1 = C_1\sqrt{b}\,2^{-7}[7^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \\ \|\Omega_\varepsilon\|_{Z_n^2(D_1)} \le \gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{cases} \tag{2.2.25}$$

$$2)\ \begin{cases} \|\theta_\varepsilon - \upsilon\|_{Z_n^2(D_1)} \le 2[\Delta_2(\varepsilon)\sqrt{Xb} + \gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon), \\ \|\theta_\varepsilon\|_{Z_n^2(D_1)} \le r_* = const, \end{cases} \tag{2.2.26}$$

$$3)\ \|(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) - F(x,y)\|_{Z_n^2(D_1)} \le \tilde{M}(\varepsilon), (\tilde{M}_0(\varepsilon), \tilde{M}(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0). \tag{2.2.27}$$

Доказательство. В самом деле, в условиях леммы 2.2.1 имеет место (2.2.24). Поэтому, рассматривая второе соотношение формулы (2.2.24) имеем

$$\int_0^x\int_0^y \|\Pi_\varepsilon(x,y)\|^2 dv d\tau \le (C_{02}\sqrt{n})^2 \int_0^x\int_0^y \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d\tau dv = C_1^2 b[\tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))\Big|_0^x +$$

$$+\int_0^x \tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))] = C_1^2 b[x\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)) + \int_0^x 2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{2}}(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))^{\frac{7}{2}} \times$$

$$\times\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))] \le C_1^2 b 2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{2}}[(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)) + \int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{\frac{7}{2}}d\rho] \le$$

$$\le C_1^2 b 2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{2}}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}] = C_1^2 b 2^{-7}\varepsilon^{\frac{7}{2}}[7^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}],$$

или учитывая норму пространства $Z_n^2(D_1)$, получим:

$$\begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z_n^2} \le C_1\sqrt{b}\,2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{4}}[7^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}} = \gamma_1\varepsilon^{\frac{7}{4}}, \\ \|\Omega_\varepsilon\|_{Z_n^2} \le \gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{cases}$$

т.е., действительно имеет место (2.2.25).

Далее, из первого соотношение формулы (2.2.24), на основе нормы $Z_n^2(D_1)$ и неравенство: $(a_1+a_2)^k \le 2^k(a_1^k+a_2^k)$, $a_1\ge 0, a_2\ge 0, k>1$, следует

$$\|\theta_\varepsilon-\upsilon\|_{Z_n^2}\le 2[\Delta_2(\varepsilon)\sqrt{Xb}+\gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}]=\tilde{M}_0(\varepsilon).$$

А также:

$$\|\theta_\varepsilon\|_{Z_n^2}\le 4[\sqrt{bX}(\tilde{r}_1+\Delta_2(\varepsilon))+\gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}]\le r_*.$$

Это означает, что и выполняется (2.2.26).

С другой стороны, обсуждая как в случае (2.1.26) (см. §2.1, теорема 2.1.1), проводя оценку относительно выражение: $(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y)-F(x,y)$ получим:

$$\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y)-F(x,y)\right\|=\left\|\varepsilon\theta_\varepsilon+(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y)-F_\varepsilon(x,y)-\varepsilon(\theta_\varepsilon-\upsilon+\upsilon)+F_\varepsilon(x,y)-F(x,y)\right\|, \quad (2.2.28)$$

где $F(x,y)$ свободный член ИУВ (2.2.5) (или (2.2.1)), а оператор $(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y)$ определяется в виде (2.2.6). Поэтому, оценивая (2.2.28) в $Z_n^2(D_1)$, следует

$$\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y)-F(x,y)\right\|_{Z_n^2(D_1)}\le 4[\left\|F_\varepsilon(x,y)-F(x,y)\right\|_{Z_n^2(D_1)}+\varepsilon\left\|\theta_\varepsilon(x,y)-\upsilon(x,y)\right\|_{Z_n^2(D_1)}+$$
$$+\varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{Xb}]\le 4[\Delta_0(\varepsilon)\sqrt{Xb}+\varepsilon\tilde{M}_0(\varepsilon)+\varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{Xb}]=\tilde{M}(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0.$$

ЧиТД.

Утверждение 2.2.1. В условиях теоремы 2.2.1 система (2.2.1) регуляризируется по правилу (2.2.8) в $Z_n^2(D_1)$ в обобщенном смысле.

§2.3. Заключение главы 2.

В данной главе исследованы некорректные нелинейные одномерные и двумерные ИУВ-1 в $Z^2(0,X)$, $Z_n^2(D_1)$, соответственно. Причем решения исходных уравнений строятся с помощью специального метода сингулярных возмущений, предварительно преобразовав их на основе модификации «МИОсВФ» [40]. При этом, выявлены достаточные условия разрешимости и регуляризируемости в обобщенном смысле исследуемых ИУВ-1 соответственно в $Z^2(0,X)$, $Z_n^2(D_1)$.

Глава 3

Регуляризация ОЗ гиперболического типа, вырождающиеся в некорректные нелинейные ИУВ-1 с различными пределами интегрирования

В теории задач МФ исследованы различные прямые и ОЗ, связанные с ДУвЧП и для решения этих задач рассмотрены различные методы, такие, как метод Римана, метод Грина, метод вспомогательных функций (МВФ) и др., которые встречаются в работах [1,3,6,16,17,26,27,38-40,51,56,59,60] и т.д.

Важное значение в этой области имеют ОЗ [4,5,13,19,28,29,33,41,42,51, 57,62] и др., где вырождаются линейные и нелинейные ИУВ-1 или ИУВ-3 с особыми решениями, так как их исследования еще незавершены. Как отмечено в главе 1, что в некоторых случаях, разработаны способы исследований указанных ИУ, связанные с МР в регулярном или в обобщенном смысле [2,15,18,21,30-32,36,40,52-55,61,63] и др.

В связи с этим, в данной главе изучаются коэффициентные ОЗ с дифференциальными, интегро-дифференциальными операторами (ДО, ИДО) второго и четвертого порядков гиперболического типа в ограниченных и неограниченных областях, вырождающиеся в некорректные ИУВ-1 с различными пределами интегрирования. Чтобы доказать регуляризируемости исследуемых ОЗ в введенных пространствах, применяются различные варианты МВФ и МР в обобщенном смысле, который разработан в главе 2 данной работы.

Отметим, что основные результаты исследований данной главы содержатся в трех параграфах. Особенно отметим результаты параграфов 3.1;3.2, так так в этих параграфах исследуются нелинейные ОЗ прикладного характера, т.е., из теории нелинейных волн, наследственной среды и влаго-переноса в почвогрунтах [3,22-24,35,37-39,41,42,44,57-59] и др. А точнее, рассматриваемые нелинейные уравнения для этих ОЗ в указанных параграфах являются разновидностями уравнения Аллера, неоднородного нелинейного уравнения Шредингера-Уиземи (НУШУ) в действительной области в теории волн, или уравнения деформации наследственной среды в неограниченной области.

А) ОЗ параграфа 3.1, связана с уравнениями в теории волн. Например, известно, что, если сила:

$$\Phi \equiv -w_p^2 \, sin V,$$

возникает вследствие действия силы тяжести, а сила $(b^2 V_{x^2})$ моделирует влияние кручения, то однородное уравнение sin-Гордон имеет форму [35]:

$$V_{t^2} - b^2 V_{x^2} + w_p^2 \sin V = 0, \qquad (3.1)$$

здесь w- называется частотой колебания. Кроме того, можно получить и разновидности указанного уравнения в качестве примера НУШУ [35,58]:

$$V_{t^2} - b^2 V_{x^2} + F(V) = 0, \qquad (3.2)$$

где функция $F(V)$ берется нечетной по V и при малых V равной $F(V) = V - \gamma V^3, (\gamma = \dfrac{1}{6}).$

Некоторые классы указанных уравнений с условием Коши по переменной $t \in [0,T]$, $(x \in R)$ были решены, на основе метода ОЗ рассеяния, при которых огибающая быстрых колебаний стремится к нулю на бесконечности, например в работах [35,58] и др.

Если в вышеуказанных уравнениях нарушается однородность, т.е. в правых сторонах появляется интегральный оператор, содержащий искомую функцию и свободная функция в качестве воздействия внешних сил или отмеченных функциях содержатся некоторые неизвестные коэффициенты, при этом задаются определенные условия относительно искомой функции, т.е. в качестве условия Коши и дополнительная информация о решении в опреленной точке, то имеем ОЗ.

Например, ОЗ с уравнением указанного класса задается в виде:

$$V_{t^2}-b^2V_{x^2}+K_0(x)[\Phi(V)+\int_0^t \Psi(t-\tau)V(\tau,x-b(t-\tau))\frac{\partial}{\partial x}[V_\tau(\tau,x)-bV_x(\tau,x)]d\tau]= \tag{3.3}$$
$$=(J\theta)(t),\forall(t,x)\in\bar{D}_0,$$

$$\begin{cases} V(t,x)\big|_{t=0}=0, V(t,x)_t\big|_{t=0}=\psi(x),\forall x\in R, \\ (V_t-bV_x)\big|_{x=x_0}=g(t),\ \forall t\in[0,T],(D_0=(0,T)\times R,x_0\in R), \end{cases} \tag{3.4}$$

с условием согласования

$$(V_t-bV_x)\big|_{t=0}=\psi(x);\ g(0)=\psi(x_0), \tag{3.5}$$

где

$$(J\theta)(t)\equiv\lambda\int_0^{M(t)}K(t,\eta)\theta^2(\eta)d\eta \tag{*}$$

причем относительно известных функций:

$0<b,0<\lambda<1,(b,\lambda=const);K_0(x)\in C^1(R);\Phi(V)\in C^2\left(R\right);\Psi(t)\in C^1[0,T],$

$g(t)\in C^1[0,T],\psi(x)\in C^2(R),M(t),K(t,s)$

имеют место условия

а) $\sup\left|\Phi_V^{(j)}\right|\le\beta_1,(j=0,1);\Phi_V(V)\in C(R)\cap Lip(V\left|L_{\Phi_V}\right.),$

б) $\left|g^{(j)}(t)\right|\le\beta_2;\left|\Psi^{(j)}(t)\right|\le\beta_3,\forall t\in[0,T],(j=0,1);\left|\psi^{(i)}(x)\right|\le\beta_4,(i=0,1,2),$

в) $\begin{cases} 0\le K_0(x)\le\tilde{K}_{01}<\infty:\int_R K_0(x)dx\le\tilde{K}_{02}=const,(\left|K_0'(x)\right|\le\tilde{K}_{03}=const), \\ \tilde{K}_0=\max(\tilde{K}_{01},\tilde{K}_{02},\tilde{K}_{03}); \text{например: } K_0(x)\equiv e^{-\beta x^2}\ (\beta>0;\lim\limits_{x\to\pm\infty}K_0(x)=0), \end{cases}$

г) $K\left(t,s\right)\in C\left(D\ \right)\cap Lip(t\left|L_K\right.),0<L_K=const;0\le K\left(t,t\right),K(0,0)\ne0;\left|K(.)\right|\le C_{01},$

$D=\{(t,s):0\le s\le t\le T\},$

д) $0\le M(t)\le t\le T,M(0)=0$, $M(t)\in C[0,T]\cap Lip(t\left|L_M\right.),0<L_M=const,$

при этом вектор-функция $P=(V,\theta)$ является неизвестным.

Отметим, что при изучении ОЗ (3.3)-(3.5) вырождается некорректное нелинейное ИУВ-1:

$$\lambda \int_{0}^{M(t)} K(t,s)\theta^2(s)ds = F(t) \tag{3.6}$$

с условием:

е) $C[0,T] \ni F(t): F(t) \geq \alpha > 0, \forall t \in [0,T]; \left|F(t)\right| \leq C_{02} = const,$

т.е. ИУВ (3.6) с условием (е) некорректно поставлено в $C[0,T]$. Следовательно, регуляризируемость этого уравнения в обобщенном смысле исследуется в $Z^2(0,T)$.

Кроме того, в работах [44,57] были исследованы аналогичные ОЗ в ограниченной области, когда подинтегральное выражение было линейным, т.е., там только содержалась искомая функция в частных производных, причем с неизвестной вектор функцией $P = (V, \Psi(t))$, где $\Psi(t)$ - ядро, а свободный член считается известным, при этом $\Phi(.) \equiv 0$. В этих ОЗ вырождаются ИУВ-3 или ИУВ-1, где регуляризируемость понимается в пространстве Банаха или в случае ИУВ-1 и пространстве Гильберта, в чем и отличаются от исследований данной работы.

Замечание 3.1. Если относительно ОЗ (3.3)-(3.5), предположим

$$\begin{cases} V_t - bV_x = U(t,x), \\ U(0,x) = (V_t - bV_x)\big|_{t=0} = \psi(x), \\ U(t,x_0) = (V_t - bV_x)\big|_{x=x_0} = g(t), (\psi(x_0) = g(0)), \end{cases} \tag{3.7}$$

то имеем:

$$\begin{cases} V = \int_0^t U(\tau, x + b(t-\tau))d\tau \equiv (A_1 U)(t,x), \\ V_t = U(t,x) + b\int_0^t U_h(\tau, x + b(t-\tau))d\tau, \\ V_x = \int_0^t U_h(\tau, x + b(t-\tau))d\tau, (h = x - b(t-\tau); h_t = -b, h_x = 1). \end{cases} \tag{3.8}$$

Значит, на основе (3.7), (3.8) из (3.3) следует нелинейное ИДУ:

$$U_t + bU_x + K_0(x)[\Phi(A_1 U)) + \int_0^t \Psi(t-\tau)(A_1 U)(\tau, x - b(t-\tau))\frac{\partial}{\partial x}U(\tau,x)d\tau] = (J\theta)(t) \tag{3.9}$$

с условием

$$\begin{cases} U(0,x)=\psi(x), \forall x\in R, \\ U(t,x_0)=g(t), \forall t\in[0,T], (\psi(x_0)=g(0)). \end{cases} \quad (3.10)$$

Отметим, что ИДУ (3.9) является уравнением из класса уравнений типа Уиземи [35,37,58] и др. Кроме того, в области прямых задач Коши с уравнениями типа Уиземи встечаются работы, где были построены решение в классических или в обобщенных пространствах. Например, в работе [37] была изучена прямая задача Коши для уравнения:

$$U_t+\lambda(t)UU_x=(\tilde{K}U)(t,x) \quad (3.11)$$

где $\tilde{K}$ -линейный интегральный оператор с областью интегрирования R, при этом решение рассматривался в обобщенном смысле.

Аналогичная прямая задача для ДУ в пространстве Банаха была решена и в работе М.И. Иманалиева и Ю.А. Веда [22] и др., и для решения этой задачи был разработан специальный метод «Метод дополнительного аргумента - МДА». Далее, на основе этого метода с учениками акад. Иманалиева М.И., были изучены различные классы ДУ и ИДУ в частных производных из теории нелинейных волн в пространстве Банаха. Здесь не приводим эти работы, так как в указанных работах изучаются прямые задачи Коши, где исследуемые задачи с учетом МДА трансформируется к ИУ-2, где решение получаются только в пространстве Банаха. Поэтому, нет необходимости приводить эти работы, так как указана основная работа [22].

В нашем случае, относительно ОЗ (3.9),(3.10) в неограниченной области не применимы методы, которые были разработаны вышеуказанных работах. Значит, так как не можем привести к интегральному виду уравнение (3.9) с теми известными МВФ, то естественно возникает вопрос, каким образом преобразуем уравнение (3.9) к интегральному виду, а тем более в случае (3.3). Следовательно, нет необходимости преобразовать (3.3) к виду (3.9), т.е., такое трансформирование было сделано для того, чтобы показать проблемности ОЗ (3.3)-(3.5).

В связи с этим, в параграфе 3.1 исследуем ОЗ (3.5), (3.6), как более общий вид, чем остальные с теми проблемами, которые мы указали выше. Поэтому, для интегрилизации (3.5), покажем один из новых вариантов метода интегральных операторов (МИО), где содержится новая неизвестная функция. Далее, на основе разрешимости полученного ИУ и доказывается разрешимость уравнения (3.5). Кроме того, так как здесь вырождается некорректное нелинейное ИУВ-1 с ядром, как в случае параграфа 2.1, то регулиризируемость исходной ОЗ понимается в обобщенном смысле в пространстве, которое введется в параграфе 3.1.

Б) ОЗ параграфа 3.2, связана с уравнением Аллера в ограниченной области [3,38,39,41,42,59] и др. Известно, что в некоторых случаях движение жидкости в почве приводит к обобщению диффузной модели влагопереноса [3,39] при этом, когда в отличие от капиллярного потенциала влажности введется потенциал, состоящий из суммы капиллярного потенциала влажности и добавочного члена (эффективный потенциал) [3]:

$$\psi = \psi_0 + A_0 U_t(x,t)\,, \qquad (3.12)$$

где $\psi -$градиент потенциала влаги, $U-$ распределление влаги, $[0,H]\ni x-$ координата, $[0,T]\ni t-$время, $0<A_0 = const$ (для простоты $A_0 = 1$). Тогда, учитывая уравнения неразрывности следует уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[D(U)\frac{\partial U}{\partial x} + A\ \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}], \qquad (3.13)$$

здесь $D(U)-$коэффициент диффузивности, кроме того, пренебрегается влияние гравитации, потенциал которого: $\psi_g = -\rho g x,$ а величина $0<A=const$ (в общем случае A – достаточно гладкая положительная функция).

Чтобы определить распределение влаги в почвенном слое $[0,H]$ для всех времен $[0,T]\ni t$ относительно указанного ДУ (3.13) считается известными
 (классические начально-граничные условия):

а) глубинный ход влажности в начальный момент: $U\big|_{t=0} = \varphi(x), \forall x \in [0,H]$, б) распределение влаги на поверхности почвы при $x = 0$ и $x = H$, т.е.:

$U_x\big|_{x=0} = \phi_1(t); U\big|_{x=H} = \phi_0(t), \forall t \in [0, T],$

где допускаются условия согласования: $\phi_0(0) = \varphi(H), \phi_1(0) = \varphi_x(0).$

Далее, в качестве развития теории этих задач, во многих работах ученых были изучены случаи, где было заменено условие (б) с условием, связывающим значения искомой функции по ее производной по координате x в фиксированных точках $x_j \in [0, H), (j = 1, n),$ (условия нелокального характера), а также рассматривали задачу с различными упрощениями относительно коэффициента диффузивности [3,38,39,41,42,59] и др. При этом в указанных задачах для ДУ (3.13), результаты были в основном получены:

1) когда прямая задача, то результаты в пространствах Банаха, так как, здесь исходная задача редуцируется к ИУ-2 [3,38,39,59] и др.;

2) при изучении ОЗ, так как в некоторых случаях вырождаются ИУВ-1 или ИУВ-3, то регуляризационные алгоритмы были применены в пространствах Банаха, а случае ИУВ-1 и пространстве Гильберта [41,42] и др.

В данной работе, рассматривается нелокальная ОЗ с неоднородным ДУ третьего порядка, т.е.:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\lambda D(U)\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}] = \lambda \frac{\partial U}{\partial t} + f(x)(J\theta)(t), \qquad (3.14)$$

$$\begin{cases} U\big|_{t=0} = \varphi(x), \forall x \in [0, H], \\ U_x\big|_{x=0} = \psi_1(t); U\big|_{x=H} = \psi_0(t), \forall t \in [0, T], \\ \psi_0(0) = \varphi(H), \psi_1(0) = \varphi_x(0), \end{cases} \qquad (3.15)$$

$$U_{x^2}(x_0, t) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i U_x(x_i, t) = g(t), \forall t \in [0, T], (x_0; x_i \in (0, H), D_0 = (0, H) \times (0, T)), \qquad (3.16$$

$$J\theta \equiv \int_0^t K(t, s)\theta^3(s)ds, \qquad (*)$$

при этом неизвестным является вектор функция $P = (U, \theta)$. Так как, относительно функции θ из исходной ОЗ вырождается ИУВ-1:

$$\int_0^t K(t,s)\theta^3(s)ds = F(t), \qquad (3.17)$$

где известные функции: $\lambda = A^{-1}, \lambda_i, (i=1,2); D(U), f(x), \varphi(x), \psi_0(t), \psi_1(t), g(t), F(t)$ изучаемой ОЗ допускают условия:

а$_1$) $0<\lambda, \lambda_i = const; C^2(R) \ni D(U); C[0,H] \ni f(x); C^2[0,H] \ni \varphi(x); \psi_0(t), \psi_1(t), g(t) \in C^1[0,T]$,

а$_2$) $K(t,s) \in C(D_1) \cap Lip(t|L_K), 0<L_K = const; 0 \le K(t,t), K(0,0) \ne 0; |K(.)| \le C_{01}$,

$D_2 = \{(t,s): 0 \le s \le t \le T\}$,

а$_3$) $C[0,T] \ni F(t): F(t) \ge \alpha > 0, \forall t \in [0,T]; |F(t)| \le C_{02} = const$,

причем, при условии (а$_3$) ИУВ-1 (3.17) некорректно поставлено в $C[0,T]$. Значит, регуляризируемость этого ИУВ принимается в $Z^3(0,T)$ обобщенном смысле (см. гл. 1, стр. 17: $p=3$, здесь не учитывается (1.1.15) или см. гл. 2).

Поэтому, в рамках указанных условий, для исследования ОЗ (3.14) - (3.16) применяются МИО, МР в обобщенном смысле в введенном векторном пространстве (см. параграф 3.2), так как решение ИУВ-1 (3.17) связана с ФД.

В параграфе 3.3 исследуется многомерная ОЗ типа влагопереноса, где вырождается некорректное двумерное нелинейное ИУВ-1. Для регуляризации ИУВ-1 в обобщенном смысле, применяются результаты параграфа 2.2.

§3.1. Регуляризация ОЗ гиперболического типа в неограниченной области, где вырождается некорректное ИУВ-1 с неклассическими пределами интегрирования

В этом параграфе изучается нелинейная ОЗ гиперболического типа в неограниченной области, где вырождается некорректное нелинейное ИУВ-1, которое регуляризируется в обобщенном смысле в введенном пространстве. Здесь, чтобы интегрилизировать ОЗ, предлогается специальный вариант МИО, где содержится новая искомая функция, причем на основе ИУ относительно этой функции доказывется однозначной разрешимости исходного ИДУ в пространстве Банаха.

Так как вышеуказана, что из исследуемой ОЗ вырождается некорректное ИУВ-1, где свободный член этого ИУ содержит в себе функцию, которая является решением указанного ИДУ. Значит, на основе выводов решение ИДУ, считается, что свободный член ИУВ-1 известным. Поэтому, естественно, что решение рассматриваемого ИДУ должно оцениваться не только в смысле пространства Банаха, но и по метрике пространств, которые считаются слабыми. А так как, в банаховых пространствах наряду с понятием сильной сходимости, важную роль играет понятие слабой сходимости, то на основе теоремы К Фридрихса ([56] и др., чтобы не повторится, далее скажем просто теоремой Фридрихса не указывая литературу), решение указанного ИДУ оценивается, например и по норме: $\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0),Z^2(0,T)]}(D_0)$,(или $G^2_{[W^2_{K_0(x)}(D_0),Z^2(0,T)]}(D_0)$) (обратно нет). Это значит, что предложенный МИО не только эквивалентно преобразует изучаемые ИДУ к интегральному виду, но и гарантирует выполнения условий классической теоремы о вложениях Фридрихса, что и является закономерным преобразованием, подчинивший в себя один из важных теорем функционального анализа.

Пусть задается ОЗ:

$$V_{t^2}-b^2V_{x^2}+K_0(x)[\Phi(V)+\int_0^t \Psi(t-s)V(s,x-b(t-s))\frac{\partial}{\partial x}[V_s(s,x)-bV_x(s,x)]ds]=$$
$$=(J\theta)(t),\forall(t,x)\in\bar{D}_0, \tag{3.1.1}$$

$$\begin{cases} V(t,x)\big|_{t=0}=0, V(t,x)_t\big|_{t=0}=\psi(x),\forall x\in R, \\ (V_t-bV_x)\big|_{x=x_0}=g(t),\ \forall t\in[0,T],(D_0=(0,T)\times R, x_0\in R), \end{cases} \tag{3.1.2}$$

$$(J\theta)(t)\equiv\lambda\int_0^{M(t)}K(t,\eta)\theta^2(\eta)d\eta \tag{*}$$

с условием согласования

$$(V_t-bV_x)\big|_{t=0}=\psi(x),(g(0)=\psi(x_0)), \tag{3.1.3}$$

при этом относительно известных функций:

$0<b, 0<\lambda<1, (b,\lambda=const); K_0(x)\in C^1(R); \Phi(V)\in C^2(R); \Psi(t)\in C^1[0,T],$

$g(t)\in C^1[0,T], \psi(x)\in C^2(R), M(t), K(t,s)$ имеют место условия:

а) $\sup\left|\Phi_V^{(j)}\right|\le\beta_1, (j=0,1); \Phi_V(V)\in C(R)\cap Lip(V\left|L_{\Phi_V}\right.),$

б) $\left|g^{(j)}(t)\right|\le\beta_2; \left|\Psi^{(j)}(t)\right|\le\beta_3, \forall t\in[0,T], (j=0,1); \left|\psi^{(i)}(x)\right|\le\beta_4, (i=0,1,2),$

в) $\begin{cases} 0\le K_0(x)\le\tilde K_{01}<\infty : \int\limits_R K_0(x)dx\le\tilde K_{02}=const, (\left|K_0'(x)\right|\le\tilde K_{03}=const), \\ \tilde K_0=\max(\tilde K_{01},\tilde K_{02},\tilde K_{03}); \text{например: } K_0(x)\equiv e^{-\beta x^2}\ (\beta>0; \lim\limits_{x\to\pm\infty}K_0(x)=0), \end{cases}$

г) $K(t,s)\in C(D)\cap Lip(t\left|L_K\right.), 0<L_K=const; 0\le K(t,t), K(0,0)\ne 0; \left|K(.)\right|\le C_{01},$

$D=\{(t,s): 0\le s\le t\le T\},$

д) $0\le M(t)\le t\le T, M(0)=0$, $M(t)\in C[0,T]\cap Lip(t\left|L_M\right.), 0<L_M=const.$

Тогда в рамках допускаемых условий, так как вектор функция $\mathrm{P}=(V,\theta)$ является неизвестным, то требуется доказать регуляризируемости ОЗ в обобщенном смысле в введенном пространстве.

§3.1.1. Интегрилизация ОЗ. С этой целью, на основе векторной функции $\mathrm{P}_0=(Q,\theta)$ предположим:

$$\begin{cases} V_t-bV_x=\psi(x-bt)+(\Im[Q,\theta])(t,x),\ (\psi(x_0)=g(0)), \\ \Im[Q,\theta]\equiv\int\limits_0^t[(J\theta)(s)+\int\limits_{x-b(t-s)}^{x}K_0(\tau)Q(s,\tau)d\tau]ds, \end{cases}\tag{3.1.4}$$

при этом имеет место:

$$\begin{cases} V=\int\limits_0^t\psi(x+b(t-s)-bs)ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^s[(J\theta)(s')+\int\limits_{x+b(t-s)-b(s-s')}^{x+b(t-s)}K_0(\tau)Q(s',\tau)d\tau]ds'ds\equiv \\ \equiv(A_0[Q,\theta])(t,x), \\ V_{t^2}-bV_{xt}=-b\psi_l(x-bt)+(J\theta)(t)+b\int\limits_0^t K_0(x-b(t-s))Q(s,x-b(t-s))ds\equiv A_1[Q,\theta], \\ V_{tx}-bV_{x^2}=\psi_l(x-bt)+\int\limits_0^t[K_0(x)Q(s,x)-K_0(x-b(t-s))Q(s,x-b(t-s))]ds\equiv \\ \equiv(A_2Q)(t,x), (l=x-bt), \\ V_{t^2}-b^2V_{x^2}=(J\theta)(t)+\int\limits_0^t K_0(x)Q(s,x)ds. \end{cases}\tag{3.1.5}$$

Тогда, учитывая (3.1.4) и (3.1.5) из исходного ИДУ следует интегральное соотношение:

$$(J\theta)(t)+\int_0^t K_0(x)Q(s,x)ds+K_0(x)\{\Phi((A_0[Q,\theta])(t,x))+\int_0^t \Psi(t-s)(A_0[Q,\theta])(s,x-b(t-s))\times$$
$$\times(A_2Q)(s,x)ds\}=(J\theta)(t)$$

или дифференцируя по t, получим ИУ:

$$\begin{cases} Q(t,x)=-\{\Phi_\rho((A_0[Q,\theta])(t,x))[\psi(x-bt)+\int_0^t b\psi_{l_1}(x+b(t-s)-bs)ds+ \\ +\int_0^t (J\theta)(s)ds+\int_0^t \int_{x-b(t-s)}^{x} K_0(\tau)Q(s,\tau)d\tau ds+\int_0^t \int_0^s [K_0(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s))- \\ -K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds]+\Psi(0)\times \\ \times(A_0[Q,\theta])(t,x)(A_2Q)(t,x)+\int_0^t \Psi_t(t-s)(A_0[Q,\theta])(s,x-b(t-s))\times(A_2Q)(s,x)ds+ \\ +\int_0^t \Psi(t-s)[\int_0^s \{-b\psi_{l_3}(x-b(t-s)+b(s-s')-bs')-b\int_0^{s'} [K_0(x-b(t-s)+b(s-s'))\times \\ \times Q(\tilde{s},x-b(t-s)+b(s-s'))-K_0(x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\tilde{s}))Q(\tilde{s},x-b(t-s)+ \\ +b(s-s')-b(s'-\tilde{s}))]d\tilde{s}\}ds']\times(A_2Q)(s,x)ds\}\equiv(A_3[Q,\theta])(t,x), \\ l_1=x+b(t-s)-bs;\ l_3=x-b(t-s)+b(s-s')-bs';(l_{1t}=b,l_{3t}=-b). \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Так как ИУ (3.1.6) содержит неизвестную векторную функцию $P_0=(Q,\theta)$, то, учитывая условия (3.1.2), (3.1.5) из (3.1.4) имеем следующие интегральные равенства:

$$\begin{cases} \int_0^t (J\theta)(s)=g(t)-\{\psi(x_0-bt)+\int_0^t \int_{x_0-b(t-s)}^{x_0} K_0(\tau)Q(s,\tau)d\tau]ds\}\equiv(BQ)(t,x_0), \\ (A_0[Q,\theta])(t,x)\equiv\int_0^t \psi(x+b(t-s)-bs)ds+\int_0^t (BQ)(s,x_0)ds+ \\ +\int_0^t \int_0^s \int_{x+b(t-s)-b(s-s')}^{x+b(t-s)} K_0(\tau)Q(s',\tau)d\tau ds'ds\equiv(\tilde{A}_0Q)(t,x). \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Поэтому, подставляя (3.1.7) в (3.1.6) следует интегральное выражение:

$$Q(t,x)=-\{\Phi_\rho((\tilde{A}_0Q)(t,x))[\psi(x-bt)+\int_0^t b\psi_{l_2}(x+b(t-s)-bs)ds+(BQ)(t,x_0)+$$
$$+\int_0^t \int_{x-b(t-s)}^{x} K_0(\tau)Q(s,\tau)d\tau ds+\int_0^t \int_0^s [K_0(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s))-K_0(x+ \tag{3.1.8}$$
$$+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds]+\Psi(0)(\tilde{A}_0Q)(t,x)\times$$

$$\times(A_2Q)(t,x)+\int\limits_0^t \Psi_t(t-s)(\tilde{A}_0Q)(s,x-b(t-s))\times(A_2Q)(s,x)ds+\int\limits_0^t \Psi(t-s)\times$$

$$\times[\int\limits_0^s\{-b\psi_{l_4}(x-b(t-s)+b(s-s')-bs')-b\int\limits_0^{s'}[K_0(x-b(t-s)+b(s-s'))Q(\tilde{s},x-b(t-s)+$$
$$+b(s-s'))-K_0(x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\tilde{s}))Q(\tilde{s},x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\tilde{s}))]d\tilde{s}\}\times$$

$$\times ds'](A_2Q)(s,x)ds\}\equiv(AQ)(t,x).$$

Отметим, что предлогаемый вариант МИО (3.1.4), с учетом (3.1.7), который имеет вид:

$$V_t-bV_x=\psi(x-bt)+(BQ)(t,x_0)+\int\limits_0^t\int\limits_{x-b(t-s)}^x K_0(\tau)Q(s,\tau)d\tau ds\equiv(\tilde{\Im}Q)(t,x)\,, \qquad (3.1.4)^*$$

где относительно искомой функции следует:

$$V=(\tilde{A}_0Q)(t,x), \qquad (3.1.9)$$

при этом служит полной интегрилизацией нелинейного ИДУ (3.1.1), т.е. ИДУ редуцируется к нелинейному ИУВ-2 (3.1.8) по переменной $t\in[0,T]$. Достоинством разработанного МИО является тот факт, что решение ИДУ сводится к решению ИУВ-2, для которого хорошо развиты теория исследований.

В самом деле, для доказательства последнего предложения, воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3.1.1. Пусть оператор A допускает условия:

$$\begin{cases} A: L_A<1, \\ \|AQ_0\|_C\le r(1-L_A). \end{cases} \qquad (3.1.10)$$

Тогда ИУ (3.1.8) однозначно разрешимо в $C(\bar{D}_0)$ при этом следует, что $Q_x\in C(\bar{D}_0)$. Поэтому, на основе (3.1.9) функция V существует единственным образом в $C^{2,2}(\bar{D}_0)$.

Доказательство. В самом деле, при условии (3.1.10) оператор A является сжимающим, причем имеют место неравенства:

$$\begin{cases} S_r(Q_0)=\{Q: |Q-Q_0|\le r, \forall (t,x)\in \bar D_0\}, \\ \|AQ_0\|_C \le r(1-L_A): \\ \|AQ-Q_0\|_C = \|AQ-Q_0-AQ_0+AQ_0\| \le \|AQ-AQ_0\|+\|AQ_0-Q_0\| \le L_A r + r(1-L_A)=r, \\ L_A=\beta_1[\frac{1}{2}\tilde K_0 bT^2+\tilde K_0(1+T)T]+L_{\Phi_\rho}[\beta_4(2+bT)+\beta_2+\frac{1}{2}br_0\tilde K_0T^2+r_0T\tilde K_0(1+T)]\times \\ \times\frac{1}{2}\tilde K_0T^2[1+\frac{1}{3}bT]+\beta_3[(\frac{1}{6}b\tilde K_0T^3+\frac{1}{2}\tilde K_0T^2)(\beta_4+2r_0\tilde K_0T)+2\tilde K_0T(\beta_4T+T(\beta_2+\beta_4+ \\ +\frac{1}{2}r_0b\tilde K_0T^2))]+\beta_3T[2\tilde K_0T(\beta_4T+T(\beta_2+\beta_4+\frac{1}{2}r_0b\tilde K_0T^2))+(\beta_4+2r_0\tilde K_0T)(\frac{1}{6}b\tilde K_0T^3+ \\ +\frac{1}{2}\tilde K_0T^2)]+\beta_3T[\frac{1}{3}b\tilde K_0T^3(\beta_4+2r_0\tilde K_0T)+2\tilde K_0T(b\beta_4T+\frac{1}{3}br_0\tilde K_0T^3)]<1, \\ |Q|\le r_0, \forall (t,x)\in \bar D_0, \end{cases}$$

т.е.:

$$A: S_r(0)\to S_r(0), \tag{3.1.11}$$

а это значит, что для (3.1.8) реализуются условия принципа Банаха. Поэтому, действительно это ИУ однозначно разрешимо в $C(\bar D_0)$.

Кроме того, чтобы доказать равномерной ограниченности функции Q_x, сперва, дифференцируем (3.1.8) по *x*, а далее, оценим это выражение. Для этого, введя обозначение:

$$\begin{cases} Q_x(t,x)\equiv U(t,x), \\ \frac{\partial}{\partial x}(\tilde A_0 Q)(t,x)\equiv \int\limits_0^t \{\psi_{l_1}(x+b(t-s)-bs)+\int\limits_0^s [K_0(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s))- \\ -K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'\}ds \equiv (\tilde A_{01}Q)(t,x), \\ \frac{\partial}{\partial x}(A_2Q)(t,x)=\psi_{l^2}(x-bt)+\int\limits_0^t [K_{0x}(x)Q(s,x)+K_0(x)U(s,x)-K_{0l_2}(x-b(t-s))\times \\ \times Q(s,x-b(t-s))-K_0(x-b(t-s))U(s,x-b(t-s))]ds \equiv (\tilde A_{02}[Q,U])(t,x), \end{cases} \tag{3.1.12}$$

и учитывая функцию Q_x, на основе дифференцирование (3.1.8) по *x* имеем

$$\begin{cases} Q_x(t,x)\equiv U(t,x), \\ U(t,x)=-\{\Phi_{\rho\rho}((\tilde A_0Q)(t,x))(\tilde A_{01}Q)(t,x)[\psi(x-bt)+\int\limits_0^t b\psi_{l_1}(x+b(t-s)- \\ -bs)ds+(BQ)(t,x_0)+\int\limits_0^t \int\limits_{x-b(t-s)}^x K_0(\tau)Q(s,\tau)d\tau ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^s [K_0(x+b(t-s))\times \\ \times Q(s',x+b(t-s))-K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]\times \end{cases} \tag{3.1.13}$$

$$
\begin{cases}
\times ds'ds] + \Phi_{\rho}((\tilde{A}_0 Q)(t,x))[\psi_l(x-bt) + \int\limits_0^t b\psi_{l_1 l_1}(x+b(t-s)-bs)ds + \\
+\int\limits_0^t [K_0(x)Q(s,x) - K_0(x-b(t-s))Q(s,x-b(t-s))]ds + \int\limits_0^t \int\limits_0^s [K_{0l_2}(x+b(t-s))\times \\
\times Q(s',x+b(t-s)) + K_0(x+b(t-s))U(s',x+b(t-s)) - K_{0l_3}(x+b(t-s)- \\
-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s')) - K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))U(s',x+ \\
+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds] + \Psi(0)[(\tilde{A}_{01}Q)(t,x)(A_2 Q)(t,x) + (\tilde{A}_0 Q)(t,x)\times \\
\times(\tilde{A}_{02}[Q,U])(t,x)] + \int\limits_0^t \Psi_t(t-s)[(\tilde{A}_{01}Q)(s,x-b(t-s))(A_2 Q)(s,x)ds + \\
+(\tilde{A}_0 Q)(s,x-b(t-s))(\tilde{A}_{02}[Q,U])(s,x)]ds + \int\limits_0^t \Psi(t-s)[\int\limits_0^s \{-b\psi_{l_3 l_3}(x-b(t-s)+ \\
+b(s-s')-bs') - b\int\limits_0^{s'} ([K_{0l_5}(x-b(t-s)+b(s-s'))Q(\tilde{s},x-b(t-s)+b(s-s')) + \\
+K_0(x-b(t-s)+b(s-s'))U(\tilde{s},x-b(t-s)+b(s-s')) - K_{0l_6}(x-b(t-s)+b(s-s')- \\
-b(s'-\tilde{s}))Q(\tilde{s},x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\tilde{s})) - K_0(x-b(t-s)+b(s-s')- \\
-b(s'-\tilde{s}))U(\tilde{s},x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\tilde{s}))]d\tilde{s})ds'](A_2 Q)(s,x)ds + \int\limits_0^t \Psi(t-s)\times \\
\times[-b\int\limits_0^s \int\limits_0^{s'} [K_0(x-b(t-s)+b(s-Q)(s,x)s'))Q(\tilde{s},x-b(t-s)+b(s-s')) - K_0(x- \\
-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\tilde{s}))Q(\tilde{s},x-b(t-s)+b(s-s')-b(s'-\tilde{s}))]d\tilde{s}ds']\times \\
\times(\tilde{A}_{02}[Q,U])(s,x)ds\} \equiv (\tilde{A}[Q,U])(t,x).
\end{cases}
$$

Тогда, с учетом (3.1.13) функция $Q_x \equiv U$ допускает оценку:

$$
\begin{cases}
\|U(t,x)\|_C \le (1-L_{\tilde{A}})^{-1}[T_0 + C_0\|Q\|_C] \le (1-L_{\tilde{A}})^{-1}[T_0 + C_0 r_0] = \tilde{r}_0, \\
0 < L_{\tilde{A}} < 1,
\end{cases}
\tag{3.1.14}
$$

где $0 < T_0 = const$ наибольшее значение суммы всех членов с известными функциями. Значит, в самом деле функция $Q_x \equiv U$ ограничена в смысле $C(\bar{D}_0)$.

Далее, на основе доказанных условий леммы 3.1.1 и с учетом (3.1.9) можем сказать, что и функция V однозначным образом определяется в $C^{2,2}(\bar{D}_0)$, так как функции: $V, V_t, V_x, V_{t^2}, V_{x^2}, V_{tx}$ связаны с функциями: $Q, Q_x \equiv U$.

В самом деле, относительно функции V учитывая частные производные по совокупности аргументов, имеем:

$$
\begin{cases}
V=(\tilde{A}_0Q)(t,x)=\int\limits_0^t\{\psi(x+b(t-s)-bs)+(BQ)(s,x_0)+\int\limits_0^s\int\limits_{x+b(t-s)-b(s-s')}^{x+b(t-s)}K_0(\tau)\times\\
\times Q(s',\tau)d\tau ds'\}ds,\\
V_t=\psi(x-bt)+(BQ)(t,x_0)+\int\limits_0^t b\psi_{l_1}(x+b(t-s)-bs)ds+\int\limits_0^t\int\limits_{x-b(t-s')}^{x}K_0(\tau)\times\\
\times Q(s',\tau)d\tau ds'+\int\limits_0^t\int\limits_0^s b[K_0(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s))-K_0(x+b(t-s)-\\
-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds,\\
V_x=\int\limits_0^t\psi_{l_1}(x+b(t-s)-bs)ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^s[K_0(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s))-\\
-K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds,\\
V_{t^2}=\int\limits_0^t b^2\psi_{l_1l_1}(x+b(t-s)-bs)ds+\{g'(t)+b\psi_l(x_0-bt)-\int\limits_0^t bK_0(x_0-\\
-b(t-s))Q(s,x_0-b(t-s))ds\}+b\int\limits_0^t K_0(x-b(t-s'))Q(s',x-b(t-s'))ds'+\\
+\int\limits_0^t b[K_0(x)Q(s',x)-K_0(x-b(t-s'))Q(s',x-b(t-s'))]ds'+\int\limits_0^t\int\limits_0^s b^2[K_{0l_2}(x+\\
+b(t-s))Q(s',x+b(t-s))+K_0(x+b(t-s))U(s',x+b(t-s))-K_{0l_3}(x+b(t-s)-\\
-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))-K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))U(s',x+\\
+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds,\\
V_{x^2}=\int\limits_0^t\psi_{l_1l_1}(x+b(t-s)-bs)ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^s[K_{0l_2}(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s))+K_0(x+\\
+b(t-s))U(s',x+b(t-s))-K_{0l_3}(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))-\\
-K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))U(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds,\\
V_{tx}=\psi_l(x-bt)+\int\limits_0^t b\psi_{l_1l_1}(x+b(t-s)-bs)ds+\int\limits_0^t[K_0(x)Q(s',x)-K_0(x-b(t-s'))\times\\
\times Q(s',x-b(t-s'))]ds'+\int\limits_0^t\int\limits_0^s b[K_{0l_2}(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s))+K_0(x+b(t-s))\times\\
\times U(s',x+b(t-s))-K_{0l_3}(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))-\\
-K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))U(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds.
\end{cases}
\tag{3.1.15}
$$

Из формулы (3.1.15) видно, что правая сторона всех функций:

$$V, V_t, V_x, V_{t^2}, V_{x^2}, V_{tx},$$

связаны с функциями $Q, Q_x \equiv U$. А это означает, что все указанные функции: $V, V_t, V_x, V_{t^2}, V_{x^2}, V_{tx}$ будут ограниченными для любого $(t,x)\in\bar{D}_0$ (равномерно), так как эти оценки связаны с условиями леммы 3.1.1 и (3.1.14). Следовательно, функция V однозначным образом определяются в $C^{2,2}(\bar{D}_0)$ и допускает оценку в смысле нормы $C^{2,2}(\bar{D}_0)$, т.е.:

$$\|V\|_{C^{2,2}(\bar{D}_0)} = \sum_{j=0}^{2}\|V_{x^j}^{(j)}\|_{C(\bar{D}_0)} + \sum_{j=1}^{2}\|V_{t^j}^{(j)}\|_{C(\bar{D}_0)} \le N_0 = const. \qquad (**)$$

ЧиТД.

Примечание 3.1.1. Если бы, исследовали прямую задачу с известным со свободным членом, то результаты леммы 3.1.1 были бы достаточными для разрешимости изучаемой прямой задачи в указанном пространстве с нормой (**). Но здесь, так как из рассматриваемой ОЗ вырождается некорректное ИУВ-1, решение которого связано с ФД, то необходимо пространство со слабой сходимостью и для искомого решения ИДУ (3.1.1).

С этой целью, так как в банаховых пространствах наряду с понятием сильной сходимости, важную роль играет понятие слабой сходимости, то на основе условия леммы 3.1.1, с учетом теоремы К. Фридрихса можно относительно функции V вести пространство:

A_1) в $\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0)$ (обратно нет) или

A_2) в $W^2_{K_0(x)}(D_0)$ (обратно нет),

и получить оценки в этих пространствах, учитывая ограничения относительно функций Q, U :

$$|Q| \le r_0; |U| \le \tilde{r}_0, \forall(t,x) \in \bar{D}_0. \qquad (3.1.16)$$

Здесь, в случае (A_1): $\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0) = \{(t,x) \in \bar{D}_0 : V \in C^{1,2}(\bar{D}_0), V_{t^2} \in L^2_{K_0(x)}(D_0)\}$

с нормой

$$\begin{cases} \|V\|_{\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0)} = \|V\|_{C^{1,2}(\bar{D}_0)} + \|V_{t^2}\|_{L^2_{K_0(x)}(D_0)} \le N_0, \\ \|V_{t^2}(t,x)\|_{L^2_{K_0}} = (\int\limits_{D_0} K_0(\tau)|V_{\tau^2}(s,\tau)|^2 d\tau ds)^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \qquad (3.1.17)$$

а в случае (A_2), норма определяется в виде (в общем, интегралы понимаются в смысле Лебега):

$$\|V\|_{W^2_{K_0}(D_0)}=\Bigg[\int\limits_{D_0} K_0(\tau)|V(s,\tau)|^2\,d\tau ds+\int\limits_{D_0} K_0(\tau)|V_s(s,\tau)|^2 d\tau ds+\int\limits_{D_0} K_0(\tau)\times$$

$$\times|V_\tau(s,\tau)|^2\,d\tau ds+\int\limits_{D_0} K_0(\tau)|V_{\tau s}(s,\tau)|^2 d\tau ds+\int\limits_{D_0} K_0(\tau)|V_{s^2}(s,\tau)|^2 d\tau ds+ \qquad (3.1.18)$$

$$+\int\limits_{D_0} K_0(\tau)|V_{\tau^2}(s,\tau)|^2\,d\tau ds\Bigg]^{\frac{1}{2}}\le N_*.$$

Если вместо (3.1.16) требуем, что Q,W ограничены в $L^2_{K_0}(D_0)$, т.е.:

$$\begin{cases}\|Q(t,x)\|_{L^2_{K_0}}=(\int\limits_{D_0} K_0(\tau)|Q(s,\tau)|^2 d\tau ds)^{\frac{1}{2}}\le N_{01}=const,\\ \|U(t,x)\|_{L^2_{K_0}}=(\int\limits_{D_0} K_0(\tau)|U(s,\tau)|^2 d\tau ds)^{\frac{1}{2}}\le N_{02}=const,\end{cases} \qquad (3.1.19)$$

то и функции: $V,V_t,V_x,V_{t^2},V_{x^2},V_{tx}$ будут ограничены в смысле $\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0)$.

Аналогично доказываются, что функции: $V,V_t,V_x,V_{t^2},V_{x^2},V_{tx}$ будут ограничены и в смысле $W^2_{K_0(x)}(D_0)$, так как правая сторона этих функций (см.(3.1.15)) связаны с функциями Q,U, которые ограничены в $L^2_{K_0}(D_0)$. ЧиТП.

С другой стороны, так как решением исследуемой ОЗ является вектор-функция $P=(V,\theta)$, то регуляризируемость этой задачи, достаточно доказать, например, в векторном пространстве $\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0),Z^2(0,T)]}(D_0)$ в обобщенном смысле с учетом (3.1.17) с нормой:

$$\|P\|_{\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0);Z^2(0,T)]}}=\|V\|_{\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0)}+\|\theta\|_{Z^2(0,T)}. \qquad (3.1.20)$$

С этой целью, сперва, должны доказать регуляризируемости некорректного ИУВ-1, которое вырождается из исходной ОЗ.

§3.1.2. Регуляризация ИУВ-1. Так как в первом пункте относительно функции V доказали лемму 3.1.1, то с учетом (3.1.7) и (*), на основе дифференцирования по t, следует некорректное нелинейное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД, т.е.:

$$(J\theta)(t) \equiv \lambda \int\limits_0^{M(t)} K(t,\eta)\theta^2(\eta)d\eta = F(t), \tag{3.1.21}$$

где известные функции удовлетворяют условия:

$$\begin{cases} F(t) \equiv g'(t) - \{-b\psi_l(x_0 - bt) + b\int\limits_0^t [K_0(x_0 - b(t-s))Q(s, x_0 - b(t-s))]ds\}, \\ F(t) \in C[0,T] \cap Lip(t\left|L_F\right.); F(t) \geq \alpha > 0, \forall t \in [0,T]; \left|F(t)\right| \leq C_{02} = const, \end{cases} \tag{3.1.22}$$

и (г, д). При этом, чтобы доказать регуляризируемости ИУ (3.1.21) в $Z^2(0,T)$ воспользуемся методом параграфа 2.1 (см. главу 2), т.е. преобразуем (3.1.21) к виду:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t h(\tau)\theta(\tau)d\tau = (H\theta)(t) + F(t), \\ H\theta \equiv \int\limits_0^t h_0(\tau)\theta(\tau)(J\theta)(\tau)d\tau - (J\theta)(t), \end{cases} \tag{3.1.23}$$

где известные функции, содержащиеся в (3.1.23) определяются, как в случае леммы 2.1.1, т.е.:

$$\begin{cases} h(t) \equiv [\gamma + \dfrac{1}{\alpha}\lambda(t)]F(t) \geq m > 0, (1 < \gamma = const), \\ h_0(t) \equiv \gamma + \dfrac{1}{\alpha}\lambda(t); 0 \leq \lambda(t) \in L^1(0,T), \\ \phi_0(t) = \int\limits_0^t [\gamma + \dfrac{1}{\alpha}\lambda(\tau)]F(\tau)d\tau = \int\limits_0^t h(\tau)d\tau, \\ h_0(t) \leq \alpha^{-1}h(t); 0 < \max C_{0j} = C_1, (j = 1,2); F_0(t) \equiv F(t) - F(0); F_0(0) = 0, \\ \left|F_0(t) - F_0(\tau)\right| \leq L_{F_0} M_0(\phi_0(t) - \phi_0(\tau)), (\tau \leq t; \gamma > 1; M_0 = \dfrac{1}{\gamma\alpha}), \\ t \in [0,T]: \quad t = (t^{\frac{2}{7}})^{\frac{7}{2}} \leq (\phi_0(t))^{\frac{7}{2}}, (\lambda(t) = \dfrac{2}{7\sqrt[7]{t^5}}), \\ t \leq M_1(\phi_0(t))^2, (M_1 = \sup\limits_{[0,T]}(\phi_0(t))^{\frac{3}{2}}). \end{cases} \tag{3.1.24}$$

Поэтому, наряду с ИУ (3.1.23) введется уравнение с малым параметром ε:

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_{\varepsilon}(t) + (\Phi\,\theta_{\varepsilon})(t) = F_{\varepsilon}(t), \\ (\Phi\,\theta_{\varepsilon})(t) \equiv \int\limits_0^t h(\tau)\theta_{\varepsilon}(\tau)d\tau - (H\theta_{\varepsilon})(t), \end{cases} \tag{3.1.25}$$

и решение этого уравнения представляется по правилу:

$$\begin{cases} \theta_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi_{\varepsilon}(t) + \upsilon(t) + \xi_{\varepsilon}(t), \\ \Pi_{\varepsilon}(0) = F(0), \quad \upsilon(0) = 0, \quad \xi_{\varepsilon}(0) = 0. \end{cases} \tag{3.1.26}$$

Тогда, на основе (3.1.25) неизвестные функции: $\Pi_{\varepsilon}(t), \upsilon(t), \xi_{\varepsilon}(t)$ определяются из системы:

$$\begin{cases} \Pi_{\varepsilon}(t) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(\tau)\Pi_{\varepsilon}(\tau)\,d\tau + F(0), \\ \int\limits_0^t \ h(\tau)\upsilon(\tau)\,d\tau = (H\upsilon)(t) + F_0(t), \\ \varepsilon\xi_{\varepsilon} + \int\limits_0^t \ h(\tau)\xi_{\varepsilon}(\tau)\,d\tau = (H[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_{\varepsilon} + \upsilon + \xi_{\varepsilon}])(t) - (H\upsilon)(t) + F_{\varepsilon}(t) - F(t) - \varepsilon\upsilon(t). \end{cases} \tag{3.1.27}$$

Лемма 3.1.2. Если допускаются условия леммы 3.1.1 и ((г,д), (3.1.22)), то относительно системы (3.1.27) имеют место:

А) $$\Pi_{\varepsilon}(t) = F(0)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)), \tag{3.1.28}$$

с оценкой

$$\left|\Pi_{\varepsilon}(t)\right| \le C_1 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)); \tag{3.1.29}$$

Б) решение параметризированного ИУ

$$\delta\upsilon_{\delta}(t) + \int\limits_0^t \ h(\tau)\upsilon_{\delta}(\tau)\,d\tau = (H\upsilon_{\delta})(t) + F_0(t) \tag{3.1.30}$$

равномерно сходится к решению второго уравнения системы (3.1.27) при $\delta \to 0$, так как указанное ИУ имеет решение в $C[0,T]$;

В) третье ИУ системы (3.1.27) однозначно разрешимо в $C[0,T]$, причем равномерно сходится к нулю, когда $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. А) В самом деле, так как существует резольвента:

$$R(t,\tau,\varepsilon) \equiv -\frac{1}{\varepsilon}h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t} h(s)ds), (\tau \le t), \tag{3.1.31}$$

то из первого ИУ системы (3.1.27) следует (3.1.28). Причем функция $\Pi_{\varepsilon}(t)$ определяется однозначно из (3.1.28). Поэтому и следует оценка (3.1.29).

Б) Проверим, второе условие леммы 3.1.2, т.е. условие относительно функции $\upsilon_{\delta}(t) \in C[0,T]$. Для этого на основе условий ((г,д), (3.1.22), (3.1.24)) покажем, что второе ИУ системы (3.1.27) регуляризируемо в $C[0,T]$.

В самом деле, учитывая резольвенту (3.1.29) ИУ (3.1.30) с малым параметром $\delta \in (0,1)$ преобразуется к виду

$$\upsilon_{\delta} = -\frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\delta}\int\limits_s^t h(s')ds')\{(H\upsilon_{\delta})(s) - (H\upsilon_{\delta})(t) + F_0(s) - F_0(t)\}ds + \tag{3.1.32}$$

$$+\frac{1}{\delta}(\exp(-\frac{1}{\delta}\int\limits_0^t h(s')ds'))\{(H\upsilon_{\delta})(t) + F_0(t)\} = -\frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(t) - \phi_0(\tau))\times$$

$$\times\lambda\{\int\limits_0^{\tau} h_0(\tilde{\tau})\upsilon_{\delta}(\tilde{\tau})\int\limits_0^{M(\tilde{\tau})} K(\tilde{\tau},\bar{\tau})\upsilon_{\delta}^2(\bar{\tau})d\bar{\tau}d\tilde{\tau} - \int\limits_0^{t} h_0(\tilde{\tau})\upsilon_{\delta}(\tilde{\tau})\int\limits_0^{M(\tilde{\tau})} K(\tilde{\tau},\bar{\tau})\upsilon_{\delta}^2(\bar{\tau})d\bar{\tau}d\tilde{\tau} -$$

$$-\int\limits_0^{M(\tau)} K(\tau,\bar{\tau})\upsilon_{\delta}^2(\bar{\tau})d\bar{\tau} + \int\limits_0^{M(t)} K(t,\bar{\tau})\upsilon_{\delta}^2(\bar{\tau})d\bar{\tau}\}d\tau + \frac{1}{\delta}\lambda\{\int\limits_0^{t} h_0(\tau)\upsilon_{\delta}(\tau)\int\limits_0^{M(\tau)} K(\tau,\bar{\tau})\times$$

$$\times\upsilon_{\delta}^2(\bar{\tau})d\bar{\tau}d\tau - \int\limits_0^{M(t)} K(t,\tau)\upsilon_{\delta}^2(\tau)d\tau\}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(t)) + \Delta_1(F_0,\delta) \equiv P\upsilon_{\delta})(x),$$

где

$$\Delta_1(F_0,\delta) \equiv -\frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\delta}\int\limits_s^t h(s')ds')\{F_0(s) - F_0(t)\}ds + \frac{1}{\delta}F_0(t)\times$$

$$\times\exp(-\frac{1}{\delta}\int\limits_0^t h(s')ds). \tag{3.1.33}$$

Уравнение (3.1.32) является ИУВ-2, причем она регулярно относительно малого параметра, т. е ограничена в смысле нормы пространства $C[0,T]$.

Действительно, так как относительно (3.1.33) имеют место:

$$\begin{cases} \left|\Delta_1(F_0,\delta)\right| \le \left| \dfrac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(s)))L_{F_0}(t-s)ds + \right. \\ +L_{F_0}\dfrac{t}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(t)) \le \dfrac{1}{\alpha\gamma}L_{F_0}\int\limits_0^t \exp(-\dfrac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(s)))\dfrac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(s))\times \\ \times d(-\dfrac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(s))) + L_{F_0}M_1\delta(\dfrac{1}{\delta}\phi_0(t))^2\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(t)) \le \\ \le L_{F_0}[\dfrac{1}{\alpha\gamma}+2^2e^{-2}M_1\delta] \le L_0, \\ \int\limits_0^\infty e^{-z}zdz = 1; 0 < L_P = 4\lambda\{C_1r_1(M_0L_M + \dfrac{1}{\alpha}Tr_1) + L_KTM_0r_1\} < 1, \\ P: S_{r_1}(0) \to S_{r_1}(0) = \left\{\upsilon_\delta(t) \in C[0,T]: \left|\upsilon_\delta(t)\right| \le r_1, \forall t \in [0,T]\right\}, \\ \rho \equiv \dfrac{1}{\delta}\phi_0(t); \chi(\rho) \equiv \rho^k\exp(-\rho); \sup\limits_{\rho\ge 0}\chi(\rho) = k^k\exp(-k), \\ \rho = 0: \chi(0) = 0; \rho \to \infty: \chi \to 0, (k=1,2), \end{cases} \tag{3.1.34}$$

то из оценки уравнения (3.1.32) получим

$$\|\upsilon_\delta\|_C \le (1-L_P)^{-1}L_0 = N_0, \tag{3.1.35}$$

где L_P –коэффициент Липшица оператора P .

Поэтому, не нарушая хронологию исследований предположим

$$\upsilon_\delta = \upsilon(t) + \mu_\delta(t), \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.36}$$

Тогда, подставляя (3.1.36) в (3.1.32), относительно остаточного члена имеем ИУ, а далее на основе резольвенты (3.1.31), полученное уравнение преобразуется к ИУ:

$$\begin{cases} \mu_\delta = -\dfrac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\int\limits_s^t h(s')ds')\{(H[\upsilon+\mu_\delta])(s) - (H\upsilon)(s) - (H[\upsilon+\mu_\delta])(t) + \\ +(H\upsilon)(t) - \delta(\upsilon(s)-\upsilon(t))\}ds + \dfrac{1}{\delta}\{(H[\upsilon+\mu_\delta])(t) - (H\upsilon)(t)\}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\int\limits_0^t h(s)ds) - \\ -\upsilon(x)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\int\limits_0^t h(s)ds) \equiv (\tilde{P}\mu_\delta)(t) + \Delta(\upsilon,\delta) \equiv (P_0\mu_\delta)(t), \\ \Delta(\upsilon,\delta) \equiv -\dfrac{1}{\delta}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\int\limits_s^t h(s')ds')\{-\upsilon(s)+\upsilon(t)\}ds - \upsilon(t)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\int\limits_0^t h(s)ds). \end{cases} \tag{3.1.37}$$

Предположим

$$\begin{cases} \left\|\Delta(\upsilon,\delta)\right\|_C \le 3\left\|\upsilon(t)\right\|_C \exp\left(-\dfrac{1}{\delta^{1-\beta}}\right) + \omega_{\bar{\upsilon}}\left(\delta^{\beta}\right), (0<\beta<1), \\ \omega_{\bar{\upsilon}}\left(\delta^{\beta}\right) = \sup\left\{\left|\upsilon\left(\phi_0^{-1}(t)\right) - \upsilon\left(\phi_0^{-1}(s)\right)\right|; \left|t-s\right| \le \delta^{\beta}\right\}, \left|\upsilon\right| \le \tilde{r}_1, \forall t\in[0,T], \\ S_{r_2}(0) = \{\mu_\delta : \ \left|\mu_\delta\right| \le r_2, \forall t\in[0,T]\}, \\ 0 < L_{P_0} = \lambda\{C_1[(2\tilde{r}_1 + r_2)(2M_0L_M + \dfrac{1}{\alpha}2T\tilde{r}_1) + \dfrac{1}{\alpha}2T(\tilde{r}_1+r_2)^2] + TM_0L_K(2\tilde{r}_1+r_2)\} < 1, \end{cases} \tag{3.1.38}$$

где $\omega_{\bar{\upsilon}}\left(\delta^{\beta}\right)$ – модуль непрерывности, а $\phi_0^{-1}(t)$ - обратная к функции: $\phi_0(t) = \int\limits_0^t h(s)\,ds$. Тогда из ИУ (3.1.37) получим

$$\begin{cases} \left\|\mu_\delta(t)\right\|_C \le \left(1-L_{P_0}\right)^{-1} \left\|\Delta(\upsilon,\delta)\right\|_C, \\ P_0 : S_{r_2}(0) \to S_{r_2}(0). \end{cases} \tag{3.1.39}$$

Кроме того, если для любого

$$\delta \in (0,\delta_0], \delta_0 = \left(\ln\left(6\left(1-L_{P_0}\right)^{-1}\right)\right)^{-\frac{1}{1-\beta}}, \tag{3.1.40}$$

то, с учетом (3.1.36) получим оценку

$$\begin{cases} \left\|\upsilon_\delta(t) - \upsilon(t)\right\|_C \le \left(1-L_{P_0}\right)^{-1} \left\|\Delta(\upsilon,\delta)\right\|_C \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0, \\ \left\|\upsilon(t)\right\|_C = \left\|\upsilon(t) - \upsilon_\delta(t) + \upsilon_\delta(t)\right\|_C \le \left(1-L_{P_0}\right)^{-1} \left\|\Delta(\upsilon,\delta)\right\|_C + N_0, \\ \text{или} \quad \left\|\upsilon(t)\right\|_C \le (1-d)^{-1}[N_0 + \left(1-L_{P_0}\right)^{-1} \omega_{\bar{\upsilon}}\left(\delta^{\beta}\right)] \le \tilde{r}_1, \\ d = 3\left(1-L_{P_0}\right)^{-1} \exp\left(-\dfrac{1}{\delta^{1-\beta}}\right) < 1, \end{cases} \tag{3.1.41}$$

причем, когда $\delta \to 0$ из (3.1.41) следует: $\upsilon_\delta(t) \xrightarrow[\delta\to 0]{} \upsilon(t), \forall t\in[0,T]$, т.е. действительно, второе ИУ системы (3.1.27) регуляризируемо в $C[0,T]$. Это значит, что относительно $\upsilon(t)$ выполняется второе условие леммы 3.1.2. ЧиТД.

В) Далее, покажем, что относительно функции $\xi_\varepsilon(t)$ имеют место аналогичные результаты, как в случае (3.1.39), (или третье условие леммы 3.1.2). С этой целью, рассматривая третье ИУ относительно $\xi_\varepsilon(t)$ из системы (3.1.27), на основе резольвенты (3.1.31) следует

$$\xi_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t h(s')ds')\{(H[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(s)-(H\upsilon)(s)-$$
$$-(H[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(t)+(H\upsilon)(t)\}ds+\frac{1}{\varepsilon}\{(H[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(t)-(H\upsilon)(t)\}\times \tag{3.1.42}$$
$$\times\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t h(s')ds')+\Delta_2(F_\varepsilon,F,\varepsilon)+\Delta_*(\upsilon,\varepsilon)\equiv(P_1\xi)(t),$$

где выражения $\Delta(.),\Delta_2(.)$ определяются:

$$\begin{cases}\Delta_*(\upsilon,\varepsilon)\equiv-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t h(s)(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t h(s')ds'))(-\upsilon(s)+\upsilon(t))ds-\upsilon(t)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t h(s')ds'),\\ \Delta_2(F_\varepsilon,F,\varepsilon)\equiv-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t h(s)(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t h(s')ds'))(F_\varepsilon(s)-F(s))ds+\frac{1}{\varepsilon}(F_\varepsilon(t)-F(t)).\end{cases}$$

Если будет иметь место:

$$\begin{cases}L_{P_1}<1,\\ P_1:S_{r_3}(0)\to S_{r_3}(0)=\{\xi_\varepsilon:\ \ |\xi_\varepsilon|\le r_3,\forall t\in[0,T]\},\end{cases}$$

то уравнение (3.1.42) однозначно разрешимо в $C[0,T]$.

В самом деле, при оценках выражений, где содержится $\xi_\varepsilon(t)$, получим:

$$\begin{cases}a_1)\Big|\ \frac{1}{\varepsilon}(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))\lambda\{\int_0^{M(t)}K(t,\tau)[2\upsilon(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)+\xi_\varepsilon^2(\tau)+2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)]d\tau+\\ +\int_0^t h_0(\tau)\upsilon(\tau)\int_0^{M(\tau)}K(\tau,\bar\tau)[2\upsilon(\bar\tau)\xi_\varepsilon(\bar\tau)+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau)+2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)\xi_\varepsilon(\bar\tau)]d\bar\tau d\tau\}\ \Big|\le\\ \le\lambda\{C_1M_0L_Me^{-1}(2\tilde r_1+r_3)+L_MM_1e^{-2}C_1^2+\frac{1}{\alpha}TC_1e^{-1}\tilde r_1(2\tilde r_1+r_3)+\frac{1}{\alpha}2M_0\tilde r_1C_1^2\}\times\\ \times\|\xi_\varepsilon(t)\|_C=d_1\|\xi_\varepsilon(t)\|_C;\\ \Big|\ \frac{1}{\varepsilon^3}(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))\lambda\{\int_0^t h_0(\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)\int_0^{M(\tau)}K(\tau,\bar\tau)[(2\upsilon(\bar\tau)\xi_\varepsilon(\bar\tau)+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau))\varepsilon+\\ +2\Pi_\varepsilon(\bar\tau)\xi_\varepsilon(\bar\tau)]d\bar\tau d\tau+\int_0^t h_0(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)\int_0^{M(\tau)}K(\tau,\bar\tau)[(\upsilon(\bar\tau)+\xi_\varepsilon(\bar\tau))\varepsilon+\Pi_\varepsilon(\bar\tau)]^2\times\\ \times d\bar\tau d\tau\}\ \Big|\le\lambda\{\sqrt{\varepsilon}L_M\tilde h_0C_1^2(\frac{7}{2}e^{-1})^{\frac{7}{2}}[(2\tilde r_1+r_3)\varepsilon+2C_1]+\frac{1}{\alpha}\sqrt{\varepsilon}C_1L_M\tilde h_0(\frac{7}{2}e^{-1})^{\frac{7}{2}}]\times\\ \times[(\tilde r_1+r_3)\varepsilon+C_1]^2\}\|\xi_\varepsilon(t)\|_C=d_2\|\xi_\varepsilon(t)\|_C,\\ a_2)\Big|\ \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t h(s)(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(t)-\phi_0(s))\lambda\{\int_0^{M(s)}(K(t,\tau)-K(s,\tau))[2\upsilon(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)+\end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
+\xi_\varepsilon^2(\tau)+2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)]d\tau+\int\limits_{M(s)}^{M(t)}K(t,\tau[2\upsilon(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)+\xi_\varepsilon^2(\tau)+2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)\times \\
\times\xi_\varepsilon(\tau)]d\tau\}ds\ \ \Big|\le\lambda\{L_K M_0 C_1(2\tilde r_1+r_3)+2L_K(C_1M_0)^2+L_M M_0 C_1(2\tilde r_1+r_3)+ \\
+4M_1C_1^2(2e^{-2}+1)\}\left\|\xi_\varepsilon(t)\right\|_C=d_3\left\|\xi_\varepsilon(t)\right\|_C; \\
\Big|\ \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t h(s)(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(t)-\phi_0(s))\lambda\{\int\limits_s^t h_0(\tau)\upsilon(\tau)\int\limits_0^{M(\tau)}K(\tau,\bar\tau)[2\upsilon(\bar\tau)\xi_\varepsilon(\bar\tau)+ \\
+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau)+2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)\xi_\varepsilon(\bar\tau)]d\bar\tau\,d\tau+\int\limits_s^t h_0(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)\int\limits_0^{M(\tau)}K(\tau,\bar\tau)[2\upsilon(\bar\tau)\xi_\varepsilon(\bar\tau)+ \\
+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau)+2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)\xi_\varepsilon(\bar\tau)]d\bar\tau\,d\tau+\int\limits_s^t h_0(\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)\int\limits_0^{M(\tau)}K(\tau,\bar\tau)[2\upsilon(\bar\tau)\xi_\varepsilon(\bar\tau)+ \\
+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau)+2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)\xi_\varepsilon(\bar\tau)]d\bar\tau\,d\tau\}\ \ \Big|\le\lambda\{\frac{1}{\alpha}C_1T\tilde r_1(2\tilde r_1+r_3)+\frac{1}{\alpha}2M_0\tilde r_1C_1^2+ \\
+\frac{1}{\alpha}C_1T(2\tilde r_1r_3+\tilde r_1+r_3^2)+\frac{1}{\alpha}2M_0C_1^2(\tilde r+r_3)+\frac{1}{2\alpha}3M_1C_1^3+\frac{1}{\alpha}2\varepsilon L_M M_1C_1^2\times \\
\times(2\tilde r_1+r_3\ )+\frac{1}{\varepsilon}4M_1C_1^3(2e^{-1}+1)\}\left\|\xi_\varepsilon(t)\right\|_C=d_4\left\|\xi_\varepsilon(t)\right\|_C; \\
\int\limits_0^{M(t)}\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(s))ds\le\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{M(t)}\frac{1}{\alpha\gamma}(\gamma+\alpha^{-1}\lambda(s))F(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(s))ds= \\
=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{M(t)}\frac{1}{\alpha\gamma}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(s))d(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(s))=M_0[1-\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(M(t)))]\le M_0,\forall t\in[0,T], \\
h(s)\equiv(\gamma+\alpha^{-1}\lambda(s))F(s));\ \sup\limits_{[0,T]}\int\limits_0^t h_0(s)ds\le\tilde h_0=const, \\
\rho\equiv\frac{1}{\delta}\phi_0(t);\chi(\rho)\equiv\rho^k\exp(-\rho);\sup\limits_{\rho\ge0}\chi(\rho)=k^k\exp(-k), \\
\rho=0:\chi(0)=0;\rho\to\infty:\chi\to0,(k=1,2,\frac{7}{2}), \\
\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau=\frac{1}{\varepsilon^3}\bar\tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))\Big|_0^x+\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^3}\bar\tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\bar\tau))\le \\
\le\frac{1}{\varepsilon^3}x\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(x))+\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^x(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\bar\tau))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau\le \\
\le\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(x))+\int\limits_0^{\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)}\rho^{\frac{7}{2}}\mathrm{e}^{-\rho}d\rho]\le\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+ \\
+\int\limits_0^\infty\rho^{\frac{7}{2}}\mathrm{e}^{-\rho}d\rho]=\sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2^7}}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\frac{105\sqrt{\pi}}{16}]=T_1\sqrt{\varepsilon}.
\end{array}
\right.
\qquad (3.1.43)
$$

Поэтому, коэффициент сжатия оператора P_1 вычисляется по правилу:

$$\begin{cases} L_{P_1} = \sum\limits_{i=1}^{4} d_i < 1, \\ P_1 : S_{r_3}(0) \to S_{r_3}(0). \end{cases} \tag{3.1.44}$$

Отсюда видно, что выполнимость условие (3.1.44) возможен, так как $0 < \lambda < 1$, кроме того, известные интегральные члены:

$$\begin{cases}
\Psi_1(t,\varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon}(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))\lambda\{-\int\limits_0^{M(t)} K(t,\tau)[2\upsilon(\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi^2{}_\varepsilon(\tau)]d\tau + \\
+\int\limits_0^t h_0(\tau)\upsilon(\tau)\int\limits_0^{M(\tau)} K(\tau,\overline{\tau})[2\upsilon(\overline{\tau})\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\overline{\tau})+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi^2{}_\varepsilon(\overline{\tau})]d\overline{\tau}d\tau + \\
+\int\limits_0^t h_0(\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)\int\limits_0^{M(\tau)} K(\tau,\overline{\tau})[\upsilon^2(\overline{\tau})+2\upsilon(\overline{\tau})\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\overline{\tau})+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi^2{}_\varepsilon(\overline{\tau})]d\overline{\tau}d\tau\}, \\
\Psi_2(t,\varepsilon) \equiv -\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t h(s)(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(t)-\phi_0(s)))\lambda\{\int\limits_0^{M(s)} [K(t,\tau)-K(s,\tau)]\times \\
\times[2\upsilon(\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi^2{}_\varepsilon(\tau)]d\tau + \int\limits_{M(s)}^{M(t)} K(t,\tau)[2\upsilon(\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi^2{}_\varepsilon(\tau)]d\tau, \\
\Psi_3(t,\varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t h(s)(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(t)-\phi_0(s)))\lambda\{\int\limits_s^t h_0(\tau)\upsilon(\tau)\int\limits_0^{M(\tau)} K(\tau,\overline{\tau})\times \\
\times[2\upsilon(\overline{\tau})\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\overline{\tau})+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi^2{}_\varepsilon(\overline{\tau})]d\overline{\tau}d\tau + \int\limits_s^t h_0(\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)\int\limits_0^{M(\tau)} K(\tau,\overline{\tau})[\upsilon^2(\overline{\tau})+ \\
+2\upsilon(\overline{\tau})\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\overline{\tau})+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi^2{}_\varepsilon(\overline{\tau})]d\overline{\tau}d\tau\}ds,
\end{cases} \tag{3.1.45}$$

также регулярны относительно малого параметра, как и в случае (3.1.43) (нет необходимости повторять, так как аналогичные результаты с полной оценкой относительно указанных функций даны в параграфе 2.1), значит (3.1.35) также допускает условие (аналогичные условие: см.(3.1.43)):

$$\left|\sum_{i=1}^{3} \Psi_i(t,\varepsilon)\right| \le \sum_{i=1}^{3} \left|\Psi_i(t,\varepsilon)\right| \le Q_0(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.46}$$

Следовательно, из оценки (3.1.42) имеем

$$\left\|\xi_\varepsilon(t)\right\|_C \le \left(1-L_{P_1}\right)^{-1}[Q_0(\varepsilon)+\left\|\Delta_*(\upsilon,\varepsilon)\right\|_C + \frac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)] = \Delta_3(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \tag{3.1.47}$$

где

$$\begin{cases} \left\|\Delta_*\left(\upsilon,\varepsilon\right)\right\|_C \le 3\left\|\upsilon\left(t\right)\right\|_C \exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}\right)+\omega_{\bar{\upsilon}}\left(\varepsilon^{\beta}\right),(0<\beta<1), \\ \left|F_\varepsilon(t)-F(t)\right|\le\Delta_0(\varepsilon),\forall t\in[0,T],(\dfrac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0), \\ \left|\Delta_2(F_\varepsilon,F,\varepsilon)\right|\le\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t h(\tau)\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(t)-\phi_0(\tau))\Delta_0(\varepsilon)d\tau+\dfrac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\le\dfrac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon). \end{cases} \quad (3.1.48)$$

Это означает, что, во-первых, при выполнении (3.1.47) функция $\xi_\varepsilon(t)$ равномерно сходится к нулю, когда ε→0, а во-вторых, определяется единственным образом как решение уравнения (3.1.42). Поэтому, действительно функция $\xi_\varepsilon(t)$ допускает условие леммы 3.1.2. ЧиТД.

В итоге, с учетом (3.1.26) при выполнении условий леммы 3.1.2, доказывается следующая теорема:

Теорема 3.1.1. Если допускаются условия леммы 3.1.2, то на основе (3.1.26) следуют:

1) $$\begin{cases} \left\|\Pi_\varepsilon\right\|_{Z^2(0,T)}\le\gamma_1\varepsilon^{\frac{7}{4}},(\gamma_1=C_1 2^{-\frac{7}{2}}[7^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\dfrac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \\ \left\|\Omega_\varepsilon\right\|_{Z^2(0,T)}\le\gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{cases} \quad (3.1.49)$$

2) $$\begin{cases} \|\theta_\varepsilon-\upsilon\|_{Z^2(0,T)}\le 2[\Delta_3(\varepsilon)\sqrt{T}+\gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}]=\tilde{M}_0(\varepsilon), \\ \|\theta_\varepsilon\|_{Z^2(0,T)}\le r_*=const, \end{cases} \quad (3.1.50)$$

3) $$\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(t)-F(t)\right\|_{Z^2(0,T)}\le\tilde{M}(\varepsilon),\left(\tilde{M}_0(\varepsilon),\tilde{M}(\varepsilon)\to 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0\right). \quad (3.1.51)$$

Доказательство. Действительно, условие (3.1.49) показано в условиях леммы 2.1.2 (см. параграф 2.1 главы 2), поэтому переходим к доказательству (2.1.50). В самом деле, в условиях леммы 3.1.2, с учетом (3.1.26) между решениями параметризированного ИУ (3.1.25) и второго уравнения системы (3.1.27) получим оценку:

$$\begin{cases} \left|\theta_\varepsilon-\upsilon\right|\le\Delta_3(\varepsilon)+\dfrac{1}{\varepsilon}\left|\Pi_\varepsilon(t)\right|\le\Delta_3(\varepsilon)+\dfrac{1}{\varepsilon}C_1\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)), \\ \left|\theta_\varepsilon\right|\le\Delta_3(\varepsilon)+\dfrac{1}{\varepsilon}C_1\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))+\tilde{r}_1. \end{cases} \quad (3.1.52)$$

Поэтому, оценивая (3.1.52) в смысле нормы $Z^2(0,T)$, на основе результатов леммы 3.1.2 и (3.1.47),(3.1.49), и неравенства:

$$(a_1 + a_2)^n \le 2^n (a_1^n + a_2^n), \ a_1 \ge 0, a_2 \ge 0,$$

получим оценку:

$$\| \theta_\varepsilon - \upsilon \|_{Z^2} \le 2[\Delta_3(\varepsilon)\sqrt{T} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon),$$

а также имеем:

$$\| \theta_\varepsilon \|_{Z^2(0,T)} \le 4[\sqrt{T}(\tilde{r}_1 + \Delta_3(\varepsilon)) + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] \le r_* .$$

Это значит, что выполняются условия, которые указаны по формуле (3.1.50).

Чтобы показать (3.1.51), сперва, рассмотрим оценку:

$$\left|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)\right| = \left|\varepsilon\theta_\varepsilon + (\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F_\varepsilon(t) - \varepsilon(\theta_\varepsilon - \upsilon + \upsilon) + F_\varepsilon(t) - F(t)\right|, \qquad (3.1.53)$$

где функция $F(t)$ свободный член ИУВ (3.1.21) (или (3.1.23)), а оператор $(\Phi\theta_\varepsilon)(t)$ определяется в виде (3.1.25). Далее, переходя из (3.1.53) по норме $Z^2(0,T)$ получим

$$\begin{aligned}&\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)\right\|_{Z^2(0,T)} \le 4[\left\|F_\varepsilon(t) - F(t)\right\|_{Z^2} + \varepsilon\left\|\theta_\varepsilon(t) - \upsilon(t)\right\|_{Z^2} + \varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{T}] \le \\ &\le 4[\Delta_0(\varepsilon)\sqrt{T} + \varepsilon\tilde{M}_0(\varepsilon) + \varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{T}] = \tilde{M}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.\end{aligned}$$

ЧиТД.

§3.1.3. Общий вывод регуляризации ОЗ в векторном пространстве $\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0), Z^2(0,T)]}(D_0)$ с нормой (3.1.20)

Из полученных результатов леммы 3.1.1 и теоремы 3.1.1, на основе (3.1.5) (или (3.1.15)), в итоге имеем:

$$\begin{cases} Q_x(t,x) \equiv U(t,x), \\ V = (\tilde{A}_0 Q)(t,x) = \int\limits_0^t \psi(x + b(t-s) - bs)ds + \int\limits_0^t (\int\limits_0^s (J\theta)(s')ds')ds + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_0^s \int\limits_{x+b(t-s)-b(s-s')}^{x+b(t-s)} K_0(\tau)Q(s',\tau)d\tau ds' ds, \\ V_t = \psi(x - bt) + \int\limits_0^t (J\theta)(s)ds + \int\limits_0^t b\psi_{l_1}(x + b(t-s) - bs)ds + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{x-b(t-s')}^{x} K_0(\tau)Q(s',\tau)d\tau ds' + \int\limits_0^t \int\limits_0^s b[K_0(x + b(t-s))Q(s', x + b(t-s)) - \end{cases} \qquad (3.1.54)$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
-K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds, \\
V_x = \int\limits_0^t \psi_{l_1}(x+b(t-s)-bs)ds + \int\limits_0^t \int\limits_0^s [K_0(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s)) - \\
-K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds, \\
V_{t^2} = \int\limits_0^t b^2\psi_{l_1l_1}(x+b(t-s)-bs)ds + (J\theta)(t) + b\int\limits_0^t K_0(x-b(t-s'))Q(s',x- \\
-b(t-s'))ds' + \int\limits_0^t b[K_0(x)Q(s',x) - K_0(x-b(t-s'))Q(s',x-b(t-s'))]ds' + \\
+\int\limits_0^t \int\limits_0^s b^2[K_{0l_2}(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s)) + K_0(x+b(t-s))U(s',x+b(t-s)) - \\
-K_{0l_3}(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s')) - K_0(x+b(t-s)- \\
-b(s-s'))U(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds, \\
V_{x^2} = \int\limits_0^t \psi_{l_1l_1}(x+b(t-s)-bs)ds + \int\limits_0^t \int\limits_0^s [K_{0l_2}(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s)) + \\
+K_0(x+b(t-s))U(s',x+b(t-s)) - K_{0l_3}(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+ \\
+b(t-s)-b(s-s')) - K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))U(s',x+b(t-s)- \\
-b(s-s'))]ds'ds, \\
V_{tx} = b\varphi_{0ll}(x+bt) + \psi_{\bar{l}}(x-bt) + \int\limits_0^t b\psi_{l_1l_1}(x+b(t-s)-bs)ds + \int\limits_0^t [K_0(x)Q(s',x) - \\
-K_0(x-b(t-s'))Q(s',x-b(t-s'))]ds' + \int\limits_0^t \int\limits_0^s b[K_{0l_2}(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s)) + \\
+K_0(x+b(t-s))U(s',x+b(t-s)) - K_{0l_3}(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)- \\
-b(s-s')) - K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))U(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds.
\end{array}\right.
$$

или преобразуя (3.1.54) на основе (3.1.23) с условиями (3.1.24) имеем:

$$
\left\{\begin{array}{l}
\int\limits_0^t h(s)\theta(s)ds - (H\theta)(t) \overset{(3.1.23)}{\equiv} (J\theta)(t) = F(t), \\
H\theta \equiv \int\limits_0^t h_0(\tau)\theta(\tau)(J\theta)(\tau)d\tau - (J\theta)(t), [\int\limits_0^t h(s)\theta(s)ds \overset{(3.1.24)}{\equiv} \int\limits_0^t h_0(s)\theta(s)(J\theta)(s)ds], \\
V = (\tilde{A}_0 Q)(t,x) = \int\limits_0^t \psi(x+b(t-s)-bs)ds + \int\limits_0^t (\int\limits_0^s [\int\limits_0^{s'} h(\bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s} - \\
-(H\theta)(s')]ds'ds + \int\limits_0^t \int\limits_0^s \int\limits_{x+b(t-s)-b(s-s')}^{x+b(t-s)} K_0(\tau)Q(s',\tau)d\tau ds'ds, \\
V_t = \psi(x-bt) + \int\limits_0^t [\int\limits_0^{s'} h(\bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s} - (H\theta)(s')]ds' + \int\limits_0^t b\psi_{l_1}(x+b(t-s)-bs)ds + \\
+\int\limits_0^t \int\limits_{x-b(t-s')}^{x} K_0(\tau)Q(s',\tau)d\tau ds' + \int\limits_0^t \int\limits_0^s b[K_0(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s)) - K_0(x+
\end{array}\right.
$$

$$\begin{cases}
+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds, \\
V_x=\int\limits_0^t \psi_{l_1}(x+b(t-s)-bs)ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^s [K_0(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s))-K_0(x+ \\
+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds, \\
V_{t^2}=\int\limits_0^t b^2\psi_{l_1l_1}(x+b(t-s)-bs)ds+\int\limits_0^t h(s)\theta(s)ds-(H\theta)(t)+b\int\limits_0^t K_0(x-b(t-s'))\times \\
\times Q(s',x-b(t-s'))ds'+\int\limits_0^t b[K_0(x)Q(s',x)-K_0(x-b(t-s'))Q(s',x-b(t-s'))]ds'+ \\
+\int\limits_0^t\int\limits_0^s b^2[K_{0l_2}(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s))+K_0(x+b(t-s))U(s',x+b(t-s))- \\
-K_{0l_3}(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))-K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))\times \\
\times U(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds, \\
V_{x^2}=\int\limits_0^t \psi_{l_1l_1}(x+b(t-s)-bs)ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^s [K_{0l_2}(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s))+K_0(x+ \\
+b(t-s))U(s',x+b(t-s))-K_{0l_3}(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))- \\
-K_0(x+b(t-s)-b(s-s'))U(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds, \\
V_{tx}=\psi_l(x-bt)+\int\limits_0^t b\psi_{l_1l_1}(x+b(t-s)-bs)ds+\int\limits_0^t [K_0(x)Q(s',x)-K_0(x-b(t-s'))\times \\
\times Q(s',x-b(t-s'))]ds'+\int\limits_0^t\int\limits_0^s b[K_{0l_2}(x+b(t-s))Q(s',x+b(t-s))+K_0(x+b(t-s))\times \\
\times U(s',x+b(t-s))-K_{0l_3}(x+b(t-s)-b(s-s'))Q(s',x+b(t-s)-b(s-s'))-K_0(x+ \\
+b(t-s)-b(s-s'))U(s',x+b(t-s)-b(s-s'))]ds'ds.
\end{cases} \qquad (3.1.54)^*$$

При этом надо провести оценки выражений:

$$V-V_\varepsilon; V_t-V_{t\varepsilon}; V_{t^2}-V_{t^2\varepsilon}; V_x-V_{x\varepsilon}; V_{x^2}-V_{x^2\varepsilon}; V_{xt}-V_{xt\varepsilon}.$$

Отметим, что среди этих оценок, есть некоторые выражения, т.е.:

$$V-V_\varepsilon; V_t-V_{t\varepsilon}; V_{t^2}-V_{t^2\varepsilon},$$

связанные с разностью:

$$\begin{cases}
(\Phi\theta_\varepsilon)(t)-F(t), \\
(\Phi\theta_\varepsilon)(t) \overset{(3.1.25)}{\equiv} \int\limits_0^t h(s)\theta_\varepsilon(s)ds-(H\theta_\varepsilon)(t), \\
F(t) \overset{(3.1.23)}{=} \int\limits_0^t h(s)\theta(s)ds-(H\theta)(t).
\end{cases} \qquad (3.1.55)$$

Из них важное место занимает выражение:

$$V_{t^2\varepsilon}-V_{t^2}=(\Phi\theta_\varepsilon)(t)-F(t)+b\int_0^t K_0(x-b(t-s'))[Q_\varepsilon(s',x-b(t-s'))-Q\ (s',x-$$
$$-b(t-s'))]ds'+\int_0^t b[K_0(x)(Q_\varepsilon(s',x)-Q(s',x))-K_0(x-b(t-s'))(Q_\varepsilon(s',x- \qquad (3.1.56)$$
$$-b(t-s'))-Q(s',x-b(t-s')))]ds'+\int_0^t\int_0^s b^2[K_{0l_2}(x+b(t-s))(Q_\varepsilon(s',x+b(t-s))-Q(s',x+$$
$$+b(t-s)))+K_0(x+b(t-s))(U_\varepsilon(s',x+b(t-s))-U(s',x+b(t-s)))-K_{0l_3}(x+b(t-s)-$$
$$-b(s-s'))(Q_\varepsilon(s',x+b(t-s)-b(s-s'))-Q(s',x+b(t-s))-b(s-s')))-K_0(x+b(t-s)-$$
$$-b(s-s'))(U_\varepsilon(s',x+b(t-s)-b(s-s'))-U(s',x+b(t-s)-b(s-s')))]ds'ds,$$

где разность (3.1.55) не находится подзнаком интеграла по переменной $t\in[0,T]$, в чем и отличается от других выражений.

Поэтому, для наглядности проводим оценку относительно (3.1.56). С этой целью, на основе леммы 3.1.1 относительно Q,U допуская условие:

$$\begin{cases}\left|Q-Q_\varepsilon\right|\le\Delta_{01}(\varepsilon);\left|U-U_\varepsilon\right|\le\Delta_{02}(\varepsilon),\forall(t,x)\in\bar{D}_0,\\ \Delta_{01}(\varepsilon),\Delta_{02}(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0\end{cases} \qquad (3.1.57)$$

и учитывая (3.1.52) из оценки выражение (3.1.56) следует:

$$\left|V_{t^2\varepsilon}-V_{t^2}\right|\le\left|(\Phi\theta_\varepsilon)(t)-F(t)\right|+3b\tilde{K}_0T\Delta_{01}(\varepsilon)+T^2b^2\tilde{K}_0[\Delta_{01}(\varepsilon)+\Delta_{02}(\varepsilon)]$$

или проведя оценку в смысле нормы $L^2_{K_0(x)}(D_0)$ получим:

$$\begin{cases}\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(t)-F(t)\right\|_{Z^2(0,T)}\le\tilde{M}\ (\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0,(см.(3.1.51),\\ \tilde{\Delta}_*(\varepsilon)=3b\tilde{K}_0T\Delta_{01}(\varepsilon)+T^2b^2\tilde{K}_0[\Delta_{01}(\varepsilon)+\Delta_{02}(\varepsilon)],(\tilde{\Delta}_*(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0),\\ \left\|V_{t^2\varepsilon}-V_{t^2}\right\|_{L^2_{K_0(x)}(D_0)}=(\int_{D_0}K_0(\tau)\left|V_{t^2\varepsilon}(t,\tau)-V_{t^2}(t,\tau)\right|^2d\tau dt)^{\frac{1}{2}},\\ \left\|V_{t^2\varepsilon}-V_{t^2}\right\|_{L^2_{K_0(x)}(D_0)}\le2\sqrt{\tilde{K}_0}[\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(t)-F(t)\right\|_{Z^2(0,T)}+\sqrt{T}\tilde{\Delta}_*(\varepsilon)]\le\\ \le2\sqrt{\tilde{K}_0}[\tilde{M}\ (\varepsilon)+\sqrt{T}\tilde{\Delta}_*(\varepsilon)]\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0.\end{cases} \qquad (3.1.58)$$

Из остальных выражений, для наглядности проводим оценку относительно: $V_\varepsilon-V,V_{t\varepsilon}-V,$ так как эти выражения не содержат (3.1.55).

В самом деле, из неравенства

$$V_\varepsilon - V = \int_0^t \left(\int_0^s [(\Phi\theta_\varepsilon)(s') - F(s')]ds'ds + \int_0^t\int_0^s \int_{x+b(t-s)-b(s-s')}^{x+b(t-s)} K_0(\tau)(Q_\varepsilon(s',\tau) -\right.$$
$$-Q(s',\tau))d\tau ds'ds,$$

следует оценка:

$$\left|V_\varepsilon - V\right| \le \int_0^t \sqrt{s}\left(\int_0^s \left|(\Phi\theta_\varepsilon)(s') - F(s')\right|^2 ds'\right)^{\frac{1}{2}} ds + \frac{1}{2}T^2\tilde{K}_0\Delta_{01}(\varepsilon) \le$$
$$\le \frac{2}{3}\sqrt{T^3}\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)\right\|_{Z^2(0,T)} + \frac{1}{2}T^2\tilde{K}_0\Delta_{01}(\varepsilon) \le \frac{2}{3}\sqrt{T^3}\tilde{M}(\varepsilon) + \frac{1}{2}T^2\tilde{K}_0\Delta_{01}(\varepsilon)$$

или

$$\left\|V_\varepsilon - V\right\|_{C(\bar{D}_0)} \le \frac{2}{3}\sqrt{T^3}\tilde{M}(\varepsilon) + \frac{1}{2}T^2\tilde{K}_0\Delta_{01}(\varepsilon) = \Delta_{03} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (3.1.59)$$

Далее, учитывая

$$V_{t\varepsilon} - V_t = \int_0^t [(\Phi\theta_\varepsilon)(s') - F(s')]ds' + \int_0^t \int_{x-b(t-s')}^{x} K_0(\tau)(Q_\varepsilon(s',\tau) - Q(s',\tau))d\tau ds' +$$
$$+\int_0^t\int_0^s b[K_0(x+b(t-s))(Q_\varepsilon(s',x+b(t-s)) - Q(s',x+b(t-s))) - K_0(x+b(t-s) -$$
$$-b(s-s'))(Q_\varepsilon(s',x+b(t-s)-b(s-s')) - Q(s',x+b(t-s)-b(s-s')))]ds'ds,$$

получим оценку

$$\begin{aligned}\left\|V_{t\varepsilon} - V_t\right\|_{C(\bar{D}_0)} &\le \sqrt{T}\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)\right\|_{Z^2(0,T)} + \tilde{K}_0T(1+bT)\Delta_{01}(\varepsilon) \le \sqrt{T}\tilde{M}(\varepsilon) + \\ &+\tilde{K}_0T(1+bT)\Delta_{01}(\varepsilon) = \Delta_{04}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.\end{aligned} \qquad (3.1.60)$$

А так как, остальные функции: $V_x - V_{x\varepsilon}; V_{x^2} - V_{x^2\varepsilon}; V_{xt} - V_{xt\varepsilon}$, не содержат (3.1.55), поэтому просто оценивается в $C(\bar{D}_0)$, т.е.:

$$\begin{cases}\left\|V_{x\varepsilon} - V_x\right\|_{C(\bar{D}_0)} \le \Delta_{05}(\varepsilon), \\ \left\|V_{x^2\varepsilon} - V_{x^2}\right\|_{C(\bar{D}_0)} \le \Delta_{06}(\varepsilon); \left\|V_{xt\varepsilon} - V_{xt}\right\|_{C(\bar{D}_0)} \le \Delta_{07}(\varepsilon),\end{cases} \qquad (3.1.61)$$

то в итоге, на основе (3.1.58),(3.1.59), (3.1.60) и (3.1.61) с теми выводами, которые указаны выше следует:

$$\left\|V_\varepsilon - V\right\|_{\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0)} \le \sum_{i=3}^{7} \Delta_{0i}(\varepsilon) + 2\sqrt{\tilde{K}_0}[\tilde{M}(\varepsilon) + \sqrt{T}\tilde{\Delta}_*(\varepsilon)] = \bar{\Delta}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (3.1.62)$$

Значит, можем сформулировать утверждение следующего вида.

Утверждение 3.1.1. В условиях лемм 3.1.1; 3.1.2, теоремы 3.1.1 и (3.1.62) ОЗ (3.1.1),(3.1.2) регуляризируема в обобщенном смысле в $\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{K_0(x)}(D_0);Z^2(0,T)]}(D_0)$.

§3.2. Регуляризация ОЗ типа влагопереноса в ограниченной области, вырождающая в некорректное нелинейное ИУВ-1

В этом параграфе исследуется нелокальная ОЗ с нелинейным дифференциальным оператором гиперболического типа третьего порядка в ограниченной области, где вырождается некорректное нелинейное ИУВ-1 с ядром, которое указана в параграфе 3.1. Отметим, что рассматриваемые классы ОЗ порождаются в задачах влагопереноса, слоистых сред и другие [3,38,39,41,42,59].

Чтобы интегрилизировать исследуемую ОЗ и доказать регуляризируемости ее, использованы МИО и регуляризационный алгоритм АХ, где содержится сингулярная функция относительно малого параметра.

В связи с этим, рассмотрим нелокальную ОЗ:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\lambda D(U)\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}]=\lambda\frac{\partial U}{\partial t}+f(x)(J\theta)(t), \tag{3.2.1}$$

$$\begin{cases} U\big|_{t=0}=\varphi(x), \forall x\in[0,H], \\ U_x\big|_{x=0}=\psi_1(t); U\big|_{x=H}=\psi_0(t), \forall t\in[0,T], \\ \psi_0(0)=\varphi(H), \psi_1(0)=\varphi_x(0), \end{cases} \tag{3.2.2}$$

$$U_{x^2}(x_0,t)+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i U_x(x_i,t)=g(t), \forall t\in[0,T], ((x_0;x_i)\in(0,H)), \tag{3.2.3}$$

где интегральный оператор определяется по правилу:

$$J\theta\equiv\int_0^t K(t,s)\theta^3(s)ds, \tag{3.2.4}$$

а известные функции: $\lambda=A^{-1}, \lambda_i(i=1,2); D(U), f(x), \varphi(x), \psi_0(t), \psi_1(t), g(t)$

изучаемой ОЗ допускают условия:

a$_1$) $0<\lambda, \lambda_i=const; C^2(R)\ni D(U); C[0,H]\ni f(x); C^2[0,H]\ni\varphi(x); \psi_0(t), \psi_1(t), g(t)\in C^1[0,T]$, a2) $K(t,s)\in C(D_1)\cap Lip(t|L_K), 0<L_K=const; 0\le K(t,t), K(0,0)\ne 0; |K(.)|\le C_{01}$,

$D_2=\{(t,s): 0\le s\le t\le T\}$.

Неизвестным является вектор - функция: $P=(U,\theta)$, поэтому требуется доказать регуляризируемости исходной ОЗ в обобщенном смысле в введенном векторном пространстве, так как относительно функции θ из исходной ОЗ вырождается некорректное нелинейное ИУВ-1:

$$\int_0^t K(t,s)\theta^3(s)ds=F(t) \qquad (*)$$

с неотрицательным решением, связанное с ФД, где относительно свободной функции имеет место:

a3) $F(t)\in C[0,T]\cap Lip(t|L_F), 0<L_F; F(t)\ge\alpha>0, |F(t)|\le C_{02}, \forall t\in[0,T]$.

Значит, регуляризируемость ИУ (*) принимается в $Z^3(0,T)$ (см. гл.1, стр.17 : $p=3$, где не учитывается (1.1.15)).

Известно, что условия (3.2.3) является разновидностями условия Бицадзе-Самарского [17,25,34,40] и др.

§3.2.1. Интегрилизация ОЗ. Чтобы интегрилизировать исходную ОЗ, удобно применять соотношение, где искомая функция U связывается с векторной функцией $P_0=(Q,\theta)$, на основе равенства:

$$U_{x^2}(x,t)=\varphi_{x^2}(x)+\int_0^t[Q(x,s)+f(x)(J\theta)(s)]ds=(A_1[Q,\theta])(x,t), \qquad (3.2.5)$$

кроме того, интегрируя дважды по переменной *x* получим:

$$\begin{cases} U_x=\psi_1(t)+\int_0^x\{\varphi_{\tau^2}(\tau)+\int_0^t[Q(\tau,s)+f(\tau)(J\theta)(s)]ds\}d\tau=(A_2[Q,\theta])(x,t), \\ U=\psi_0(t)-\psi_1(t)H-\int_0^H(H-\tau)\{\varphi_{\tau^2}(\tau)+\int_0^t[Q(\tau,s)+f(\tau)(J\theta)(s)]ds\}d\tau+ \\ +\psi_1(t)x+\int_0^x(x-\tau)\{\varphi_{\tau^2}(\tau)+\int_0^t[Q(\tau,s)+f(\tau)(J\theta)(s)]ds\}d\tau\equiv \\ \equiv(A_3[Q,\theta])(x,t), \end{cases} \qquad (3.2.6)$$

где $Q(x,t)$ - новая неизвестная функция. Предлогаемое преобразование (3.2.5) удобна для вывода уравнения относительно $(J\theta)(t)$, с учетом (3.2.3).

В самом деле, допуская условие (3.2.3) с учетом (3.2.5),(3.2.6), следует:

$$g(t)=\varphi_{x^2}(x_0)+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\psi_1(t)+\int_0^t[Q(x_0,s)+f(x_0)(J\theta)(s)]ds+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\int_0^{x_i}\{\varphi_{\tau^2}(\tau)+$$

$$+\int_0^t[Q(\tau,s)+f(\tau)(J\theta)(s)]ds\}d\tau$$

или после некоторых математических преобразований имеем:

$$\begin{cases}\int_0^t(J\theta)(s)ds=\beta_0^{-1}\{g(t)-(\varphi_{x^2}(x_0)+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\psi_1(t))-\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\int_0^{x_i}\varphi_{\tau^2}(\tau)d\tau-\int_0^t Q(x_0,s)ds-\\ -\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\int_0^{x_i}\int_0^t Q(\tau,s)dsd\tau\}\equiv(A_4Q)(t),\\ \dfrac{\partial}{\partial t}(A_4Q)(t)=\beta_0^{-1}[g'(t)-\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\psi_1'(t)-Q(x_0,t)-\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\int_0^{x_i}Q(\tau,t)d\tau],\\ \beta_0=f(x_0)+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\int_0^{x_i}f(\tau)d\tau\neq 0,\\ \tilde g(t)\equiv g(t)-(\varphi_{x^2}(x_0)+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\psi_1(t))-\sum_{i=1}^{2}\lambda_i(\varphi_x(x_i)-\varphi_x(0)),(\tilde g(t)\big|_{t=0}=0).\end{cases}\qquad(3.2.7)$$

Поэтому, подставляя (3.2.7) в (3.2.6) относительно функции U получим интегральное соотношение:

$$\begin{cases}U=\psi_0(t)-\psi_1(t)H+\psi_1(t)x-\int_0^H(H-\tau)\varphi_{\tau^2}(\tau)d\tau+\int_0^x(x-\tau)\varphi_{\tau^2}(\tau)d\tau-\\ -\int_0^H(H-\tau)\int_0^t Q(\tau,s)dsd\tau+\int_0^x(x-\tau)\int_0^t Q(\tau,s)dsdt+(A_4Q)(t)\times\\ \times\{-\int_0^H(H-\tau)f(\tau)d\tau+\int_0^x(x-\tau)f(\tau)d\tau\}=\Psi(x,t)-\int_0^H(H-\tau)\int_0^t Q(\tau,s)\times\\ \times dsd\tau+\int_0^x(x-\tau)\int_0^t Q(\tau,s)dsd\tau+(A_4Q)(t)\{-\int_0^H(H-\tau)f(\tau)d\tau+\end{cases}\qquad(3.2.8)$$

$$\begin{cases} +\int\limits_0^x (x-\tau)f(\tau)d\tau\} \equiv (BQ)(x,t), \\ \Psi(x,t) \equiv \psi_0(t)-\psi_1(t)H+\psi_1(t)x-\int\limits_0^H (H-\tau)\varphi_{\tau^2}(\tau)d\tau+\int\limits_0^x (x-\tau)\varphi_{\tau^2}(\tau)d\tau = \\ =\psi_0(t)+\psi_1(t)(x-H)+\varphi_x(0)(H-x)-\varphi(H)+\varphi(x), \\ \Psi(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x), \forall x\in[0,H]. \end{cases}$$

Следовательно, учитывая (3.2.5),(3.2.6) и (3.2.8) из ДУ (3.2.1) имеем ИУ:

$$Q(x,t)=\lambda\{\psi_0'(t)+\psi_1'(t)(x-H)-\int\limits_0^H (H-\tau)Q(\tau,t)d\tau+[-\int\limits_0^H (H-\tau)\times$$
$$\times f(\tau)d\tau+\int\limits_0^x (x-\tau)f(\tau)d\tau]\beta_0^{-1}[g'(t)-\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\psi_1'(t)-Q(x_0,t)-$$
$$-\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\int\limits_0^{x_i} Q(\tau,t)d\tau]+\int\limits_0^x (x-\tau)Q(\tau,t)d\tau\}-\lambda\{D_\rho[(BQ)(x,t)]\{\psi_1(t)+\varphi_x(x)- \tag{3.2.9}$$
$$-\varphi_x(0)+\int\limits_0^x\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau+(A_4Q)(t)\int\limits_0^x f(\tau)d\tau\}^2+D[(BQ)(x,t)]\times[\varphi_{x^2}(x)+$$
$$+\int\limits_0^t Q(x,s)ds+f(x)(A_4Q)(t)]\}\equiv(\tilde{B}Q)(x,t),$$

то есть полученное уравнение (3.2.9) является ИУ-2 и поэтому, можем допустить следующую лемму.

Лемма 3.2.1. В рамках условий (3.2.2),(3.2.3),(3.2.7) и пусть имеют место условия Банаха:

$$\begin{cases} 0<L_{\tilde{B}}<1, \\ \tilde{B}:S_r\to S_r=\{Q:|Q-Q_0|\le r,\forall(x,t)\in\bar{D}_0\}, \\ \|\tilde{B}Q_0-Q_0\|_C\le(1-L_{\tilde{B}})r,(|Q|\le r_0=const,\forall(x,t)\in\bar{D}_0). \end{cases} \tag{3.2.10}$$

Тогда ИУ (3.2.9) однозначно разрешимо в $Q\in C(\bar{D}_0)$, значит, с учетом (3.2.8) единственным образом определяется и функция $U(x,t)$ в $C^{2,1}(\bar{D}_0)$.

Доказательство. Из первого условия:

$$\begin{cases} L_{\tilde{B}} = \lambda\{H^2 + f_0H^2\left|\beta_0^{-1}\right|(1+\sum\limits_{i=1}^{2} \left|\lambda_i\right|x_i) + 2D_0(HT + f_0HL_{A_4})[3l_0 + HTr_0 + f_0HT_0] + \\ +[3l_0 + HT_0 + f_0HT_0]^2 D_0(H^2T + L_{A_4} f_0H^2) + D_0(T + f_0L_{A_4}) + (l_0 + Tr_0 + f_0T_0)D_0 \times \\ \times(H^2T + L_{A_4} f_0H^2)\} < 1, \\ L_{A_4} = \left|\beta_0^{-1}\right|(T + \sum\limits_{i=1}^{2} \left|\lambda_i\right|x_iT), (x_i \in (0, H)), \\ T_0 = \left|\beta_0^{-1}\right|\{g_0 + l_0 + \sum\limits_{i=1}^{2} \left|\lambda_i\right|l_0 + \sum\limits_{i=1}^{2} \left|\lambda_i\right|l_0x_i + r_0T + \sum\limits_{i=1}^{2} \left|\lambda_i\right|x_iTr_0\}, \\ \left|f(x)\right| \le f_0, \left|\varphi^{(i)}(x)\right| \le l_{01}, (i = \overline{0,2}), \forall x \in [0, H]; \left|\psi_1^{(i)}(t)\right| \le l_{02}, \left|g^{(i)}(t)\right| \le g_0, \forall t \in [0, T], \\ (i = 0,1); \left|D^{(i)}(\bar{U})\right| \le D_0, (i = \overline{0,2}), \forall \bar{U} \in R; l_0 = \max(l_{01}, l_{02}), (f_0, g_0, D_0, l_{01}, l_{02} = const), \end{cases} \qquad (3.2.10)$$

следует, что оператор по правилу (3.2.9) является сжимающим, а на основе третьей строки, можем доказать, что введенный оператор по указанному правилу отображает область определения в себя (см. вторую строку) (3.2.10). Это значит, что, в самом деле для ИУ (3.2.9) реализуются условия принципа Банаха, т.е. уравнение (3.2.9) однозначно разрешимо вышеуказанном пространстве Банаха. Поэтому, на основе (3.2.8) можем потвердить и выводы относительно функции $U(x,t)$ при этом и частные производные по совокупности аргументов от этой функции вида $U_t, U_x, U_{xt}, U_{x^2}, U_{x^2t}$ определяются однозначно в виде:

$$\begin{cases} U = (BQ)(x,t), \\ U_t = \psi_0'(t) + \psi_1'(t)(x - H) - \int\limits_0^H (H - \tau)Q(\tau,t)d\tau + \int\limits_0^x (x - \tau)Q(\tau,t)d\tau + \\ +[-\int\limits_0^H (H - \tau)f(\tau)d\tau + \int\limits_0^x (x - \tau)f(\tau)d\tau]\beta_0^{-1}[g'(t) - \sum\limits_{i=1}^{2} \lambda_i\psi_1'(t) - Q(x_0,t) - \\ -\sum\limits_{i=1}^{2} \lambda_i\int\limits_0^{x_i} Q(\tau,t)d\tau], \\ U_x = \psi_1(t) + \varphi_x(x) - \varphi_x(0) + \int\limits_0^x \int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau + (A_4Q)(t)\int\limits_0^x f(\tau)d\tau, \end{cases} \qquad (3.2.12)$$

$$
\begin{cases}
U_{xt}=\psi_1'(t)+\int\limits_0^x Q(\tau,t)d\tau+\beta_0^{-1}[g'(t)-\sum\limits_{i=1}^{2}\lambda_i\psi_1'(t)-Q(x_0,t)-\\
-\sum\limits_{i=1}^{2}\lambda_i\int\limits_0^{x_i}Q(\tau,t)d\tau]\int\limits_0^x f(\tau)d\tau,\\
U_{x^2}=\varphi_{x^2}(x)+\int\limits_0^t Q(x,s)ds+f(x)(A_4Q)(t),\\
U_{x^2t}=Q(x,t)+f(x)\beta_0^{-1}[g'(t)-\sum\limits_{i=1}^{2}\lambda_i\psi_1'(t)-Q(x_0,t)-\sum\limits_{i=1}^{2}\lambda_i\int\limits_0^{x_i}Q(\tau,t)d\tau].
\end{cases}
$$

Причем все указанные функции равномерно ограничены для любого $\forall(x,t)\in\bar{D}_0$, так как они связаны с функцией Q (см. (3.2.12)). Следовательно, можем допустить условие:

$$\|U\|_{C^{2,1}(\bar{D}_0)}=\|U\|_{C(\bar{D}_0)}+\|U_t\|_{C(\bar{D}_0)}+\|U_x\|_{C(\bar{D}_0)}+\|U_{xt}\|_{C(\bar{D}_0)}+\|U_{x^2}\|_{C(\bar{D}_0)}+\|U_{x^2t}\|_{C(\bar{D}_0)}\le M_0.$$

ЧиТД.

Примечание 3.2.1. Аналогичные выводы (как было отмечено в параграфе 3.1), на основе теоремы К. Фридрихса получим и здесь, т.е. при выполнении условий леммы 3.2.1, так как функция U однозначно определяется по правилу (3.2.8) и ограничено в $C^{2,1}(\bar{D}_0)$, то по указанной теореме функция U оценивается и в линейном пространстве $\tilde{W}^3(D_0)$ (обратно нет), так как функция Q, с учетом леммы 3.2.1 допускает условие:

$$|Q|\le r_0,\forall(x,t)\in\bar{D}_0. \tag{3.2.13}$$

Здесь: $\tilde{W}^3(D_0)=\{(x,t)\in\bar{D}_0:U,U_x,U_{x^2}\in C(\bar{D}_0);U_t,U_{tx},U_{tx^2}\in L^3(D_0)\}$

с нормой

$$
\begin{cases}
\|U\|_{\tilde{W}^3(D_0)}=\sum\limits_{i=0}^{2}\|U_{x^i}^{(i)}\|_{C(\bar{D}_0)}+\|U_t\|_{L^3(D_0)}+\|U_{tx}\|_{L^3(D_0)}+\|U_{tx^2}\|_{L^3(D_0)}\le N_0,(U_{x^0}^{(0)}=U),\\
\|U_t(t,x)\|_{L^3}=(\int\limits_{D_0}|U_s(\tau,s)|^3d\tau ds)^{\frac{1}{3}};\|U_{tx}(t,x)\|_{L^3}=(\int\limits_{D_0}|U_{s\tau}(\tau,s)|^3d\tau ds)^{\frac{1}{3}},\\
\|U_{tx^2}(t,x)\|_{L^3}=(\int\limits_{D_0}|U_{s\tau^2}(\tau,s)|^3d\tau ds)^{\frac{1}{3}},(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1:\ p=3,q=\frac{3}{2}).
\end{cases}
\tag{3.2.14}
$$

Если вместо (3.2.13) требуем, что функция Q в $L^3(D_0)$, т.е.:

$$\|Q(x,t)\|_{L^3} = (\int_{D_0} |Q(\tau,s)|^3 d\tau ds)^{\frac{1}{3}} \le N_{01} = const,$$

то, и в этом случае имеют место оценки, которые указаны по формуле (3.2.14). ЧиТП.

Кроме того, так как решением исходной ОЗ является вектор - функция $P=(U,\theta)$, то для доказательства регуляризируемости этой задачи рассматривается линейное пространство $\tilde{G}^3_{[\tilde{W}^3(D_0),Z^3(0,T)]}(D_0)$ с нормой:

$$\|P\|_{\tilde{G}^3_{[\tilde{W}^3(D_0);Z^3(0,T)]}} = \|U\|_{\tilde{W}^3(D_0)} + \|\theta\|_{Z^3(0,T)}. \tag{3.2.15}$$

Для этого, сперва, должны доказать регуляризируемости некорректного ИУВ-1, которое вырождается из исходной ОЗ.

§3.2.2. Регуляризируемость ИУВ-1. Из полученных результатов леммы 3.2.1 и с учетом формул (3.2.4), (3.2.7), следует нелинейное ИУВ-1:

$$\begin{cases} J\theta \equiv \int\limits_0^t K(t,s)\theta^3(s)ds = F(t), \\ F(t) \equiv \beta_0^{-1}[g'(t) - \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i\psi_1'(t) - Q(x_0,t) - \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i \int\limits_0^{x_i} Q(\tau,t)d\tau], \end{cases} \tag{3.2.16}$$

причем допускаются условия (a_2, a_3), то ИУВ (3.2.16) является некорректно поставленным в $C\,[0,T]$.

Для доказательства регуляризируемости (3.2.16) при условии (a_3) в обобщенном смысле, сперва преобразуем это ИУ к виду:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t h(\tau)\theta(\tau)d\tau = (\Phi\,\theta)(t) + F(t), \\ \Phi\,\theta \equiv \int\limits_0^t h_0(\tau)\theta(\tau)(J\theta)(\tau)d\tau - (J\theta)(t), \end{cases} \tag{3.2.17}$$

так как можем вести, как и в случае параграфа 3.1, следующие математические преобразования:

$$\begin{cases} h(t) \equiv [\gamma + \frac{1}{\alpha}\mu(t)]F(t) \geq m > 0, (1 < \gamma = const), \\ h_0(t) \equiv \gamma + \frac{1}{\alpha}\mu(t); 0 \leq \mu(t) \in L^1(0,T); h_0(t) \leq a^{-1}h(t); F_0(t) \equiv F(t) - F(0), (F_0(0) = 0), \\ \phi_0(t) = \int\limits_0^t [\gamma + \frac{1}{\alpha}\mu(\tau)]F(\tau)d\tau = \int\limits_0^t h(\tau)d\tau, \\ \left|F_0(t) - F_0(\tau)\right| \leq L_{F_0} M_0(\phi_0(t) - \phi_0(\tau)), (\tau \leq t), \\ M_0 = \frac{1}{\gamma\alpha};\ 0 < \max C_{0j} = C_0, (j = 1,2; см.(a_2, a_3));\ \ t \in [0,T]: \\ t = (t^{\frac{2}{9}})^{\frac{9}{2}} \leq (\phi_0(t))^{\frac{9}{2}}, (\lambda(t) = \frac{2}{9\sqrt[9]{t^7}}); t \leq M_1(\phi_0(t))^2, (M_1 = \sup\limits_{[0,T]}(\phi_0(t))^{\frac{5}{2}}). \end{cases} \tag{3.2.18}$$

В рамках указанных условий наряду с уравнением (3.2.17) введем ИУ с малым параметром:

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(t) + \int\limits_0^t h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau)d\tau = (\Phi\,\theta_\varepsilon)(t) + F_\varepsilon(t), \\ (\Phi_0\theta_\varepsilon)(t) \equiv \int\limits_0^t h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau)d\tau - (\Phi\,\theta_\varepsilon)(t), \end{cases} \tag{3.2.19}$$

и решение этого ИУ ищем по правилу :

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(t) + \upsilon(t) + \xi_\varepsilon(t), \\ \Pi_\varepsilon(0) = F(0), \upsilon(0) = 0, \xi_\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \tag{3.2.20}$$

Следовательно, относительно неизвестных функций получим систему:

$$\begin{cases} \Pi_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)\Pi_\varepsilon(s)ds + F(0), \\ \int\limits_0^t h(s)\upsilon(s)ds = (\Phi\,\upsilon)(t) + F_0(t), \\ \varepsilon\xi_\varepsilon(t) + \int\limits_0^t h(s)\xi_\varepsilon(s)ds = (\Phi[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon])(t) - (\Phi\,\upsilon)(t) - \varepsilon\upsilon(t) + F_\varepsilon(t) - F(t), \end{cases} \tag{3.2.21}$$

и можем доказать следующую лемму.

Лемма 3.2.2. При условиях леммы 3.2.1 и ((a_2, a_3), (3.2.18)), относительно ИУ системы (3.2.21) имеют место:

1) $\Pi_\varepsilon(t) = F(0)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)ds)$

с оценкой

$$\left|\Pi_\varepsilon(t)\right| \le C_0 \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)\right); \qquad (3.2.22)$$

2) решение параметризированного уравнения

$$\delta\upsilon_\delta(t) + \int_0^t h(s)\upsilon_\delta(s)ds = (\Phi\upsilon_\delta)(t) + F_0(t) \qquad (3.2.23)$$

равномерно сходится к решению второго ИУ системы (3.2.21) при $\delta \to 0$, так как это ИУ имеет решение в C[0,T] ;

3) функция $\xi_\varepsilon(t)$, как решение третьего ИУ системы (3.2.21) однозначно разрешимо в C[0,T], причем равномерно сходится к нулю, когда $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. 1) В самом деле, учитывая резольвенту

$$R \equiv -\frac{1}{\varepsilon}h(s)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t h(\eta)d\eta\right) \qquad (3.2.24)$$

из первого ИУ системы (3.2.21), получим

$$\Pi_\varepsilon(t) = F(0)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t h(s)ds\right).$$

Отсюда следует оценка: $\left|\Pi_\varepsilon(t)\right| \le \left|F(0)\right|\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)\right) \le C_0\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)\right)$,

т.е., получено неравенство (3.2.22).

2) Во-втором случае, ИУ (3.2.23), с учетом (3.2.24) преобразуем к виду:

$$\begin{cases} \upsilon_\delta = -\frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(s)\exp\left(-\frac{1}{\delta}\int_s^t h(s')ds'\right)\{(\Phi\upsilon_\delta)(s) - (\Phi\upsilon_\delta)(t) + F_0(s) - F_0(t)\}ds + \\ +\frac{1}{\delta}\left(\exp\left(-\frac{1}{\delta}\int_0^t h(s')ds'\right)\right)\{(\Phi\upsilon_\delta)(t) + F_0(t)\} = -\frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(\tau)\exp\left(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(\tau)\right)\times \\ \times\{\int_0^\tau h_0(\tilde\tau)\upsilon_\delta(\tilde\tau)\int_0^{\tilde\tau} K(\tilde\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^3(\bar\tau)d\bar\tau d\tilde\tau - \int_0^t h_0(\tilde\tau)\upsilon_\delta(\tilde\tau)\int_0^{\tilde\tau} K(\tilde\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^3(\bar\tau)d\bar\tau d\tilde\tau - \\ -\int_0^\tau K(\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^3(\bar\tau)d\bar\tau + \int_0^t K(t,\bar\tau)\upsilon_\delta^3(\bar\tau)d\bar\tau\}d\tau + \frac{1}{\delta}\{\int_0^t h_0(\tau)\upsilon_\delta(\tau)\int_0^\tau K(\tau,\bar\tau)\times \\ \times\upsilon_\delta^3(\bar\tau)d\bar\tau d\tau - \int_0^t K(t,\tau)\upsilon_\delta^3(\tau)d\tau\}\exp\left(-\frac{1}{\delta}\phi_0(t)\right) + \Delta_1(F_0,\delta) \equiv (P_1\upsilon_\delta)(x), \\ \Delta_1(F_0,\delta) \equiv -\frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(s)\exp\left(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(s)\right)\{F_0(s)-F_0(t)\}ds + \frac{1}{\delta}F_0(t)\exp\left(-\frac{1}{\delta}\phi_0(t)\right). \end{cases} \qquad (3.2.25)$$

Далее, так как допускаются условия

$$\begin{cases} \left|\Delta_1(F_0,\delta)\right| \le \Big| \dfrac{1}{\delta^2}\displaystyle\int_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(s)))L_{F_0}(t-s)ds + \\ +L_{F_0}\dfrac{t}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(t)) \le \dfrac{1}{\alpha\gamma}L_{F_0}\displaystyle\int_0^t \exp(-\dfrac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(s)))\dfrac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(s))\times \\ \times d(-\dfrac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(s))) + L_{F_0}M_1\delta(\dfrac{1}{\delta}\phi_0(t))^2\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(t)) \le \\ \le L_{F_0}[\dfrac{1}{\alpha\gamma}+2^2e^{-2}M_1\delta] \le L_0, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-z}zdz = 1; \rho \equiv \dfrac{1}{\delta}\phi_0(t), \\ \chi(\rho) \equiv \rho^k\exp(-\rho); \sup\limits_{\rho\ge 0}\chi(\rho) = k^k\exp(-k), \\ \rho = 0: \chi(0)=0; \rho\to\infty: \chi\to 0, (k=1,2) \end{cases} \tag{3.1.26}$$

и

$$\begin{cases} 0 < L_{P_1} = C_0[6r_1^2M_0 + \dfrac{1}{\alpha}8r_1^3T] + 3r_1^2L_KM_0T < 1, \\ P_1: S_{r_1}(0) \to S_{r_1}(0) = \left\{\upsilon_\delta(t)\in C[0,T]: \left|\upsilon_\delta(t)\right| \le r_1, \forall t\in[0,T]\right\}, \\ \Big| \dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(t))\{\displaystyle\int_0^t h_0(\tau)\upsilon_\delta(\tau)\int_0^\tau K(\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^3(\bar\tau)d\bar\tau d\tau - \\ -\displaystyle\int_0^t K(t,\tau)\upsilon_\delta^3(\tau)d\tau\} \Big| \le C_0e^{-1}[3r_1^2M_0 + \dfrac{1}{\alpha}4r_1^3T]\left\|\upsilon_\delta(t)\right\|_C, (e^{-1}<1), \\ \Big| -\dfrac{1}{\delta^2}\displaystyle\int_0^t h(\tau)\exp(-\dfrac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(\tau)))\{\int_0^\tau h_0(\tilde\tau)\upsilon_\delta(\tilde\tau)\int_0^{\tilde\tau} K(\tilde\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^3(\bar\tau)d\bar\tau d\tilde\tau - \\ -\displaystyle\int_0^t h_0(\tilde\tau)\upsilon_\delta(\tilde\tau)\int_0^{\tilde\tau} K(\tilde\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^3(\bar\tau)d\bar\tau d\tilde\tau - \int_0^\tau K(\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^3(\bar\tau)d\bar\tau + \int_0^t K(t,\bar\tau)\times \\ \times\upsilon_\delta^3(\bar\tau)d\bar\tau\}d\tau \Big| \le \{C_0[3r_1^2M_0 + \dfrac{1}{\alpha}4r_1^3T] + 3r_1^2L_KM_0T\}\displaystyle\int_0^\infty e^{-z}zdz\left\|\upsilon_\delta(t)\right\|_C = \\ = \{C_0[3r_1^2M_0 + \dfrac{1}{\alpha}4r_1^3T] + 3r_1^2L_KM_0T\}\left\|\upsilon_\delta(t)\right\|_C, \end{cases} \tag{3.2.27}$$

то из (3.2.25) получим оценку

$$\left\|\upsilon_\delta(t)\right\|_C \le \left(1-L_{P_1}\right)^{-1}\left\|\Delta_1(F_0,\delta)\right\|_C \le \left(1-L_{P_1}\right)^{-1}L_0 = r_1, \tag{3.2.28}$$

где $L_{P_1}-$ это коэффициент Липшица оператора P_1, и при выполнении условия (3.2.27) относительно ИУ (3.2.25) выполняются условия Банаха, а это означает, что ИУ (3.2.25) однозначно разрешимо в C[0,T].

Далее, с помощью подстановки

$$\upsilon_\delta(t)=\upsilon(t)+\eta_\delta(t) \tag{3.2.29}$$

и резольвенты (3.2.24) относительно функции $\eta_\delta(t)$ получим ИУ:

$$\begin{cases}
\eta_\delta = -\dfrac{1}{\delta^2}\displaystyle\int_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\int_s^t h(s')ds')\{-\int_0^s K(s,s')[3(\upsilon(s'))^2\eta_\delta(s')+3\upsilon(s')(\eta_\delta(s'))^2+ \\
+(\eta_\delta(s'))^3]ds'+\displaystyle\int_0^t K(t,s')[3(\upsilon(s'))^2\eta_\delta(s')+3\upsilon(s')(\eta_\delta(s'))^2+(\eta_\delta(s'))^3]ds'+ \\
+\displaystyle\int_0^s h_0(s')\eta_\delta(s')\int_0^{s'}K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s})+\eta_\delta(\bar{s}))^3d\bar{s}ds'+\int_0^s h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'}K(s',\bar{s})[3(\upsilon(\bar{s}))^2\eta_\delta(\bar{s})+ \\
+3\upsilon(\bar{s})(\eta_\delta(\bar{s}))^2+(\eta_\delta(\bar{s}))^3]d\bar{s}ds'-\displaystyle\int_0^t h_0(s')\eta_\delta(s')\int_0^{s'}K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s})+\eta_\delta(\bar{s}))^3d\bar{s}ds'- \\
-\displaystyle\int_0^t h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'}K(s',\bar{s})[3(\upsilon(\bar{s}))^2\eta_\delta(\bar{s})+3\upsilon(\bar{s})(\eta_\delta(\bar{s}))^2+(\eta_\delta(\bar{s}))^3]d\bar{s}ds'\}ds+ \\
+\dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(t))\{-\displaystyle\int_0^t K(t,s')[3(\upsilon(s'))^2\eta_\delta(s')+3\upsilon(s')(\eta_\delta(s'))^2+(\eta_\delta(s'))^3]ds'+ \\
+\displaystyle\int_0^t h_0(s')\eta_\delta(s')\int_0^{s'}K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s})+\eta_\delta(\bar{s}))^3d\bar{s}ds'+\int_0^t h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'}K(s',\bar{s})\times \\
\times[3(\upsilon(\bar{s}))^2\eta_\delta(\bar{s})+3\upsilon(\bar{s})(\eta_\delta(\bar{s}))^2+(\eta_\delta(\bar{s}))^3]d\bar{s}ds'\}+\Delta(\upsilon,\delta)\equiv(P_2\eta_\delta)(t), \\
\Delta(\upsilon,\delta)\equiv-\dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\int_s^t h(s')ds')(-\upsilon(s)+\upsilon(t))ds-\upsilon(t)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\int_0^t h(s')ds), \\
\eta_\delta(t)\in S_{\tilde{r}_1}(0)=\{\eta_\delta(t):\left|\eta_\delta(t)\right|\le\tilde{r}_1,\forall t\in[0,T]\}.
\end{cases} \tag{3.2.30}$$

Пусть:

$$\left\|\Delta(\upsilon,\delta)\right\|_C \le 3\left\|\upsilon(t)\right\|_C\exp\left(-\frac{1}{\delta^{1-\beta}}\right)+\omega_{\bar{\upsilon}}\left(\delta^\beta\right),(0<\beta<1), \tag{3.2.31}$$

где

$\omega_{\bar{\upsilon}}\left(\delta^\beta\right)=\sup\left\{\left|\upsilon\left(\phi_0^{-1}(t)\right)-\upsilon\left(\phi_0^{-1}(z)\right)\right|;\left|t-z\right|\le\delta^\beta\right\}$ - модуль непрерывности, а

$\phi_0^{-1}(t)$ - обратная к функции:

$$\phi_0(t)=\int_0^t h(s)\,ds$$

и при этом, учитывая оценку (3.1.26) имеют место:

$$\begin{cases}
a_4)\Big|\ \frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(t))\{-\int_0^t K(t,s')[3(\upsilon(s'))^2\eta_\delta(s')+3\upsilon(s')(\eta_\delta(s'))^2+(\eta_\delta(s'))^3]ds'+\\
+\int_0^t h_0(s')\eta_\delta(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s})+\eta_\delta(\bar{s}))^3 d\bar{s}ds'+\int_0^t h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})\times\\
\times[3(\upsilon(\bar{s}))^2\eta_\delta(\bar{s})+3\upsilon(\bar{s})(\eta_\delta(\bar{s}))^2+(\eta_\delta(\bar{s}))^3]d\bar{s}ds'\}\ \Big|\le\{C_0e^{-1}[(r_1+\tilde{r}_1)^2+r_1^2+\\
+r_1(r_1+\tilde{r}_1)](M_0+\frac{1}{\alpha}r_1T)+\frac{1}{\alpha}C_0T(r_1+\tilde{r}_1)^3\}\|\eta_\delta\|_C\le d_1\|\eta_\delta\|_C,(e^{-1}<1),\\
a_5)\Big|\ -\frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\delta}\int_s^t h(s')ds')\{-\int_0^s K(s,s')[3(\upsilon(s'))^2\eta_\delta(s')+3\upsilon(s')(\eta_\delta(s'))^2+\\
+(\eta_\delta(s'))^3]ds'+\int_0^t K(t,s')[3(\upsilon(s'))^2\eta_\delta(s')+3\upsilon(s')(\eta_\delta(s'))^2+(\eta_\delta(s'))^3]ds'+\\
+\int_0^s h_0(s')\eta_\delta(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s})+\eta_\delta(\bar{s}))^3 d\bar{s}ds'+\int_0^s h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})[3(\upsilon(\bar{s}))^2\eta_\delta(\bar{s})+\\
+3\upsilon(\bar{s})(\eta_\delta(\bar{s}))^2+(\eta_\delta(\bar{s}))^3]d\bar{s}ds'-\int_0^t h_0(s')\eta_\delta(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s})+\eta_\delta(\bar{s}))^3 d\bar{s}ds'-\\
-\int_0^t h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})[3(\upsilon(\bar{s}))^2\eta_\delta(\bar{s})+3\upsilon(\bar{s})(\eta_\delta(\bar{s}))^2+(\eta_\delta(\bar{s}))^3]d\bar{s}ds'\}ds\ \Big|\le d_2\|\eta_\delta\|_C.
\end{cases}$$

Тогда оценивая (3.2.30), получим

$$\begin{cases}
\|\eta_\delta(t)\|_C\le\left(1-L_{P_2}\right)^{-1}[3\|\upsilon(t)\|_C\exp\left(-\frac{1}{\delta^{1-\beta}}\right)+\omega_{\bar{\upsilon}}\left(\delta^\beta\right)]\xrightarrow[\delta\to0]{}0,\\
L_{P_2}=d_1+d_2<1,
\end{cases}\tag{3.2.32}$$

кроме того, функция η_δ единственным образом определяется в $C[0,T]$. Поэтому, на основе (3.2.29) при $\delta\to0$, следует

$$\upsilon_\delta(t)\to\upsilon(t),\forall t\in[0,T],\tag{3.2.33}$$

Это значит, что следует второе утверждение леммы 3.2.2.

3) Функцию $\xi_\varepsilon(t)$, так как определяется из третьего ИУ системы (3.2.21), то, с учетом резольвенты (3.2.24) частично обращая это ИУ, получим:

$$
\begin{cases}
\xi_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t h(s')ds')\{-\int\limits_0^s K(s,s')[\frac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(s'))^3 + (\xi_\varepsilon(s'))^3 + \\
+3(\upsilon(s'))^2\xi_\varepsilon(s') + 3\upsilon(s')(\xi_\varepsilon(s'))^2 + 3(\upsilon(s'))^2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(s') + 3\frac{1}{\varepsilon^2}\upsilon(s')(\Pi_\varepsilon(s'))^2 + \\
+3\frac{1}{\varepsilon}(\xi_\varepsilon(s'))^2\Pi_\varepsilon(s') + 3\frac{1}{\varepsilon^2}\xi_\varepsilon(s')(\Pi_\varepsilon(s'))^2 + 6\frac{1}{\varepsilon}\upsilon(s')\xi_\varepsilon(s')\Pi_\varepsilon(s')]ds' + \\
+\int\limits_0^t K(t,s')[\frac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(s'))^3 + (\xi_\varepsilon(s'))^3 + 3(\upsilon(s'))^2\xi_\varepsilon(s') + 3\upsilon(s')(\xi_\varepsilon(s'))^2 + \\
+3(\upsilon(s'))^2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(s') + 3\frac{1}{\varepsilon^2}\upsilon(s')(\Pi_\varepsilon(s'))^2 + 3\frac{1}{\varepsilon}(\xi_\varepsilon(s'))^2\Pi_\varepsilon(s') + 3\frac{1}{\varepsilon^2}\xi_\varepsilon(s')(\Pi_\varepsilon(s'))^2 + \\
+6\frac{1}{\varepsilon}\upsilon(s')\xi_\varepsilon(s')\Pi_\varepsilon(s')]ds' + \int\limits_s^t h_0(s')(\eta_\delta(s') + \frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(s'))\int\limits_0^{s'} K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s}) + \eta_\delta(\bar{s}) + \\
+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^3 d\bar{s}ds' + \int\limits_s^t h_0(s')\upsilon(s')\int\limits_0^{s'} K(s',\bar{s})[\frac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^3 + (\xi_\varepsilon(\bar{s}))^3 + 3(\upsilon(\bar{s}))^2\xi_\varepsilon(\bar{s}) + \\
+3\upsilon(\bar{s})(\xi_\varepsilon(\bar{s}))^2 + 3(\upsilon(\bar{s}))^2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar{s}) + 3\frac{1}{\varepsilon^2}\upsilon(\bar{s})(\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^2 + 3\frac{1}{\varepsilon}(\xi_\varepsilon(\bar{s}))^2\Pi_\varepsilon(\bar{s}) + \\
+3\frac{1}{\varepsilon^2}\xi_\varepsilon(\bar{s})(\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^2 + 6\frac{1}{\varepsilon}\upsilon(\bar{s})\xi_\varepsilon(\bar{s})\Pi_\varepsilon(\bar{s})]d\bar{s}ds'\}ds + \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))\times \\
\times\{-\int\limits_0^t K(t,s')[\frac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(s'))^3 + (\xi_\varepsilon(s'))^3 + 3(\upsilon(s'))^2\xi_\varepsilon(s') + 3\upsilon(s')(\xi_\varepsilon(s'))^2 + \\
+3(\upsilon(s'))^2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(s') + 3\frac{1}{\varepsilon^2}\upsilon(s')(\Pi_\varepsilon(s'))^2 + 3\frac{1}{\varepsilon}(\xi_\varepsilon(s'))^2\Pi_\varepsilon(s') + 3\frac{1}{\varepsilon^2}\xi_\varepsilon(s')(\Pi_\varepsilon(s'))^2 + \\
+6\frac{1}{\varepsilon}\upsilon(s')\xi_\varepsilon(s')\Pi_\varepsilon(s')]ds' + \int\limits_0^t h_0(s')(\eta_\delta(s') + \frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(s'))\int\limits_0^{s'} K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s}) + \eta_\delta(\bar{s}) + \\
+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^3 d\bar{s}ds' + \int\limits_0^t h_0(s')\upsilon(s')\int\limits_0^{s'} K(s',\bar{s})[\frac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^3 + (\xi_\varepsilon(\bar{s}))^3 + 3(\upsilon(\bar{s}))^2\xi_\varepsilon(\bar{s}) + \\
+3\upsilon(\bar{s})(\xi_\varepsilon(\bar{s}))^2 + 3(\upsilon(\bar{s}))^2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar{s}) + 3\frac{1}{\varepsilon^2}\upsilon(\bar{s})(\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^2 + 3\frac{1}{\varepsilon}(\xi_\varepsilon(\bar{s}))^2\Pi_\varepsilon(\bar{s}) + \\
+3\frac{1}{\varepsilon^2}\xi_\varepsilon(\bar{s})(\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^2 + 6\frac{1}{\varepsilon}\upsilon(\bar{s})\xi_\varepsilon(\bar{s})\Pi_\varepsilon(\bar{s})]d\bar{s}ds'\} + \Delta_2(F_\varepsilon, F, \varepsilon) + \Delta_*(\upsilon, \varepsilon) \equiv (P_3\xi_\varepsilon)(t),
\end{cases}
\tag{3.2.34}
$$

где

$$
\begin{cases}
\Delta_*(\upsilon,\varepsilon) \equiv -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t h(s')ds')(-\upsilon(s) + \upsilon(t))ds - \upsilon(t)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)), \\
\xi_\varepsilon(t) \in S_{\tilde{r}_2}(0) = \{\xi_\varepsilon(t) : |\xi_\varepsilon(t)| \le \tilde{r}_2, \forall t \in [0,T]\}. \\
\Delta_2(F_\varepsilon, F, \varepsilon) \equiv -\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t h(s)(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t h(s')ds'))(F_\varepsilon(s) - F(s))ds + \frac{1}{\varepsilon}(F_\varepsilon(t) - F(t)),
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \left\|\Delta_*\left(\upsilon,\varepsilon\right)\right\|_C \le 3\left\|\upsilon\left(t\right)\right\|_C \exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}\right)+\omega_{\bar{\upsilon}}\left(\varepsilon^{\beta}\right),(0<\beta<1), \\ \left|F_\varepsilon(t)-F(t)\right| \le \Delta_0(\varepsilon), \forall t\in[0,T], (\dfrac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0), \\ \left|\Delta_2(F_\varepsilon,F,\varepsilon)\right| \le \dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t h(\tau)\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi_0(t)-\phi_0(\tau))\Delta_0(\varepsilon)d\tau+\dfrac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon) \le \dfrac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon). \end{cases} \tag{3.2.35}$$

Проведя оценку относительно ИУ (3.2.34), получим

$$\begin{cases} \left\|\xi_\varepsilon\left(t\right)\right\|_C \le \left(1-L_{P_3}\right)^{-1}\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)+\left\|\Delta_*\left(\upsilon,\varepsilon\right)\right\|_C\right]=\Delta_3(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, (\dfrac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0), \\ 0<L_{P_3}<1, \\ P_3: S_{\tilde{r}_2}(0)\to S_{\tilde{r}_2}(0). \end{cases} \tag{3.2.36}$$

Здесь, при получении оценки (3.2.36) учтены следующие факты относительно членов, где содержится функция $\xi_\varepsilon(t)$, например:

$$\begin{cases} 1)\left| -\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\int_s^t h(s')ds')[\int_s^t h_0(\bar{s})\xi_\varepsilon(\bar{s})\int_0^{\bar{s}} K(\bar{s},\tilde{s})\dfrac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(\tilde{s}))^3 d\tilde{s}d\bar{s}]ds \right| \le \\ \le \dfrac{1}{\alpha}C_0^4(\displaystyle\int_0^\infty e^{-z}zdz)\int_0^t \dfrac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\dfrac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tilde{s}))d\tilde{s}\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C \le \dfrac{1}{\alpha}C_0^4\dfrac{1}{\varepsilon^3}[t\exp(-\dfrac{3}{\varepsilon}\phi_0(t))+ \\ +\displaystyle\int_0^t \tilde{s}\exp(-\dfrac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tilde{s}))d(\dfrac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tilde{s}))]\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C \le \dfrac{1}{\alpha}C_0^4 3^{-\frac{9}{2}}\sqrt{\varepsilon^3}[(\dfrac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}}+\int_0^\infty \rho^{\frac{9}{2}}e^{-\rho}d\rho]\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C = \\ =\dfrac{1}{\alpha}C_0^4 3^{-\frac{9}{2}}\sqrt{\varepsilon^3}[(\dfrac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}}+\dfrac{945}{32}\sqrt{\pi}]\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C=\gamma_0\sqrt{\varepsilon^3}\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C, \\ 2)\left| \dfrac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))\displaystyle\int_0^t K(t,s)(\Pi_\varepsilon(s))^2\xi_\varepsilon(s)ds \right| \le C_0^3\dfrac{1}{\varepsilon^3}t\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C \le \\ \le C_0^3\sqrt{\varepsilon^3}(\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))^{\frac{9}{2}}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C \le C_0^3\sqrt{\varepsilon^3}(\dfrac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}}\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C=\gamma_1\sqrt{\varepsilon^3}\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C, \\ \gamma_0=\dfrac{1}{\alpha}C_0^4 3^{-\frac{9}{2}}[(\dfrac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}}+\dfrac{945}{32}\sqrt{\pi}], \\ \gamma_1=C_0^3(\dfrac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}};\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-z}zdz=1, \\ \rho\equiv\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(t);\chi(\rho)\equiv\rho^k\exp(-\rho);\sup_{\rho\ge 0}\chi(\rho)=k^k\exp(-k), \\ \rho=0:\chi(0)=0;\rho\to\infty:\chi\to 0,(k=1,...,\dfrac{9}{2}). \end{cases} \tag{3.2.37}$$

Аналогичные оценки регулярности относительно малого параметра получим и для остальных членов, где содержится функция $\xi_\varepsilon(t)$.

Кроме того, такие же оценки можно указать и относительно членов, которые не содержат функцию $\xi_\varepsilon(t)$, например:

$$\begin{cases} 3)\left| \ -\dfrac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \ h(s')ds')[\int\limits_s^t \ h_0(\bar{s})\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar{s})\int\limits_0^{\bar{s}} \ K(\bar{s},\tilde{s})\dfrac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(\tilde{s}))^3 d\tilde{s}d\bar{s}]ds \ \right| \le \\ \le \dfrac{1}{\alpha}C_0^5(\int\limits_0^\infty \ e^{-z}zdz)\int\limits_0^t \ \dfrac{1}{\varepsilon^4}\exp(-\dfrac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tilde{s}))d\tilde{s} \le \dfrac{1}{\alpha}C_0^5\dfrac{1}{\varepsilon^4}[t\exp(-\dfrac{3}{\varepsilon}\phi_0(t)) + \\ +\int\limits_0^t \tilde{s}\exp(-\dfrac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tilde{s}))d(\dfrac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tilde{s}))] \le \dfrac{1}{\alpha}C_0^5 3^{-\frac{9}{2}}\sqrt{\varepsilon}[(\dfrac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}} + \int\limits_0^\infty \ \rho^{\frac{9}{2}}e^{-\rho}d\rho] = \\ = \dfrac{1}{\alpha}C_0^5 3^{-\frac{9}{2}}\sqrt{\varepsilon}[(\dfrac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}} + \dfrac{945}{32}\sqrt{\pi}] = \gamma_2\sqrt{\varepsilon}, \\ \gamma_2 = \dfrac{1}{\alpha}C_0^5 3^{-\frac{9}{2}}[(\dfrac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}} + \dfrac{945}{32}\sqrt{\pi}], \\ 4)\left| \ \dfrac{1}{\varepsilon^4}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))\int\limits_0^t \ K(t,s)(\Pi_\varepsilon(s))^3 ds \ \right| \le C_0^4\sqrt{\varepsilon}(\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))^{\frac{9}{2}}\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)) \le \\ \le C_0^4\sqrt{\varepsilon}(\dfrac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}} = \gamma_3\sqrt{\varepsilon}, \\ \gamma_3 = C_0^4(\dfrac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}}, \end{cases} \tag{3.2.38}$$

и т.д. Значит, действительно (3.2.36) следует из оценки (3.2.34).

С другой стороны, из (3.2.36) видно, что относительно ИУ (3.2.34) реализуются условия Банаха. Следовательно (3.2.34) однозначно разрешимо в $C[0,T]$, причем функция $\xi_\varepsilon(t)$ на основе (3.2.36) равномерно сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$ для любого $t \in [0,T]$. Лемма 3.2.2 доказана.

В итоге, учитывая условия леммы 3.2.2 и (3.2.20) докажем:

Теорема 3.2.1. При условиях леммы 3.2.2, на основе (3.2.20) следуют:

$$1)\begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^3(0,T)} \le \gamma_4\varepsilon^{\frac{9}{6}}, (\gamma_4 = C_0[3^{\frac{9}{2}}(2e)^{-\frac{9}{2}} + \dfrac{945}{32}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{3}}), \\ \|\Omega_\varepsilon\|_{Z^3(0,T)} \le \gamma_4\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \tag{3.2.39}$$

$$2)\begin{cases} \|\theta_\varepsilon - \upsilon\|_{Z^3(0,T)} \le \tilde{M}_0(\varepsilon), (\tilde{M}_0(\varepsilon) = 2[\Delta_3(\varepsilon)\sqrt[3]{T} + \gamma_4\varepsilon^{\frac{1}{2}}]), \\ \|\theta_\varepsilon\|_{Z^3(0,T)} \le r_* = const, \end{cases} \tag{3.2.40}$$

3) $\left\|(\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)-F(t)\right\|_{Z^3(0,T)} \le \tilde{M}(\varepsilon),\left(\tilde{M}_0(\varepsilon),\tilde{M}(\varepsilon)\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0\right).$ (3.2.41)

Доказательство. Если рассмотрим неравенство (3.2.22) леммы 3.2.2, то возведя в куб и интегрируя по переменной t, имеем

$$\int_0^t \left|\Pi_\varepsilon(\tau)\right|^3 d\tau \le C_0^3\int_0^t \exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d\tau = C_0^3[\tau\exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau))\Big|_0^t + \int_0^t \tau\exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d(\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau))] =$$

$$= C_0^3[t\exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(t)) + \int_0^t 3^{-\frac{9}{2}}\varepsilon^{\frac{9}{2}}(\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau))^{\frac{9}{2}}\exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d(\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau))] \le C_0^3 3^{-\frac{9}{2}}\varepsilon^{\frac{9}{2}}[(\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{9}{2}}\times$$

$$\times\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)) + \int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{\frac{9}{2}}d\rho] \le C_0^3 3^{-\frac{9}{2}}\varepsilon^{\frac{9}{2}}[(\frac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}} + \frac{945}{32}\sqrt{\pi}] = C_0^3\varepsilon^{\frac{9}{2}}[3^{\frac{9}{2}}(2e)^{-\frac{9}{2}} + \frac{945}{32}\sqrt{\pi}],$$

или, на основе нормы $Z^3(0,T)$, получим оценку:

$$\begin{cases} \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^3} \le C_0\varepsilon^{\frac{9}{6}}[3^{\frac{9}{2}}(2e)^{-\frac{9}{2}} + \frac{945}{32}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{3}} = \gamma_4\varepsilon^{\frac{9}{6}}, \\ \|\Omega_\varepsilon\|_{Z^3} \le \gamma_4\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

т.е., действительно имеет место (3.2.39).

Далее, чтобы показать (3.2.40), с учетом (3.2.20) имеем оценку:

$$\begin{cases} \left|\theta_\varepsilon-\upsilon\right| \le \Delta_3(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)), \\ \left|\theta_\varepsilon\right| \le \Delta_3(\varepsilon) + C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)) + r. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая (3.2.39) и нормы $Z^3(0,T)$ имеем:

$$\begin{cases} \|\theta_\varepsilon-\upsilon\|_{Z^3} \le 2[\Delta_3(\varepsilon)\sqrt[3]{T} + \gamma_4\varepsilon^{\frac{1}{2}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon), \\ \|\theta_\varepsilon\|_{Z^3(0,T)} \le 4[\sqrt[3]{T}(r+\Delta_3(\varepsilon)) + \gamma_4\varepsilon^{\frac{1}{2}}] \le r_*, (\left|\upsilon\right| \le r, \forall t\in[0,T]). \end{cases}$$

Это значит, что и выполняется неравенсто (3.2.40).

Чтобы показать (3.2.41), сперва, учитываем оценку:

$$\left|(\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)-F(t)\right| = \left|\varepsilon\theta_\varepsilon + (\Phi_0\theta_\varepsilon)(t) - F_\varepsilon(t) - \varepsilon(\theta_\varepsilon-\upsilon+\upsilon) + F_\varepsilon(t) - F(t)\right|, \quad (3.2.42)$$

где оператор $(\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)$ определяется в виде (3.2.19). Следовательно из (3.2.42) переходя по норме $Z^3(0,T)$, получим

$$\left\|(\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)-F(t)\right\|_{Z^3(0,T)} \le 4[\left\|F_\varepsilon(t)-F(t)\right\|_{Z^3} + \varepsilon\left\|\theta_\varepsilon(t)-\upsilon(t)\right\|_{Z^3} + \varepsilon r\sqrt[3]{T}] \le$$

$$\le 4[\Delta_0(\varepsilon)\sqrt[3]{T} + \varepsilon\tilde{M}_0(\varepsilon) + \varepsilon r\sqrt[3]{T}] = \tilde{M}(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

ЧиТД.

§3.2.3. Общий вывод регуляризации ОЗ в пространстве $\tilde{G}^3_{[\tilde{W}^3(D_0),Z^3(0,T)]}(D_0)$ с нормой (3.2.15)

Из полученных результатов леммы 3.2.1 и теоремы 3.2.1, на основе (3.2.6) и (3.2.7), в итоге следует:

$$\begin{cases} U=\psi_0(t)+\psi_1(t)(x-H)+\varphi_x(0)(H-x)-\varphi(H)+\varphi(x)- \\ -\int\limits_0^H (H-\tau)\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau+\int\limits_0^x (x-\tau)\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau+(\int\limits_0^t (J\theta)(s)ds)\times \\ \times\{-\int\limits_0^H (H-\tau)f(\tau)d\tau+\int\limits_0^x (x-\tau)f(\tau)d\tau\}, \\ U_t=\psi_0'(t)+\psi_1'(t)(x-H)-\int\limits_0^H (H-\tau)Q(\tau,t)d\tau+\int\limits_0^x (x-\tau)Q(\tau,t)d\tau+ \\ +(J\theta)(t)\{-\int\limits_0^H (H-\tau)f(\tau)d\tau+\int\limits_0^x (x-\tau)f(\tau)d\tau\}, \\ U_x=\psi_1(t)-\varphi_x(0)+\varphi_x(x)+\int\limits_0^x\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau+(\int\limits_0^t (J\theta)(s)ds)\int\limits_0^x f(\tau)d\tau, \\ U_{x^2}=\varphi_{x^2}(x)+\int\limits_0^t Q(x,s)ds+f(x)\int\limits_0^t (J\theta)(s)ds, \\ U_{tx}=\psi_1'(t)+\int\limits_0^x Q(\tau,t)d\tau+(J\theta)(t)\int\limits_0^x f(\tau)d\tau, \\ U_{tx^2}=Q(x,t)+f(x)(J\theta)(t), \end{cases} \tag{3.2.43}$$

или (3.2.43) трансформируется, на основе (3.2.17) с условиями (3.2.18) к виду:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t h(s)\theta(s)ds-(\Phi\theta)(t)\overset{(3.2.17)}{\equiv}(J\theta)(t)=F(t), \\ \Phi\theta\equiv\int\limits_0^t h_0(\tau)\theta(\tau)(J\theta)(\tau)d\tau-(J\theta)(t),[\int\limits_0^t h(s)\theta(s)ds\overset{(3.2.17)}{\equiv}\int\limits_0^t h_0(s)\theta(s)(J\theta)(s)ds], \\ U=\psi_0(t)+\psi_1(t)(x-H)+\varphi_x(0)(H-x)-\varphi(H)+\varphi(x)-\int\limits_0^H (H-\tau)\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\int_0^x (x-\tau)\int_0^t Q(\tau,s)dsd\tau + (\int_0^t [\int_0^s h(s')\theta(s')ds' - (\Phi\theta)(s)]ds)\{-\int_0^H (H-\tau)f(\tau)d\tau + \\ +\int_0^x (x-\tau)f(\tau)d\tau\}, \\ U_t = \psi_0'(t) + \psi_1'(t)(x-H) - \int_0^H (H-\tau)Q(\tau,t)d\tau + \int_0^x (x-\tau)Q(\tau,t)d\tau + \\ +[\int_0^t h(s')\theta(s')ds' - (\Phi\theta)(t)]\{-\int_0^H (H-\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^x (x-\tau)f(\tau)d\tau\}, \\ U_x = \psi_1(t) - \varphi_x(0) + \varphi_x(x) + \int_0^x\int_0^t Q(\tau,s)dsd\tau + (\int_0^t [\int_0^s h(s')\theta(s')ds' - (\Phi\theta)(s)]ds)\times \\ \times\int_0^x f(\tau)d\tau, \\ U_{x^2} = \varphi_{x^2}(x) + \int_0^t Q(x,s)ds + f(x)(\int_0^t [\int_0^s h(s')\theta(s')ds' - (\Phi\theta)(s)]ds), \\ U_{tx} = \psi_1'(t) + \int_0^x Q(\tau,t)d\tau + [\int_0^t h(s')\theta(s')ds' - (\Phi\theta)(t)]\int_0^x f(\tau)d\tau, \\ U_{tx^2} = Q(x,t) + f(x)[\int_0^t h(s')\theta(s')ds' - (\Phi\theta)(t)], \end{cases} \tag{3.2.43*}$$

при этом надо провести оценки выражений:

$$U - U_\varepsilon; U_t - U_{t\varepsilon}; U_{tx} - U_{tx\varepsilon}; U_x - U_{x\varepsilon}; U_{x^2} - U_{x^2\varepsilon}; U_{tx^2} - U_{tx^2\varepsilon}.$$

Причем среди этих оценок, есть некоторые выражения, т.е.:

$$U_t - U_{t\varepsilon}; U_{tx} - U_{tx\varepsilon}; U_{tx^2} - U_{tx^2\varepsilon},$$

которые связаны с разностью:

$$\begin{cases} (\Phi_0\theta_\varepsilon)(t) - F(t), \\ (\Phi_0\theta_\varepsilon)(t) \overset{(3.2.19)}{\equiv} \int_0^t h(s)\theta_\varepsilon(s)ds - (\Phi\theta_\varepsilon)(t), \\ F(t) \overset{(3.2.17)}{=} \int_0^t h(s)\theta(s)ds - (\Phi\theta)(t). \end{cases} \tag{3.2.44}$$

А в остальных случаях:

$$U - U_\varepsilon; U_x - U_{x\varepsilon}; U_{x^2} - U_{x^2\varepsilon},$$

разность (3.2.44) находится под знаком интеграла по переменной *t*.

Поэтому, для наглядности сказанного, сперва рассмотрим разность:

$$\begin{cases} U_t - U_{t\varepsilon} = -\int\limits_0^H (H-\tau)[Q(\tau,t) - Q_\varepsilon(\tau,t)]d\tau + \int\limits_0^x (x-\tau)[Q(\tau,t) - Q_\varepsilon(\tau,t)]d\tau + \\ +[F(t) - (\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)]\, f_0(x), \\ f_0(x) \equiv -\int\limits_0^H (H-\tau) f(\tau)d\tau + \int\limits_0^x (x-\tau) f(\tau)d\tau, \\ \left| f_0(x) \right| \le \gamma_2 H^2 = \gamma_3, \forall x \in [0,H], \end{cases} \tag{3.2.45}$$

где содержится (3.2.44) и чтобы оценить (3.2.45), учитываем результаты леммы 3.2.1, т.е., относительно функции Q допускаем условие:

$$\left| Q - Q_\varepsilon \right| \le \tilde{\Delta}(\varepsilon), \forall (x,t) \in \overline{D}_0\,. \tag{3.2.46}$$

Тогда, на основе (3.2.46) из (3.2.45) следует:

$$\left| U_t - U_{t\varepsilon} \right| \le H^2 \tilde{\Delta}(\varepsilon) + \gamma_3 \left| F(t) - (\Phi_0\theta_\varepsilon)(t) \right|,$$

или, учитывая норму $L^3(D_0)$ имеем

$$\begin{aligned} &\left\| U_t - U_{t\varepsilon} \right\|_{L^3(D_0)} \le \left[см.(3.2.41) \right] \le 2[H^2 \sqrt[3]{TH}\,\tilde{\Delta}(\varepsilon) + \gamma_3 \sqrt[3]{H}\,\tilde{M}\left(\varepsilon\right)] = \\ &= \Upsilon_{01}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \end{aligned} \tag{3.2.47}$$

Аналогичным образом доказываются выражения:

$$U_{tx} - U_{tx\varepsilon}; U_{tx^2} - U_{tx^2\varepsilon}$$

в пространстве $L^3(D_0)$, т.е.:

$$\begin{aligned} &\left\| U_{tx} - U_{tx\varepsilon} \right\|_{L^3(D_0)} \le \Upsilon_{02}(\varepsilon), \\ &\left\| U_{tx^2} - U_{tx^2\varepsilon} \right\|_{L^3(D_0)} \le \Upsilon_{03}(\varepsilon), (\Upsilon_{02}, \Upsilon_{03} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0). \end{aligned} \tag{3.2.48}$$

Далее, из выражений:

$$U - U_\varepsilon; U_x - U_{x\varepsilon}; U_{x^2} - U_{x^2\varepsilon},$$

для наглядности оценок, рассмотрим, например:

$$\begin{aligned} &\left| U - U_\varepsilon \right| = \Big| -\int\limits_0^H (H-\tau)\int\limits_0^t [Q(\tau,s) - Q_\varepsilon(\tau,s)]dsd\tau + \int\limits_0^x (x-\tau)\int\limits_0^t [Q(\tau,s) - Q_\varepsilon(\tau,s)]dsd\tau + \\ &+(\int\limits_0^t [F(s) - (\Phi_0\theta)(s)]ds)\, f_0(x) \Big| \le \tilde{\Delta}(\varepsilon)TH^2 + \gamma_3 \tilde{M}(\varepsilon)\sqrt[3]{T^2} = N_{01}(\varepsilon), \forall t \in [0,T] \end{aligned}$$

или имеем

$$\|U-U_{\varepsilon}\|_{C(\bar{D}_0)} \le N_{01}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (3.2.49)$$

А другие случаи:

$$U_x - U_{x\varepsilon}; U_{x^2} - U_{x^2\varepsilon}$$

оцениваются аналогично, как в случае (3.2.49), так как в этих выражениях разность (3.2.44), действительно находится под знаком интеграла. Поэтому, можем допускать:

$$\begin{cases} \|U_{x\varepsilon}-U_x\|_{C(\bar{D}_0)} \le N_{02}(\varepsilon), \\ \|U_{x^2\varepsilon}-U_{x^2}\|_{C(\bar{D}_0)} \le N_{03}(\varepsilon). \end{cases} \qquad (3.2.50)$$

Следовательно, учитывая (3.2.47), (3.2.48), (3.2.49), (3.2.50) получим оценку в смысле:

$$\tilde{W}^3(D_0) = \{(x,t)\in \bar{D}_0 : U, U_x, U_{x^2} \in C(\bar{D}_0); U_t, U_{tx}, U_{tx^2} \in L^3(D_0)\},$$

т.е.:

$$\|U_{\varepsilon}-U\|_{\tilde{W}^3(D_0)} \le \sum_{i=1}^{3} (N_{0i}(\varepsilon)+Y_{0i}(\varepsilon)) = \bar{\Delta}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (3.2.51)$$

Утверждение 3.2.1. В условиях леммы 3.2.1 и теоремы 3.2.1 и (3.2.51) ОЗ (3.2.1)-(3.2.3) регуляризируема в $\tilde{G}^3_{[\tilde{W}^3(D_0);Z^3(0,T)]}(D_0)$ в обобщенном смысле.

§3.3. Регуляризация многомерной ОЗ гиперболического типа, вырождающая некорректное нелинейное двумерное ИУВ-1

В теории многомерных ОЗ особенное место занимают задачи, где вырождаются некорректные нелинейные ИУВ-1 или ИУВ-3, где решение связаны с ФД, так как их исследования еще не завершены. Как выше отмечены в области указанных ИУВ со специальными ядрами разработаны способы исследований, связанные с МР, имеющие сингулярности относительно малого параметра [21,29,40] и др.

В частности, аналогичные задачи, встречаются в области движение жидкости в трещиноватых породах, влагопереноса [3,38,39,41,59] и др.

В связи с этим, в этом параграфе изучается многомерная ОЗ типа Гурса с дифференциальным оператором четвертого порядка гиперболического типа, вырождающая в некорректное двумерное нелинейное ИУВ-1 с требованием относительно ядро условие, которое допущено в параграфе 2.2. Для интегрилизации исследуемой ОЗ воспользуемся определенным вариантом МИО, где содержится новая искомая функция с тремя переменными в качестве аргументов: $(x,y,t)\in\overline{\Omega}$.

При этом, для доказательства регуляризируемости двумерного ИУВ-1 в обобщенном смысле в введенном пространстве, применяется МР предложенный в параграфе 2.2.

Отметим, что можно было вести функцию с аргументами (x,y,z,t), то, в этом случае из ОЗ вырождается трехмерное некорректное ИУВ-1 с переменными (x,y,z), а исследование ОЗ и в первом, и во втором случаях, соответствующие вышеуказанным аргументам аналогичны. Эти результаты можно было обобщать и задачам по переменной $x\in R^n, t\in[0,T], (или \;\; t\geq 0)$, но в конкретных приложениях в области задач переноса такие случаи почти отсутствуют. Поэтому, с точки зрения приложения ОЗ в теории влагопереноса, естественно задачи с переменными $(x,y,t)\in\overline{\Omega}$, так как в этом случае рассматриваемая задача обобщает задачу Аллера параграфа 3.2.

Пусть задается ОЗ:

$$u_{tx^2y}+\lambda u_{x^2y}=\lambda_1 u_y+\Phi_0(u,u_x,u_{x^2})+f(t)(H\theta)(x,y), \tag{3.3.1}$$

$$\begin{cases} u\left(0,y,t\right)=u_x\left(0,y,t\right)=0, \\ u\left(x,0,t\right)=0; u\left(x,y,0\right)=\varphi(x,y), \forall(x,y,t)\in\bar{\Omega}, (\Omega=(0,X)\times(0,b)\times(0,\infty)), \\ \varphi(0,y)=\varphi(x,0)=\varphi(0,0)=0, (\varphi_x(0,y)=0; u\left(t,0,0\right)=0; u\left(0,0,0\right)=0), \end{cases} \tag{3.3.2}$$

$$\begin{cases} \left(u_t+\lambda u\right)\big|_{t=T}=g\left(x,y\right), \forall(x,y)\in\bar{D}_1, \\ g\big|_{x=0}=g\big|_{y=0}=0, (g(0,0)=0; D_1=(0,X)\times(0,b); T\in(0,\infty)), \end{cases} \tag{3.3.3}$$

где

$$H\theta\equiv\int_0^x\int_0^y K(x,\tau,y,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau, \tag{*}$$

при этом относительно известных функций $\lambda,\lambda_1,\Phi_0,f,\varphi,g,K$ допускаются условия:

$$\begin{cases} C(D_0)\ni K(x,\tau,y,\nu):\left|K(.)\right|\le C_{01}, \forall(x,\tau,y,\nu)\in D_0, \\ D_0=\{(x,\tau):0\le\tau\le x\le X\}\times[0,b]\times[0,b], \\ K(.)\ge 0; K(0,0,y,y)\ne 0, \forall y\in[0,b], \\ C^{1,1,1}(D_2)\ni\Phi_0(u_1,u_2,u_3), (D_2=R\times R\times R), \left|\Phi_0\right|\le\beta_1, \left|\Phi_{0u_i}\right|\le\beta_2, (i=\overline{1,3}), \\ C^{2,1}(\bar{D}_1)\ni\varphi(x,y); \sup\limits_{\bar{D}_1}[\left|\varphi(.)\right|,\left|\varphi_x\right|,\left|\varphi_{x^2}\right|,\left|\varphi_y\right|,\left|\varphi_{xy}\right|,\left|\varphi_{x^2y}\right|]\le\beta_3, \\ C^{1,1}(\bar{D}_1)\ni g(x,y); \sup\limits_{\bar{D}_1}[\left|g(.)\right|,\left|g_x(.)\right|,\left|g_y(.)\right|,\left|g_{xy}(.)\right|]\le\beta_4, \\ C(R_+)\ni f(t):0\le f(t)\le f_{01}<\infty:\int\limits_{R_+} f(t)dt\le f_{02}=const, \\ f(T)\ne 0; \left\|f(t)\right\|_C\left|f^{-1}(T)\right|\le\beta_5; f_0=\max(f_{01},f_{02}), \beta_0=\max\beta_i, (i=\overline{1,5})). \end{cases} \tag{3.3.4}$$

Неизвестным является вектор-функция: $P=(u,\theta)$ с двумя компонентами, причем, так как из ОЗ (3.3.1)-(3.3.3) вырождается некорректное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД по переменой x, т.е.:

$$\int_0^x\int_0^y K(x,\tau,y,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau=F(x,y),$$

то регуляризируемость этого ИУ при условии

$$\begin{cases} F(x,y)\in C^{0,1}(\bar{D}_1)\cap Lip(x\,|\ \ L_F), 0<L_F=const; |F(x,y)|\le C_{02}, \forall(x,y)\in\bar{D}_1, \\ F(0,y)\ne 0; F(x,0)=0; F(x,b)\ge\alpha>0, \forall x\in[0,X] \end{cases}$$

рассматривается в обобщенном смысле в $Z^2(D_1)$ (см. гл. 2, параграф 2.2).

Замечание 3.3.1. В стационарном случае, исходная ОЗ приобретает форму:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}=\lambda_1\frac{\partial u}{\partial y}-\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}[D(u)\frac{\partial u}{\partial x}]+f_0(x)(J\theta)(y), \qquad (0.1)$$

$$\begin{cases} u\big|_{y=0}=\varphi(x), \forall x\in[0,X], \\ u_x\big|_{x=0}=\psi_1(y); U\big|_{x=X}=\psi_0(y), \forall y\in[0,b], \\ \psi_0(0)=\varphi(X), \psi_1(0)=\varphi_x(0), \end{cases} \qquad (0.2)$$

$$U_{x^2}(x_0,y)+\sum_{i=1}^{2}\tilde{\lambda}_i U_x(x_i,y)=g(y), \forall y\in[0,b], ((x_0;x_i)\in(0,X)), \qquad (0.3)$$

если

$$\begin{cases} \Phi_0(.)\equiv-\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}[D(u)\frac{\partial u}{\partial x}], \\ H\theta\equiv f_0(x)(J\theta)(y), (\lambda=1, \lambda_1=A^{-1}), \end{cases} \qquad (0.4)$$

которая была изучена в параграфе 3.2. Это значит, что исследуемая ОЗ, в самом деле обобщает задачу типа Аллера параграфа 3.2.

§3.3.1. Метод интегрилизации ОЗ (3.3.1)-(3.3.3)

В предыдущих параграфах отметили, что важным обстоятельством для интегрилизации исследуемых задач является МИП, так как указанный метод трансформирует исследуемую задачу к ИУ определенного класса. Поэтому и в нашем случае, для искомой функции многомерной ОЗ можем вести ИП:

$$\begin{aligned} u=\varphi(x,y)\exp(-\lambda t)+\int_0^t\exp(-\lambda(t-s))\int_0^x\int_0^y(x-\tau)[f(s)(H\theta)(\tau,\nu)+ \\ +Q(\tau,\nu,s)]d\nu d\tau ds\equiv(A[\theta,Q])(x,y,t). \end{aligned} \qquad (3.3.5)$$

Тогда, учитывая

$$u_t=-\lambda\varphi(x,y)\exp(-\lambda t)+\int_0^x\int_0^y(x-\tau)[f(t)(H\theta)(\tau,\nu)+Q(\tau,\nu,t)]d\nu d\tau- \qquad (3.3.6)$$

$$-\lambda\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-\tau)[f(s)(H\theta)(\tau,\nu)+Q(\tau,\nu,s)]d\nu d\tau ds,$$

и (3.3.3), (3.3.5) имеем

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-\tau)(H\theta)(\tau,\nu)d\nu d\tau = (f(T))^{-1}[g(x,y)-\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-\tau)Q(\tau,\nu,T)]d\nu d\tau] \equiv \equiv (B_1Q)(x,y), \tag{3.3.7}$$

где Q-новая искомая функция. Далее, подставляя (3.3.7) в (3.3.5) получим

$$u=\varphi(x,y)\exp(-\lambda t)+(\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))f(s)ds)(B_1Q)(x,y)+ +\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-\tau)Q(\tau,\nu,s)d\nu d\tau ds \equiv (A_1Q)(x,y,t). \tag{3.3.8}$$

Следовательно, находим частные производные из (3.3.5), которые нужны, чтобы преобразовать ДУ (3.3.1) к интегральному виду.

В самом деле, если из (3.3.5) имеем:

$$\begin{cases} u=(A[\theta,Q])(x,y,t), \\ u_t=-\lambda\varphi(x,y)\exp(-\lambda t)+\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-\tau)[f(t)(H\theta)(\tau,\nu)+Q(\tau,\nu,t)]d\nu d\tau - \\ -\lambda\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-\tau)[f(s)(H\theta)(\tau,\nu)+Q(\tau,\nu,s)]d\nu d\tau ds, \\ u_{tx}=-\lambda\varphi_x(x,y)\exp(-\lambda t)+\int\limits_0^x\int\limits_0^y [f(t)(H\theta)(\tau,\nu)+Q(\tau,\nu,t)]d\nu d\tau - \\ -\lambda\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^x\int\limits_0^y [f(s)(H\theta)(\tau,\nu)+Q(\tau,\nu,s)]d\nu d\tau ds, \\ u_{tx^2}=-\lambda\varphi_{x^2}(x,y)\exp(-\lambda t)+\int\limits_0^y [f(t)(H\theta)(x,\nu)+Q(x,\nu,t)]d\nu - \\ -\lambda\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^y [f(s)(H\theta)(x,\nu)+Q(x,\nu,s)]d\nu ds, \\ u_{tx^2y}=-\lambda\varphi_{x^2y}(x,y)\exp(-\lambda t)+f(t)(H\theta)(x,y)+Q(x,y,t)- \\ -\lambda\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))[f(s)(H\theta)(x,y)+Q(x,y,s)]ds, \\ u_y=\varphi_y(x,y)\exp(-\lambda t)+\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^x (x-\tau)[f(s)(H\theta)(\tau,y)+ \end{cases} \tag{3.3.9}$$

$$\begin{cases} +Q(\tau,y,s)]d\tau ds, \\ u_{x^2y} = \varphi_{x^2y}(x,y)\exp(-\lambda t) + \int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))[f(s)(H\theta)(x,y) + Q(x,y,s)]ds, \end{cases}$$

причем

$$\begin{cases} u_x = \varphi_x(x,y)\exp(-\lambda t) + (\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))f(s)ds)(B_2Q)(x,y) + \\ +\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^x\int\limits_0^y Q(\tau,\nu,s)d\nu d\tau ds \equiv (A_2Q)(x,y,t), \\ u_{x^2} = \varphi_{x^2}(x,y)\exp(-\lambda t) + (\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))f(s)ds)(B_3Q)(x,y) + \\ +\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^y Q(x,\nu,s)d\nu ds \equiv (A_3Q)(x,y,t), \\ u_y = \varphi_y(x,y)\exp(-\lambda t) + (\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))f(s)ds)(B_4Q)(x,y) + \\ +\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^x (x-\tau)Q(\tau,y,s)d\tau ds \equiv (A_4Q)(x,y,t), \\ (\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-\tau)(H\theta)(\tau,\nu)d\nu d\tau)'_x = \int\limits_0^x\int\limits_0^y (H\theta)(\tau,\nu)d\nu d\tau = (f(T))^{-1}[g_x(x,y) - \\ -\int\limits_0^x\int\limits_0^y Q(\tau,\nu,T)d\nu d\tau] \equiv (B_2Q)(x,y), \\ (\int\limits_0^x\int\limits_0^y (H\theta)(\tau,\nu)d\nu d\tau)'_x = \int\limits_0^y (H\theta)(x,\nu)d\nu = (f(T))^{-1}[g_{x^2}(x,y) - \\ -\int\limits_0^y Q(x,\nu,T)d\nu] \equiv (B_3Q)(x,y), \\ (\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-\tau)(H\theta)(\tau,\nu)d\nu d\tau)'_y = \int\limits_0^x (x-\tau)(H\theta)(\tau,y)d\tau = (f(T))^{-1}[g_y(x,y) - \\ -\int\limits_0^x (x-\tau)Q(\tau,y,T)d\tau] \equiv (B_4Q)(x,y). \end{cases} \qquad (3.3.10)$$

То, с учетом (3.3.9), (3.3.10) из (3.3.1) следует:

$$Q(x,y,t) = \Phi_0[(A_1Q)(x,y,t),(A_2Q)(x,y,t),(A_3Q)(x,y,t)] + \lambda_1(A_4Q)(x,y,t) \equiv (BQ)(x,y,t). \qquad (3.3.11)$$

Уравнение (3.3.11) является ИУВ-2 уравнением по переменным x, y.

Лемма 3.3.1. При условии (3.3.4) относительно известных данных

$\lambda, \lambda_1, \Phi_0, f, \varphi, g$ и

$$\begin{cases} L_B < 1, \\ B : S_r(Q_0) \to S_{r_0}(Q_0) = \{Q \in C(\bar{\Omega}) : \left|Q - Q_0\right| \le r, \forall (x, y, t) \in \bar{\Omega}\}, \end{cases} \tag{3.3.12}$$

ИУ (3.3.11) однозначно разрешимо в $C(\bar{\Omega})$, и решение строится по правилу Пикара:

$$Q_{n+1} = BQ_n, \quad (n = 0,1,2,\dots) \tag{3.3.13}$$

с оценкой погрешности

$$\left\|Q_{n+1} - Q\right\|_C \le L_B^{n+1} r \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \tag{3.3.14}$$

где Q_0 - начальное приближение, а $0 < L_B -$ коэффициент Липщица оператора B. Тогда, с учетом (3.3.8) существует единственная функция $u \in C^{2,1,1}(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Выше сказано, что (3.3.11) является ИУ-2 и при условии (3.3.12), где

$$\begin{cases} L_B = \beta_2 \sum\limits_{i=1}^{3} L_{A_i} + \left|\lambda_1\right| L_{A_4} < 1, \\ L_{A_1} = \dfrac{1}{2\lambda} bX^2 [f_0 \left|(f(T))^{-1}\right| + 1]; \; L_{A_2} = \dfrac{1}{\lambda} bX [f_0 \left|(f(T))^{-1}\right| + 1], \\ L_{A_3} = \dfrac{1}{\lambda} b [f_0 \left|(f(T))^{-1}\right| + 1]; \; L_{A_4} = \dfrac{1}{2\lambda} X^2 [f_0 \left|(f(T))^{-1}\right| + 1], \end{cases}$$

относительно оператора B реализуются условия Банаха. Поэтому ИУ (3.3.11) однозначно разрешимо в $C(\bar{\Omega})$, причем решение находим по правилу (3.3.13). Тогда, на основе выводов этого метода, имеем, что последовательность $\{Q_n\}_0^\infty$ сходится к решению Q ИУ (3.3.11) $\forall (x, y, t) \in \overline{\Omega}$, с оценкой (3.3.14).

С другой стороны, учитывая (3.3.8), (3.3.10) получим, что функции:

$$u, u_x, u_t, u_y, u_{tx}, u_{ty}, u_{xy}, u_{x^2}, u_{x^2 y}, u_{x^2 t}, u_{tx^2 y} \tag{3.3.15}$$

ограничены $\forall (x, y, t) \in \overline{\Omega}$, так как ограничена Q, $\forall (x, y, t) \in \overline{\Omega}$. Это означает, что

u определена единственным образом в классе $C^{2,1,1}(\bar{\Omega})$ по правилу:

$$\begin{cases} u_n = A_1 Q_n, (n = 0,1,2,...), \\ \|u - u_n\|_C \le \frac{1}{\lambda}(f_0 L_{B_1} + \frac{1}{2}X^2 b)\|Q - Q_n\|_C \le m_0 L_B^n r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ m_0 = \frac{1}{\lambda}(f_0 L_{B_1} + \frac{1}{2}X^2 b); L_{B_1} = \left|(f(T))^{-1}\right| b \frac{1}{2} X^2. \end{cases} \tag{3.3.16}$$

Поэтому можем допускать

$$\|u\|_{C^{2,1,1}(\bar{\Omega})} \le M_0 = const. \tag{3.3.17}$$

ЧиТД.

Примечание 3.3.1. Искомая функция ДУ (3.3.1) оценена в $C^{2,1,1}(\bar{\Omega})$. Но можем вести пространство Банаха вида $\tilde{C}^{2,1,1}(\bar{\Omega})$, где элементами является все непрерывные функции u определенные в области $\bar{\Omega}$ и имеющие непрерывные частные производные: $u_x, u_t, u_y, u_{x^2}, u_{x^2y}, u_{tx^2y}$ (отличаются от частных производных (3.3.15)), причем норма определяется в виде:

$$\|u\|_{\tilde{C}^{2,1,1}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_x\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_t\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_y\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_{x^2}\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_{x^2y}\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_{tx^2y}\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

Введенное пространство достаточно для решения ДУ (3.3.1), так как это уравнение содержит функции $u, u_x, u_t, u_y, u_{x^2}, u_{x^2y}, u_{tx^2y}$, кроме того, если $u \in C^{2,1,1}(\bar{\Omega})$, то $u \in \tilde{C}^{2,1,1}(\bar{\Omega})$. При этом выполняются условия леммы 3.3.1 в $\tilde{C}^{2,1,1}(\bar{\Omega})$ и на основе (3.3.17) следует:

$$\|u\|_{\tilde{C}^{2,1,1}(\bar{\Omega})} \le \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_x\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_t\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_y\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_{x^2}\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_{x^2y}\|_{C(\bar{\Omega})} + \\ + \|u_{tx^2y}\|_{C(\bar{\Omega})} \le M_1 = const. \tag{3.3.17*}$$

С другой стороны, выводы которые (как было отмечено в параграфе 3.1) получили на основе теоремы К. Фридрихса следуют и здесь, т.е. при выполнении условий леммы 3.3.1, так как функция u однозначным образом определяется по правилу (3.3.8) и ограничена в $\tilde{C}^{2,1,1}(\bar{\Omega})$, то по указанной теореме Фридрихса функция u оценивается и в линейном пространстве

$\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega)$ (обратно нет), когда Q, с учетом леммы 3.3.1 допускает условие:

$$|Q| \le r_0, \forall (x,y,t) \in \bar{\Omega}. \tag{3.3.18}$$

При этом: $\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega) = \{(x,y,t) \in \Omega : u, u_t, u_x \in C(\bar{\Omega}); u_y, u_{x^2}, u_{x^2 y}, u_{tx^2 y} \in L^2_{k_0(t)}(\Omega)\}$

имеет норму:

$$\begin{cases} \|u\|_{\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega)} = \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_t\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_x\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u_y\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} + \|u_{x^2}\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} + \|u_{x^2 y}\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} + \\ + \|u_{tx^2 y}\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} \le N_0, \\ \text{например :} \\ \|u_y(t,x)\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} = (\int\limits_{\Omega} k_0(s) |u_v(\tau,v,s)|^2 \, dv d\tau ds)^{\frac{1}{2}}, \\ 0 \le k_0(t) \le \tilde{k}_{01} = const : \int\limits_0^{+\infty} k_0(s) ds \le \tilde{k}_{02} = const, (\tilde{k}_0 = max(\tilde{k}_{01}, \tilde{k}_{02})). \end{cases} \tag{3.3.19}$$

Для наглядности, покажем оценки относительно функций u, u_y, т.е., в первом случае, учитывая (3.3.18) имеем:

$$\begin{cases} |u| \le |\varphi(x,y)| \exp(-\lambda t) + (\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \, |f(s)| ds) |(B_1 Q)(x,y)| + \\ + \int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x-\tau) |Q(\tau,\nu,s)| d\nu d\tau ds \le \beta_0 + \frac{1}{\lambda}(f_0 T_0 + \frac{1}{2} X^2 b r_0) = N_1, \\ |(B_1 Q)(x,y)| \le |(f(T))^{-1}| (\beta_0 + \frac{1}{2} X^2 b r_0) = T_0, \end{cases}$$

или: $\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \le N_1$. Далее, оценивая u_y получим:

$$\begin{cases} |u_y| \le |\varphi_y(x,y)| \exp(-\lambda t) + (\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \, |f(s)| ds) |(B_4 Q)(x,y)| + \\ + \int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \int\limits_0^x (x-\tau) |Q(\tau,y,s)| d\tau ds \le \beta_0 + \frac{1}{\lambda}(f_0 T_1 + \frac{1}{2} X^2 r_0) = N_2, \\ |(B_4 Q)(x,y)| \le |(f(T))^{-1}| (\beta_0 + \frac{1}{2} X^2 r_0) = T_1, \end{cases}$$

т.е.:

$$\|u_y\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} \le N_2 \sqrt{Xb} (\int\limits_0^{+\infty} k_0(s) ds)^{\frac{1}{2}} \le N_2 \sqrt{Xb\tilde{k}_0} = \tilde{N}_2.$$

Аналогичным образом, на основе (3.3.18) доказываются и следующие оценки, для остальных функций, которые содержатся в норме (3.3.19), т.е.:

$$\begin{cases} \|u_t\|_{C(\bar{\Omega})} \le N_{01}; \|u_x\|_{C(\bar{\Omega})} \le N_{02}, \\ \|u_{x^2}\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} \le N_3; \|u_{x^2y}\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} \le N_4; \|u_{tx^2y}\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} \le N_5. \end{cases}$$

Поэтому, следует (3.3.19):

$$\begin{cases} \|u\|_{\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega)} \le N_0, \\ N_0 = N_1 + N_{01} + N_{02} + \tilde{N}_2 + N_3 + N_4 + N_5. \end{cases}$$

ЧиТД.

В итоге, так как решением исследуемой ОЗ является вектор – функция $P = (u, \theta)$, то для доказательства регуляризируемости этой задачи рассматривается линейное векторное пространство вида: $\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega), Z^2(D_1)]}(\Omega)$ с нормой:

$$\|P\|_{\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega); Z^2(D_1)]}} = \|u\|_{\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega)} + \|\theta\|_{Z^2(D_1)}. \tag{3.3.20}$$

Чтобы доказать сказанное, сперва, должны показать регуляризируемости некорректного ИУВ-1, которое вырождается из исходной ОЗ.

§3.3.2. Регуляризация некорректного ИУВ-1, которое вырождается из исследуемой ОЗ. При выполнении условий леммы 3.3.1 из ИУ (3.3.7), с учетом дифференцирования по совокупности аргументов, а точнее по x два раза и по y один раз, следует ИУВ-1:

$$H\theta \equiv \int_0^x \int_0^y K(x, \tau, y, \nu)\theta^2(\tau, \nu) d\nu d\tau = F(x, y), \tag{3.3.21}$$

где

$$\begin{cases} F(x, y) \equiv (f(T))^{-1}[g_{x^2y}(x, y) - Q(x, y, T)], \\ F(x, y) \in C^{0,1}(\bar{D}_1) \cap Lip(x| \ L_F), 0 < L_F = const, \\ |F(x, y)| \le C_{02}, \forall (x, y) \in \bar{D}_1, \\ F(0, y) \ne 0; F(x, 0) = 0; F(x, b) \ge \alpha > 0, \forall x \in [0, X]. \end{cases} \tag{3.3.22}$$

Известно, что при условии (3.3.22) ИУВ-1 (3.3.21) является некорректно поставленным в $C(\overline{D}_1)$. Поэтому, чтобы доказать регуляризируемости ИУ (3.3.21) в обобщенном смысле, сперва проводим следующие математические преобразования.

Если допускаем

$$(H\theta)(x,b) \equiv \int_0^x\int_0^b K(x,\tau,b,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau = F(x,b) \tag{3.3.23}$$

и условие (3.3.22), а также условие (см. условие (2.2.4) параграфа 2.2, только здесь в скалярной форме):

$$\begin{cases} h(x) \equiv [\gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda(x)]F(x,b) \geq \alpha > 0, (1 < \gamma = const), \\ h_0(x) \equiv \gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda(x);\; 0 \leq \lambda(x) \in L^1(0,X), \\ \phi_0(x) = \int_0^x [\gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda(\tau)]F(\tau,b)d\tau = \int_0^x h(\tau)d\tau, \\ F_0(x,y) \equiv F(x,y) - F(0,y); F_0(0,y) = 0, \forall y \in [0,b], \\ \left|F_0(x,y) - F_0(\tau,y)\right| \leq L_{F_0}(x-\tau) \leq L_{F_0}M_0\int_\tau^x [\gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda(\tau)]F(\tau,b)d\tau = \\ = L_{F_0}\frac{1}{\gamma\alpha}(\phi_0(x) - \phi_0(\tau)), (\tau \leq x; M_0 = \frac{1}{\gamma\alpha}; h_0(x) \leq \alpha^{-1}h(x)), \\ (0 < \max C_{0j} = C_0, (j=1,2));\;\; x \in [0,X]: \\ x = (x^{\frac{2}{7}})^{\frac{7}{2}} \leq (\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}, (\lambda(x) = \frac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}), \\ x \leq M_1(\phi_0(x))^2, (M_1 = \sup\limits_{[0,X]}(\phi_0(x))^{\frac{3}{2}});\;\; \chi \equiv \rho^k\exp(-\rho), \\ \sup\limits_{\rho\geq 0}\chi(\rho) = k^k\exp(-k), (k = 1,2,\frac{7}{2}); \rho = 0: \chi(0) = 0; \rho \to \infty: \chi \to 0, \end{cases} \tag{3.3.24}$$

то ИУВ-1 (3.3.21) эквивалентно преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \int_0^x h(\tau)\theta(\tau,y)d\tau = (\Psi\theta)(x,y) + F(x,y), \\ \Psi\theta \equiv \int_0^x h_0(\tau)\theta(\tau,y)(H\theta)(\tau,y_0)d\tau - (H\theta)(x,y). \end{cases} \tag{3.3.25}$$

Далее, введем уравнение с малым параметром ε, вида

$$\begin{cases}\varepsilon\theta_{\varepsilon}(x,y)+(\Phi\,\theta_{\varepsilon})(x,y)=F_{\varepsilon}(x,y),\\ (\Phi\,\theta_{\varepsilon})(x,y)\equiv\int\limits_{0}^{x}h(\tau)\theta_{\varepsilon}(\tau,y)d\tau-(\Psi\,\theta_{\varepsilon})(x,y),\end{cases}\qquad(3.3.26)$$

с условием

$$\begin{cases}\theta_{\varepsilon}(0,y)=\dfrac{1}{\varepsilon}F(0,y),\\ C(\bar{D}_1)\ni F_{\varepsilon}(x,y):\left\|F_{\varepsilon}(x,y)-F(x,y)\right\|_{C}\le\Delta_0(\varepsilon),(F_{\varepsilon}(0,y)=F(0,y)).\end{cases}\qquad(3.3.27)$$

Тогда решение ИУ (3.3.26) представляя по правилу:

$$\begin{cases}\theta_{\varepsilon}(x,y)=\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_{\varepsilon}(x,y)+\upsilon(x,y)+\xi_{\varepsilon}(x,y),\\ \Pi_{\varepsilon}(0,y)=F(0,y),\upsilon(0,y)=0,\xi_{\varepsilon}(0,y)=0,\end{cases}\qquad(3.3.28)$$

получим систему ИУ относительно функций: $\Pi_{\varepsilon}(x,y),\upsilon(x,y),\xi_{\varepsilon}(x,y)$, т.е.:

$$\begin{cases}\Pi_{\varepsilon}(x,y)=-\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_{0}^{x}h(\tau)\Pi_{\varepsilon}(\tau,y)d\tau+F(0,y),\\ \int\limits_{0}^{x}h(\tau)\upsilon(\tau,y)d\tau=(\Psi\,\upsilon)(x,y)+F_0(x,y),\\ \varepsilon\xi_{\varepsilon}+\int\limits_{0}^{x}h(\tau)\xi_{\varepsilon}(\tau,y)d\tau=(\Psi[\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_{\varepsilon}+\upsilon+\xi_{\varepsilon}])(x,y)-(\Psi\,\upsilon)(x,y)+F_{\varepsilon}(x,y)-\\ -F(x,y)-\varepsilon\upsilon(x,y),\end{cases}\qquad(3.3.29)$$

где относительно этой системы можем доказать следующую лемму:

Лемма 3.3.2. В условиях (3.3.4) и (3.3.22) из системы (3.3.29) следуют выводы: а) функция $\Pi_{\varepsilon}(x,y)$ является решением первого ИУ системы (3.3.29) и допускает оценку:

$$\left|\Pi_{\varepsilon}(x,y)\right|\le C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x));\qquad(3.3.30)$$

б) $\upsilon(x,y)$ - решение второго ИУ системы (3.3.29) в $C(\bar{D}_1)$ и находится как предел параметризированного ИУ:

$$\delta\upsilon_{\delta}(x,y)+\int\limits_{0}^{x}h(\tau)\upsilon_{\delta}(\tau,y)d\tau=(\Psi\,\upsilon_{\delta})(x,y)+F_0(x,y),\qquad(3.3.31)$$

в смысле $C(\overline{D_1})$;

в) функция $\xi_\varepsilon(x,y)$ определяется единственным образом из третьего ИУ системы (3.3.29) и сходится к нулю в смысле $C(\overline{D}_1)$, когда малый параметр: $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. 1) В самом деле, во первых, из первого ИУ системы (3.3.29), на основе резольвенты:

$$R \equiv -\frac{1}{\varepsilon}h(s)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^x h(\eta)\,d\eta\right) \tag{3.3.32}$$

следует:

$$\Pi_\varepsilon(x,y) = F(0,y)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)\right), \tag{3.3.33}$$

поэтому получим оценку:

$$\left|\Pi_\varepsilon(x,y)\right| \le \left|F(0,y)\right|\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)\right) \le C_0\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)\right).$$

Значит, в самом деле имеет место (3.3.30).

2) Чтобы доказать второе утверждение, сперва, с учетом (3.3.32) преобразуем ИУ (3.3.31) к виду:

$$\begin{gathered}\upsilon_\delta(x,y) = -\frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp\left(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)\right)\{(\Psi\upsilon_\delta)(\tau,y)-(\Psi\upsilon_\delta)(x,y)+\\ +F_0(\tau,y)-F_0(x,y)\}d\tau+\frac{1}{\delta}\exp\left(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x)\right)\{(\Psi\upsilon_\delta)(x,y)+F_0(x,y)\}\equiv(P_1\upsilon_\delta)(x,y),\end{gathered} \tag{3.3.34}$$

и проводим оценки:

$$\left\{\begin{aligned}&\mathrm{a}_1)\ \left|\ \frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp\left(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)\right)\{(\Psi\upsilon_\delta)(x,y)-(\Psi\upsilon_\delta)(\tau,y)\}d\tau\ \right|\le\\ &\le\left|\ \frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp\left(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)\right)\{\int\limits_\tau^x h_0(\tilde\tau)\left|\upsilon_\delta(\tilde\tau,y)\right|\int\limits_0^{\tilde\tau}\int\limits_0^b\left|K(\tilde\tau,\bar\tau,b,\nu)\ \right|\times\right.\\ &\times\left|\upsilon_\delta^2(\bar\tau,\nu)\right|d\nu\,d\bar\tau\,d\tilde\tau+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^y\left|K(x,\bar\tau,y,\nu)-K(\tau,\bar\tau,y,\nu)\ \right|\times\left|\upsilon_\delta^2(\bar\tau,\nu)\right|d\nu\,d\bar\tau+\\ &+\int\limits_\tau^x\int\limits_0^y\left|K(x,\bar\tau,y,\nu)\ \right|\times\left|\upsilon_\delta^2(\bar\tau,\nu)\right|d\nu\,d\bar\tau\}d\tau\le 2[C_0bX\frac{1}{\alpha}r_1^2+b\frac{1}{\alpha\gamma}r_1\times\\ &\times(L_KX+C_0)]\int\limits_0^\infty e^{-z}z\,dz\left\|\upsilon_\delta\right\|_C = N_0\left\|\upsilon_\delta\right\|_C;\end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} \left| \dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))(\Psi\upsilon_\delta)(x,y) \right| \le \dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x)) \Big| \{\int\limits_0^x h_0(\tau)\left|\upsilon_\delta(\tau,y)\right| \times \\ \times[\int\limits_0^\tau \int\limits_0^b \left|K(\tau,\bar\tau,b,\nu)\right| \times \left|\upsilon_\delta^2(\bar\tau,\nu)\right| d\nu d\bar\tau]d\tau + \int\limits_0^x \int\limits_0^y \left|K(x,\tau,y,\nu)\right| \times \\ \times\left|\upsilon_\delta^2(\tau,\nu)\right| d\nu d\tau\} \le [\dfrac{1}{\alpha}(\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x)))XC_0 br_1^2 + C_0 br_1 M_1\delta(\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))^2 \times \\ \times\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))]\left\|\upsilon_\delta\right\|_C \le [\dfrac{1}{\alpha}e^{-1}XC_0 br_1^2 + C_0 br_1 M_1\delta 2^2 e^{-2}]\left\|\upsilon_\delta\right\|_C \le N_1\left\|\upsilon_\delta\right\|_C, \\ 0<\delta<1; \int\limits_0^\infty e^{-s}sds = 1, \\ \rho \equiv \dfrac{1}{\delta}\phi_0(x); \chi(\rho) = \rho^k\exp(-\rho), (k=1,2), \\ S_{r_1}(0) = \left\{\upsilon_\delta(x,y) \in C(\bar D_1): \left|\upsilon_\delta(x,y)\right| \le r_1, \forall(x,y)\in \bar D_1\right\}, \end{cases}$$

а также:

$$a_2)\ \Big| \frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{F_0(x,y)-F_0(\tau,y)\}d\tau +$$

$$+\frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))F_0(x,y) \Big| \le \Big| \frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\times$$

$$\times L_{F_0}(x-\tau)d\tau + L_{F_0}\frac{x}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x)) \le \frac{1}{\alpha\gamma}L_{F_0}\int\limits_0^x \exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\times$$

$$\times\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))) + L_{F_0}M_2\delta(\frac{1}{\delta}\phi_0(x))^2\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x)) \le$$

$$\le L_{F_0}[\frac{1}{\alpha\gamma}\int\limits_0^\infty e^{-z}zdz + 2^2e^{-2}M_2\delta] \le L_0.$$

Тогда имеет место

$$\begin{cases} \left\|\upsilon_\delta(x,y)\right\|_C \le (1-L_{P_1})^{-1}L_0 = r_1, \\ L_{P_1} = N_0 + N_1 < 1, \\ P_1 : S_{r_1}(0) \to S_{r_1}(0). \end{cases} \tag{3.3.35}$$

С другой стороны, с помощью подстановки:

$\upsilon_\delta(x,y) = \upsilon(x,y) + \mu_\delta(x,y)$, получим

$$\delta\mu_\delta(x,y)+\int\limits_0^x h(\tau)\mu_\delta(\tau,y)d\tau=(\Psi[\upsilon+\mu_\delta])(x,y)-(\Psi\upsilon)(x,y)-\delta\upsilon(x,y),$$

или, на основе резольвенты имеем:

$$\begin{aligned}&\mu_\delta(x,y)=-\frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{(\Psi[\upsilon+\mu_\delta])(\tau,y)-(\Psi\upsilon)(\tau,y)-\\&-(\Psi[\upsilon+\mu_\delta])(x,y)+(\Psi\upsilon)(x,y)\}d\tau+\frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))\{(\Psi[\upsilon+\mu_\delta])(x,y)-\\&-(\Psi\upsilon)(x,y)\}+\Delta(\delta,\upsilon)\equiv(P_2\mu_\delta)(x,y),\end{aligned}\tag{3.3.36}$$

где

$$\begin{cases}\mu_\delta(x,y)\in S_{r_2}(0)=\left\{\mu_\delta(x,y)\in C(\bar{D}_1):\left|\mu_\delta(x,y)\right|\le r_2,\forall(x,y)\in\bar{D}_1\right\},\\ \Delta(\delta,\upsilon)=-\frac{1}{\delta}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))[-\upsilon(\tau,y)+\upsilon(x,y)]d\tau-\upsilon(x,y)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)),\\ \left\|\Delta(\delta,\upsilon)\right\|_c\le L_\upsilon\{\int\limits_0^x(\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))(x-\tau)d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))+x\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)\}\le\\ \le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\{\int\limits_0^x(\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))[\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))]\ \delta d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))+\\ +\delta(\frac{1}{\delta}\phi_0(x))\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)\}\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\delta\{\int\limits_0^\infty e^{-z}zdz+e^{-1}\}\le\beta\delta,\\ L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\{\int\limits_0^\infty e^{-z}zdz+e^{-1}\}\le 2L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}=\beta,(0<L_\upsilon=const),\\ \left|\upsilon(x,y)-\upsilon(\bar{x},y)\right|\le L_\upsilon\left|x-\bar{x}\right|.\end{cases}\tag{3.3.37}$$

Следовательно, учитывая оценки относительно интегральных членов (3.3.37), где содержатся остаточные функции, т.е.:

$$\begin{cases}\mathrm{a}_3)\ \Big|\ \frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int\limits_\tau^x h_0(\tilde{\tau})[\upsilon(\tilde{\tau},y)+\mu_\delta(\tilde{\tau},y)]\times\\ \times\int\limits_0^{\tilde{\tau}}\int\limits_0^b K(\tilde{\tau},\bar{\tau},b,\nu)[2\upsilon(\bar{\tau},\nu)\mu_\delta(\bar{\tau},\nu)+\mu_\delta^2(\bar{\tau},\nu)]d\nu d\bar{\tau}d\tilde{\tau}+\\ +\int\limits_\tau^x h_0(\tilde{\tau})\mu_\delta(\tilde{\tau},y)\int\limits_0^{\tilde{\tau}}\int\limits_0^b K(\tilde{\tau},\bar{\tau},b,\nu)\upsilon^2(\bar{\tau},\nu)d\nu d\bar{\tau}d\tilde{\tau}+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^y[K(x,\bar{\tau},y,\nu)-\\ -K(\tau,\bar{\tau},y,\nu)]\times[2\upsilon(\bar{\tau},\nu)\mu_\delta(\bar{\tau},\nu)+\mu_\delta^2(\bar{\tau},\nu)]d\nu d\bar{\tau}+\int\limits_\tau^x\int\limits_0^y K(x,\bar{\tau},y,\nu)\times\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\times[2\upsilon(\bar{\tau},\nu)\mu_\delta(\bar{\tau},\nu)+\mu_\delta^2(\bar{\tau},\nu)]d\nu d\bar{\tau}\}d\tau \ \Big| \le 2\dfrac{1}{\alpha}\{bXC_0(\tilde{r}_1+r_2)(2\tilde{r}_1+r_2)+ \\
+\tilde{r}_1^2 bXC_0+b\dfrac{1}{\gamma}(2\tilde{r}_1+r_2)(L_K X+C_0)\}\left\|\mu_\delta(x,y)\right\|_C=\tilde{N}_0\left\|\mu_\delta(x,y)\right\|_C; \\
\Big|\ \dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))(\Psi[\upsilon+\mu_\delta])(x,y)-(\Psi\upsilon)(x,y)\ \Big| \le \dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))\times \\
\times[\int\limits_0^x\int\limits_0^y \left|K(x,\tau,y,\nu)\ \right|\times\left|2\upsilon(\tau,\nu)\mu_\delta(\tau,\nu)+\mu_\delta^2(\tau,\nu)\right|d\nu d\tau+\int\limits_0^x h_0(\tau)\left|\upsilon(\tau,y)+\right. \\
\left.+\mu_\delta(\tau,y)\right|\int\limits_0^\tau\int\limits_0^b \left|K(\tau,\bar{\tau},b,\nu)\right|\times\left|2\upsilon(\bar{\tau},\nu)\mu_\delta(\bar{\tau},\nu)+\mu_\delta^2(\bar{\tau},\nu)\ \right|d\nu d\bar{\tau}d\tau+ \\
+\int\limits_0^x h_0(\tau)\left|\ \mu_\delta(\tau,y)\right|\int\limits_0^\tau\int\limits_0^b \left|K(\tau,\bar{\tau},b,\nu)\ \right|\times\left|\upsilon^2(\bar{\tau},\nu)\right|d\nu d\bar{\tau}d\tau]\le[C_0 bM_2(2\tilde{r}_1\ + \\
+r_2)2^2e^{-2}\delta+C_0 bX\dfrac{1}{\alpha}(\tilde{r}_1\ +r_2)(2\tilde{r}_1\ +r_2)e^{-1}+C_0 bX\dfrac{1}{\alpha}\tilde{r}_1^2e^{-1}]\left\|\mu_\delta(x,y)\right\|_C\le \\
\le\tilde{N}_1\left\|\mu_\delta(x,y)\right\|_C,(0<\delta<1;|\upsilon|\le\tilde{r}_1,\forall(x,y)\in\bar{D}_1),
\end{cases}
$$

из (3.3.36), имеем

$$
\begin{cases}
\left\|\mu_\delta(x,y)\right\|_c\le\left(1-L_{P_2}\right)^{-1}\beta\delta, \\
L_{P_2}=\tilde{N}_0+\tilde{N}_1<1, \\
P_2:S_{r_2}(0)\to S_{r_2}(0).
\end{cases}
\tag{3.3.38}
$$

А это означает, что

$$
\upsilon_\delta(x,y)\underset{\delta\to 0}{\to}\upsilon(x,y),\forall(x,y)\in\bar{D}_1,
\tag{3.3.39}
$$

т.е., сходится в смысле $C(\bar{D}_1)$. Доказано второе утверждение леммы 3.3.2.

3) Чтобы определить $\xi_\varepsilon(x,y)$ из третьего ИУ системы (3.3.29), сперва, указанное уравнение преобразуем к ИУ:

$$
\begin{aligned}
\xi_\varepsilon(x,y)=&-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{(\Psi[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(\tau,y)-(\Psi\upsilon\ )(\tau,y)- \\
&-(\Psi[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x,y)+(\Psi\upsilon\ )(x,y)+F_\varepsilon(\tau,y)-F(\tau,y)\}d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))\times \\
&\times\{(\Psi[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x,y)-(\Psi\upsilon\ )(x,y)\}+\frac{1}{\varepsilon}[F_\varepsilon(x,y)-F(x,y)]+\Delta(\varepsilon,\upsilon),
\end{aligned}
\tag{3.3.40}
$$

где

$$\begin{cases}\Delta(\varepsilon,\upsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))[-\upsilon(\tau,y)+\upsilon(x,y)]d\tau-\upsilon(x,y)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)),\\ \left\|\Delta(\varepsilon,\upsilon)\right\|_c\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\{\int\limits_0^x(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))[\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))]\ \varepsilon d(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))+\\ +\varepsilon(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)\}\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\varepsilon\{\int\limits_0^\infty e^{-z}zdz+e^{-1}\}\le\beta\varepsilon.\end{cases}\qquad(3.3.41)$$

Далее, для оценки ИУ (3.3.40) в пространстве Банаха, учитываются следующие оценки:

$$\begin{cases}\mathrm{a}_4)\ \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\left|F_\varepsilon(\tau,y)-F(\tau,y)\right|d\tau+\\ +\frac{1}{\varepsilon}\left|F_\varepsilon(x,y)-F(x,y)\right|\le\frac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon),(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0);\\ \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int\limits_\tau^x h_0(\tilde\tau)\left|\ \upsilon(\tilde\tau,y)+\xi_\varepsilon(\tilde\tau,y)+\right.\\ +\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde\tau,y)\ \left|\times\int\limits_0^{\tilde\tau}\int\limits_0^b\right|K(\tilde\tau,\bar\tau,b,\nu)\left|[2\right|\upsilon(\bar\tau,\nu)\ \left|\times\right|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau,\nu)\ \left|+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau,\nu)+\right.\\ +2\frac{1}{\varepsilon}\left|\ \Pi_\varepsilon(\bar\tau,y)\ \right|(\left|\ \upsilon(\bar\tau,\nu)\ \right|+\left|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau,\nu)\ \right|)]d\nu d\bar\tau d\tilde\tau+\\ +\int\limits_\tau^x h_0(\tilde\tau)\left|\ \xi_\varepsilon(\tilde\tau,y)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde\tau,y)\ \right|\int\limits_0^{\tilde\tau}\int\limits_0^b\left|K(\tilde\tau,\bar\tau,b,\nu)\right|\upsilon^2(\bar\tau,\nu)d\nu d\bar\tau d\tilde\tau+\\ +\int\limits_0^\tau\int\limits_0^y\left|K(x,\bar\tau,y,\nu)-K(\tau,\bar\tau,y,\nu)\right|[2\left|\ \upsilon(\bar\tau,\nu)\ \right|\times\left|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau,\nu)\ \right|+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau,\nu)+\\ +2\frac{1}{\varepsilon}\left|\ \Pi_\varepsilon(\bar\tau,y)\ \right|(\left|\ \upsilon(\bar\tau,\nu)\ \right|+\left|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau,\nu)\ \right|)]d\nu d\bar\tau+\int\limits_\tau^x\int\limits_0^y\left|K(x,\bar\tau,y,\nu)\ \right|\times\\ \times[2\left|\ \upsilon(\bar\tau,\nu)\ \right|\times\left|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau,\nu)\ \right|+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau,\nu)+2\frac{1}{\varepsilon}\left|\ \Pi_\varepsilon(\bar\tau,y)\ \right|(\left|\ \upsilon(\bar\tau,\nu)\ \right|+\\ +\left|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau,\nu)\ \right|)+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi_\varepsilon^2(\bar\tau,y)]d\nu d\bar\tau\}d\tau\ \left|\le\frac{1}{\alpha}(\tilde r_1+\tilde r_2)[bXC_0(2\tilde r_1+\tilde r_2)+\right.\\ +2bC_0^2\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C+\frac{1}{\alpha}(\tilde r_1+\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C)[2\tilde r_1bC_0^2\times\\ \times\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+bC_0^3\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]+\frac{1}{\alpha}bC_0^3\times\end{cases}$$

$$\begin{cases} \times[2\tilde{r}_1\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau + C_0\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau] + \frac{1}{\alpha}bC_0^2[2C_0\times \\ \times\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau + (2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau]\|\xi_\varepsilon\|_C + \frac{1}{\alpha}bC_0\tilde{r}_1^2\times \\ \times[X\|\xi_\varepsilon\|_C + C_0\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau] + L_K\frac{1}{\gamma\alpha}b\{[X(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)+2C_0\times \\ \times\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau]\|\xi_\varepsilon\|_C + 2\tilde{r}_1C_0\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau + C_0^2\times \\ \times\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau\} + bC_0\{\frac{1}{\gamma\alpha}(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)\|\xi_\varepsilon\|_C + 2C_0\tilde{r}_1\times \\ \times\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau + 2C_0\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau\|\xi_\varepsilon\|_C + \\ +C_0^2\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau\} \le T_3\sqrt{\varepsilon} + \tilde{q}_1\|\xi_\varepsilon\|_C, \\ |\xi_\varepsilon(x,y)| \le \tilde{r}_2, \forall(x,y)\in\bar{D}_1, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \mathrm{a}_5)\ \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))|(\Psi[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x,y)-(\Psi\upsilon)(x,y)| \le \\ \le\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))\{\int\limits_0^x h(\tilde{\tau})|\ \upsilon(\tilde{\tau},y)+\xi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)\ |\times \\ \times\int\limits_0^{\tilde{\tau}}\int\limits_0^b |K(\tilde{\tau},\tau,b,\nu)|[2|\upsilon(\tau,\nu)\ |\times|\ \xi_\varepsilon(\tau,\nu)\ |+\xi_\varepsilon^2(\tau,\nu)+2\frac{1}{\varepsilon}|\ \Pi_\varepsilon(\tau,y)\ |\times \\ \times(|\ \upsilon(\tau,\nu)\ |+|\ \xi_\varepsilon(\tau,\nu)\ |)+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi_\varepsilon^2(\tau,\nu)]d\nu d\tau d\tilde{\tau} + \int\limits_0^x h_0(\tilde{\tau})|\ \xi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)+ \\ +\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)\ |\int\limits_0^{\tilde{\tau}}\int\limits_0^b |K(\tilde{\tau},\tau,b,\nu)|\upsilon^2(\tau,\nu)d\nu d\tau d\tilde{\tau} + \int\limits_0^x\int\limits_0^y |K(x,\tau,y,\nu)\ |\times \\ \times[2|\ \upsilon(\tau,\nu)\ |\times|\ \xi_\varepsilon(\tau,\nu)\ |+\xi_\varepsilon^2(\tau,\nu)+2\frac{1}{\varepsilon}|\ \Pi_\varepsilon(\tau,y)\ |(|\ \upsilon(\tau,\nu)\ |+ \\ +|\ \xi_\varepsilon(\tau,\nu)\ |)+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi_\varepsilon^2(\tau,\nu)]d\nu d\tau\} \le \frac{1}{\alpha}(\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)[bXC_0(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)+2bC_0^2\times \\ \times\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau]\|\xi_\varepsilon\|_C + \frac{1}{\alpha}(\tilde{r}_1+\|\xi_\varepsilon\|_C)[2\tilde{r}_1bC_0^2\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau + \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
+bC_0^3\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau] + \frac{1}{\alpha}bC_0^3[2\tilde r_1\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau + \\
+C_0\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau] + \frac{1}{\alpha}bC_0^2[2C_0\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau + \\
+(2\tilde r_1+\tilde r_2)\int_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C + \frac{1}{\alpha}bC_0\tilde r_1^2[X\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C + \\
+C_0\int_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau] + [bC_0(2\tilde r_1+\tilde r_2)\varepsilon^{\frac{5}{2}}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\times \\
\times\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)) + 2C_0bC_0\varepsilon^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))]\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C + \\
+bC_0^3\sqrt{\varepsilon}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)) \le \tilde T_3\sqrt{\varepsilon} + \tilde q_2\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C,
\end{cases}
$$

здесь учтены способы оценок интегралов, которые их сделали регулярными относительно малого параметра, т.е.:

$$
\begin{cases}
\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau \le \ldots \le \frac{1}{\varepsilon^3}x\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(x)) + \frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}\int_0^x(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\bar\tau))^{\frac{7}{2}}\times \\
\times\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau \le \frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(x)) + \\
+\int_0^{\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)}\rho^{\frac{7}{2}}\mathrm{e}^{-\rho}\,d\rho] \le \frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \int_0^\infty \rho^{\frac{7}{2}}\mathrm{e}^{-\rho}\,d\rho] = \frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \\
+\frac{105\sqrt{\pi}}{16}] = T_1\sqrt{\varepsilon}, \\
\textit{аналогично}: \\
\int_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau \le \ldots \le T_2\varepsilon^{\frac{5}{2}}, \\
\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau \le \ldots \le T_2\varepsilon^{\frac{3}{2}}, \\
\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau \le \ldots \le T_1\varepsilon^{\frac{3}{2}}, (0 < T_i = const, (i=1,2; 0<\varepsilon<1)).
\end{cases}
$$

Поэтому, имеет место

$$\begin{cases} \left\|\xi_\varepsilon\left(x,y\right)\right\|_c \le \left(1-q\right)^{-1}[\beta\varepsilon+\dfrac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)+T_0\sqrt{\varepsilon}]=\Delta_1(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ T_0=T_3+\tilde{T}_3, \\ q=\tilde{q}_1+\tilde{q}_2<1. \end{cases} \tag{3.3.42}$$

Значит, третье ИУ системы (3.3.29) однозначно разрешимо в $C(\overline{D}_1)$, причем, на основе (3.3.42) при $\varepsilon\to 0$ сходится к нулю в смысле $C(\overline{D}_1)$. ЧиТД.

В итоге, при выполнении условий лемм 3.3.1;3.3.2, с учетом (3.3.28) доказывается теорема:

Теорема 3.3.1. Пусть имеют место условия лемм 3.3.1;3.3.2. Тогда, с учетом (3.3.28) следуют:

$$1)\ \begin{cases} \left\|\Pi_\varepsilon\right\|_{Z^2(D_1)} \le \gamma_1\varepsilon^{\frac{7}{4}}, (\gamma_1=C_0\sqrt{b}\,2^{-\frac{7}{2}}[7^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\dfrac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \\ \left\|\Omega_\varepsilon\right\|_{Z^2(D_1)} \le \gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{cases} \tag{3.3.43}$$

$$2)\ \begin{cases} \|\theta_\varepsilon-\upsilon\|_{Z^2(D_1)}\le 2[\Delta_1(\varepsilon)\sqrt{Xb}+\gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}]=\tilde{M}_0(\varepsilon), \\ \|\theta_\varepsilon\|_{Z^2(D_1)}\le r_*=const, \end{cases} \tag{3.3.44}$$

$$3)\ \left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y)-F\left(x,y\right)\right\|_{Z^2(D_1)}\le\tilde{M}\left(\varepsilon\right),\left(\tilde{M}_0\left(\varepsilon\right),\tilde{M}\left(\varepsilon\right)\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0\right). \tag{3.3.45}$$

Доказательство. Рассматривая соотношение (3.3.30) леммы 3.3.2 и возведя в квадрат, и интегрируя по совокупности аргументов получим

$$\int_0^x\int_0^y \left|\Pi_\varepsilon(\tau,\nu)\right|^2 d\nu d\tau \le C_0^2 b\int_0^x\int_0^y \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d\tau d\nu = C_0^2 b[\tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))\Big|_0^x +$$

$$+\int_0^x \tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))]=C_0^2 b[x\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))+\int_0^x 2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{2}}(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))^{\frac{7}{2}}\times$$

$$\times\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))]\le C_0^2 b2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{2}}[(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))+\int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{\frac{7}{2}}d\rho]\le$$

$$\le C_0^2 b2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{2}}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\frac{105}{16}\sqrt{\pi}]=C_0^2 b2^{-7}\varepsilon^{\frac{7}{2}}[7^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}},$$

или, учитывая норму пространства $Z^2(D_1)$, имеем:

$$\begin{cases} \| \Pi_\varepsilon \|_{Z^2} \le C_0 \sqrt{b}\, 2^{-\frac{7}{2}} \varepsilon^{\frac{7}{4}} [7^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \dfrac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}} = \gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{4}}, \\ \| \Omega_\varepsilon \|_{Z^2} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{cases}$$

т.е., действительно имеет место (3.3.43).

Далее, чтобы доказать (3.3.44) на основе (3.3.28) получим оценку:

$$\begin{cases} |\theta_\varepsilon - \upsilon| \le \Delta_1(\varepsilon) + \dfrac{1}{\varepsilon}|\Pi_\varepsilon(x,y)| \le \Delta_1(\varepsilon) + \dfrac{1}{\varepsilon} C_0 \exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \\ |\theta_\varepsilon(x,y)| \le \Delta_1(\varepsilon) + C_0 \exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)) + \tilde{r}_1. \end{cases} \tag{3.3.46}$$

Поэтому из (3.3.46), проведя оценку в смысле нормы пространства $Z^2(D_1)$ и учитывая неравенство:

$$(a_1 + a_2)^n \le 2^n (a_1^n + a_2^n), \ a_1 \ge 0, a_2 \ge 0$$

имеем:

$$\| \theta_\varepsilon - \upsilon \|_{Z^2(D_1)} \le 2[\Delta_1(\varepsilon)\sqrt{Xb} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon),$$

а также получим:

$$\| \theta_\varepsilon \|_{Z^2(D_1)} \le 4[\sqrt{Xb}(\tilde{r}_1 + \Delta_1(\varepsilon)) + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] \le r_* .$$

А это означает, что и выполняется неравенсто (3.3.44).

С другой стороны, с учетом (см. (3.3.26)):

$$|(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) - F(x,y)| = |\varepsilon\theta_\varepsilon + (\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) - F_\varepsilon(x,y) - \varepsilon(\theta_\varepsilon - \upsilon + \upsilon) + F_\varepsilon(x,y) - F(x,y)|,$$

получим

$$\|(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) - F(x,y)\|_{Z^2(D_1)} \le 4[\|F_\varepsilon(x,y) - F(x,y)\|_{Z^2(D_1)} + \varepsilon\|\theta_\varepsilon(x,y) - \upsilon(x,y)\|_{Z^2(D_1)} +$$
$$+\varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{Xb}] \le 4[\Delta_0(\varepsilon)\sqrt{Xb} + \varepsilon\tilde{M}_0(\varepsilon) + \varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{Xb}] = \tilde{M}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

ЧиТД.

§3.3.3. Общий вывод регуляризации ОЗ в пространстве $\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega), Z^2(D_1)]}(\Omega)$ с нормой (3.3.20)

Из полученных результатов леммы 3.3.1 и теоремы 3.3.1, на основе (3.3.5), (3.3.7), с учетом (3.3.25), в итоге следует:

$$\begin{cases}
\int\limits_0^x h(\tau)\theta(\tau,y)d\tau-(\Psi\theta)(x,y)\overset{(3.3.25)}{\equiv}(H\theta)(x,y)=F(x,y),\\
\Psi\theta\equiv\int\limits_0^x h_0(\tau)\theta(\tau,y)(H\theta)(\tau,b)d\tau-(H\theta)(x,y),\\
[\int\limits_0^x h(\tau)\theta(\tau,y)d\tau\overset{(3.3.25)}{\equiv}\int\limits_0^x h_0(\tau)\theta(\tau,y)(H\theta)(\tau,b)d\tau],\\
u=\varphi(x,y)\exp(-\lambda t)+\int\limits_0^t\exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^x\int\limits_0^y(x-\tau)[f(s)\{\int\limits_0^\tau h(\tau')\theta(\tau',\nu)d\tau'-\\
-(\Psi\theta)(\tau,\nu)\}+Q(\tau,\nu,s)]d\nu d\tau ds,\\
u_t=-\lambda\varphi(x,y)\exp(-\lambda t)+\int\limits_0^x\int\limits_0^y(x-\tau)[f(t)\{\int\limits_0^\tau h(\tau')\theta(\tau',\nu)d\tau'-(\Psi\theta)(\tau,\nu)\}+\\
+Q(\tau,\nu,t)]d\nu d\tau-\lambda\int\limits_0^t\exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^x\int\limits_0^y(x-\tau)[f(s)\{\int\limits_0^\tau h(\tau')\theta(\tau',\nu)d\tau'-\\
-(\Psi\theta)(\tau,\nu)\}+Q(\tau,\nu,s)]d\nu d\tau ds,\\
u_x=\varphi_x(x,y)\exp(-\lambda t)+\int\limits_0^t\exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^x\int\limits_0^y[f(s)\{\int\limits_0^\tau h(\tau')\theta(\tau',\nu)d\tau'-\\
-(\Psi\theta)(\tau,\nu)\}+Q(\tau,\nu,s)]d\nu d\tau ds,\\
u_{x^2}=\varphi_{x^2}(x,y)\exp(-\lambda t)+\int\limits_0^t\exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^y[f(s)\{\int\limits_0^x h(\tau')\theta(\tau',\nu)d\tau'-\\
-(\Psi\theta)(x,\nu)\}+Q(x,\nu,s)]d\nu ds,\\
u_y=\varphi_y(x,y)\exp(-\lambda t)+\int\limits_0^t\exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^x(x-\tau)[f(s)\{\int\limits_0^\tau h(\tau')\theta(\tau',y)d\tau'-\\
-(\Psi\theta)(\tau,y)\}+Q(\tau,y,s)]d\tau ds,\\
u_{x^2y}=\varphi_{x^2y}(x,y)\exp(-\lambda t)+\int\limits_0^t\exp(-\lambda(t-s))[f(s)\{\int\limits_0^x h(\tau')\theta(\tau',y)d\tau'-\\
-(\Psi\theta)(x,y)\}+Q(x,y,s)]ds,\\
u_{tx^2y}=-\lambda\varphi_{x^2y}(x,y)\exp(-\lambda t)+f(t)\{\int\limits_0^x h(\tau')\theta(\tau',y)d\tau'-(\Psi\theta)(x,y)\}+Q(x,y,t)-\\
-\lambda\int\limits_0^t\exp(-\lambda(t-s))[f(s)\{\int\limits_0^x h(\tau')\theta(\tau',y)d\tau'-(\Psi\theta)(x,y)\}+Q(x,y,s)]ds,
\end{cases}\qquad(3.3.47)$$

при этом надо провести оценки выражений:

$$u-u_\varepsilon;u_t-u_{t\varepsilon};u_x-u_{x\varepsilon};u_y-u_{y\varepsilon};u_{x^2}-u_{x^2\varepsilon};u_{yx^2}-u_{yx^2\varepsilon},u_{tyx^2}-u_{tyx^2\varepsilon}.$$

Так как среди этих оценок, есть некоторые выражения, т.е.:

$$u_y-u_{y\varepsilon};u_{x^2}-u_{x^2\varepsilon};u_{yx^2}-u_{yx^2\varepsilon},u_{tyx^2}-u_{tyx^2\varepsilon},$$

связанные с разностью:

$$\begin{cases} (\Phi\theta_\varepsilon)(x,y)-F(x,y), \\ (\Phi\theta_\varepsilon)(x,y)\overset{(3.3.26)}{\equiv}\int\limits_0^x h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau,y)d\tau-(\Psi\theta_\varepsilon)(x,y), \\ F(x,y)\overset{(3.3.25)}{=}\int\limits_0^x h(\tau)\theta(\tau,y)d\tau-(\Psi\theta)(x,y), \end{cases} \tag{3.3.48}$$

которые не зависят от двойного интеграла по переменных *x,y*. А в остальных случаях: $u-u_\varepsilon; u_t-u_{t\varepsilon}; u_x-u_{x\varepsilon}$, указанный разность находится под знаком двойного интеграла по переменных x и y.

Поэтому, для наглядности сказанного рассмотрим, сперва разность:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon-u=&\int\limits_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-\tau)[f(s)\{(\Phi\theta_\varepsilon)(\tau,v)-F(\tau,v)\}+ \\ &+Q_\varepsilon(\tau,v,s)-Q(\tau,v,s)]dvd\tau ds, \end{aligned} \tag{3.3.49}$$

где разность (3.3.48) находится подзнаком двойного интеграла по переменных *x,y*. Для оценки (3.3.49), учитывая леммы 3.3.1 и относительно функции Q допуская условие:

$$\left|Q-Q_\varepsilon\right|\le\tilde{\Delta}(\varepsilon), \forall(x,y,t)\in\bar{\Omega}, \tag{3.3.50}$$

из (3.3.49) имеем:

$$\begin{cases} \left|u_\varepsilon-u\right|=\dfrac{1}{\lambda}f_0X\sqrt{Xb}\,\|\ \Big(\int\limits_0^x\int\limits_0^y \left|\ (\Phi\theta_\varepsilon)(\tau,v)-F(\tau,v)\ \right|^2 dvd\tau\Big)^{\frac{1}{2}}+ \\ +\dfrac{1}{2\lambda}f_0X^2b\tilde{\Delta}(\varepsilon)\le\left|(3.3.46)\right|\le\dfrac{1}{\lambda}f_0X\sqrt{Xb}\tilde{M}(\varepsilon)+\dfrac{1}{2\lambda}f_0X^2b\tilde{\Delta}(\varepsilon), \ \text{ или} \\ \left\|u_\varepsilon-u\right\|_{C(\bar{\Omega})}\le\dfrac{1}{\lambda}f_0X\sqrt{Xb}\tilde{M}(\varepsilon)+\dfrac{1}{2\lambda}f_0X^2b\tilde{\Delta}(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0. \end{cases} \tag{3.3.51}$$

Аналогично доказывается: $\left\|u_{t\varepsilon}-u_t\right\|_{C(\bar{\Omega})}, \left\|u_{x\varepsilon}-u_x\right\|_{C(\bar{\Omega})}$.

Чтобы оценить разность: $\left|u_{x^2y\varepsilon}-u_{x^2y}\right|$, т.е.:

$$\left|u_{x^2y\varepsilon}-u_{x^2y}\right|\le\frac{1}{\lambda}f_0[\left|\ (\Phi\theta_\varepsilon)(x,y)-F(x,y)\ \right|+\tilde{\Delta}(\varepsilon)], \tag{3.3.52}$$

поступим следующим образом, сперва возведем квадрат (3.3.52), а далее, учитывая весовую функцию $k_0(t)$ переходим к норме пространства $L^2_{k_0(t)}(\Omega)$, следовательно имеем

$$\begin{cases} \left\| u_{x^2y\varepsilon} - u_{x^2y} \right\|_{L^2_{k_0(t)}(\Omega)} \le 2\dfrac{1}{\lambda} f_0\{ (\int\limits_{\Omega} k_0(s) \left| (\Phi\theta_\varepsilon)(\tau,v) - F(\tau,v) \right|^2 d\tau dv ds)^{\frac{1}{2}} + \\ + \tilde{\Delta}(\varepsilon)\sqrt{bX\tilde{k}_0}\} \le 2\dfrac{1}{\lambda} f_0\{\tilde{M}(\varepsilon)\sqrt{\tilde{k}_0} + \tilde{\Delta}(\varepsilon)\sqrt{bX\tilde{k}_0}\} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ \int\limits_0^\infty k_0(s)ds \le \tilde{k}_0 = const. \end{cases} \tag{3.3.53}$$

Аналогичным образом доказываются выражения: $u_y - u_{y\varepsilon}; u_{x^2} - u_{x^2\varepsilon}; u_{tyx^2} - u_{tyx^2\varepsilon}$ в пространстве $L^2_{k_0(t)}(\Omega)$. Следовательно, учитывая вышеуказанные оценки следует:

$$\left\| u_\varepsilon - u \right\|_{\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega)} \le \Delta_*(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \cdot \tag{3.3.54}$$

В итоге, на основе полученных результатов можем сформулировать утверждение следующего вида:

Утверждение 3.3.1. В условиях леммы 3.3.1 и теоремы 3.3.1 и (3.3.54) ОЗ (3.3.1)-(3.3.3) регуляризируема в $\tilde{G}^2_{[\tilde{W}^2_{k_0(t)}(\Omega), Z^2(D_1)]}(\Omega)$ в обобщенном смысле.

§3.4. Заключение главы 3

В данной главе, рассмотрены коэффициентные ОЗ гиперболического типа в ограниченной и неограниченной областях, вырождающиеся в некорректные одномерные и двумерные ИУВ-1 с различными пределами интегрирования. Для исследования изучаемых ОЗ использованы МИО и МР в обобщенном смысле, которые позволили выявить достаточные условия разрешимости этих задач и регуляризируемости в введенных пространствах.

Результаты работы могут быть использованы и в других ОЗ математической физики, где вырождаются нелинейные многомерные некорректные ИУВ-1.

Глава 4

Регуляризационные методы и преобразование Фурье (ПФ) в ОЗ с нагруженными дифференциальными операторами второго и третьего порядков в неограниченной области, где вырождаются ИУВ-1

В этой главе изучаются коэффициентные ОЗ с нагруженными дифференциальными операторами параболического характера и типа Кортевего Де Фриза (КДФ) в неограниченной области (НО).

Для исследования этих ОЗ воспользуемся ПФ и МР в определенных пространствах, причем ОЗ такого характера, встречаются в задачах: в теории волн, в задачах, описывающие динамические процессы, которые возникают под воздействием электрической, тепловой или световой энергии [16,19,25,26,34,35,42,57,58,65,66] и др.

ПФ [16,26] - это семейство математических методов, основанных на разложении исходной непрерывной функции от времени на совокупность базисных гармонических функций (в качестве которых выступают синусоидальные функции) различной частоты, амплитуды и фазы. Из определения видно, что основная идея ПФ заключается в том, что любую функцию можно представить в виде бесконечной суммы синусоид, каждая из которых будет характеризоваться своей амплитудой, частотой и начальной фазой.

Различают несколько видов ПФ:

–Непрерывное ПФ (в англоязычной литературе: Continue Time Fourier Transform – **CTFT** или, сокращенно, **FT**);

–Дискретное ПФ (в англоязычной литературе: Discrete Fourier Transform – **DFT**);

– Быстрое ПФ (в англоязычной литературе: Fast Fourier transform – **FFT**).

Известно, что непрерывное ПФ фактически является обобщением рядов Фурье при условии, что период разлагаемой функции устремить к бесконечности. Таким образом, классическое ПФ имеет дело со спектром сигнала, взятым во всем диапазоне существования переменной.

Существует несколько видов записи непрерывного ПФ, отличающихся друг от друга значением коэффициента перед интегралом (две формы записи). Поэтому, в нашей работе укажем ПФ в следующей форме.

Если, в общем рассмотрим множество $Q(R^n)$ быстро убывающих функций на R^n (см.[16,26,35] и др.):

$$Q(R^n)=\{f\in C^{\infty}(R^n);\sup_{x\in R^n}\left|x^{\alpha}D^k f(x)\right|<+\infty\};\alpha,k\in R^n\geq 0,(\alpha_j,k_j\geq 0;D^0 f\equiv f),$$

$$x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n};\ D^k f=\frac{\partial^{|k|}f}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}},(|k|=\sum_{i=1}^{n}k_i).$$

При $f\in Q(R^n)$ ПФ: $F(s),s\in R^n$ определяется формулой

$$F(s)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_{R^n}e^{-i<x,s>}f(x)dx,(<x,s>=\sum_{j=1}^{n}x_js_j)\cdot \qquad (*)$$

Отметитм, что аналогичным образом и имеем ПФ: $F(s),s\in R^1$, т.е.:

$$F(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{R^1}e^{-ixs}f(x)dx, \qquad (4.1)$$

а формула:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{R^1}e^{ixs}F(s)ds,(x\in R^1), \qquad (4.2)$$

позволяет восстановить саму функцию: $f(x),(x\in R^1\equiv R)$, если известно ее ПФ: F, и называется формулой обращения (или обратным ПФ).

Поэтому, для простоты приводим следующие свойства, которые имеют место в случае: $x,s\in R$:

1) Если $f(x)$ абсолютно интегрируема в R, то функция (4.1) непрерывна в R и стремится к нулю при $\pm\infty$ по совокупности аргументов.

2) Если

$$\lim_{n\to\infty}\int_R \left| f_n(x) - f(x)\right| dx = 0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = F$, где F_n, F являются ПФ функций f_n, соответственно f, при этом F_n равномерно сходится к непрерывной функции $F, \forall s \in R$.

Отметим, что ПФ и обратное ПФ определены на множестве функций, для которых интегралы (4.1), (4.2) существуют в смысле главного значения по Коши. Это множество содержит в себе, в частности, множество всех абсолютно интегрируемых на всей вещественной оси функций, для которых вышеуказанные интегралы можно понимать, как обычные несобственные интегралы, а не только как интегралы в смысле главного значения.

§4.1. ОЗ с нагруженным дифференциальным оператором второго порядка в неограниченной области и ее решение на основе ПФ

Как вышеотметили, что на основе ПФ исследуются определенные классы коэффициентных ОЗ для ДУ в частных производных в НО . В связи с этим, в этом параграфе в качестве приложений ПФ к ОЗ в пространствах Банаха и Гильберта рассматриваем нагруженную КОЗ:

$$U_t + \lambda_1 U (U_{x^2}(x_0,t))^2 + \lambda_2 U = (\Upsilon\theta)(t) U(x,0), \tag{4.1.1}$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \forall x \in R, \tag{4.1.2}$$

$$U\big|_{x=0} = g(t), \forall t \in [0,T], (x_0 \in R), \tag{4.1.3}$$

где: А) $\Upsilon\theta \equiv f(t)$ или

Б) $\begin{cases} \Upsilon\theta \equiv \int\limits_0^t h(s)\Phi(s,\theta(s))ds, \\ \Phi \in C^{0,1}(D_0 = [0,T]\times R), \Phi_\theta \geq \alpha > 0, (\theta(0) = q_0, \theta \in C[0,T]), \end{cases}$

или В) $\Upsilon\theta \equiv \int\limits_0^t h(s)\theta(s)ds, (\theta(0) = 0, \theta \in L^2[0,T])$.

При этом, относительно известных функций допускаются условия:

а) $q_0, \lambda_1, 0 < \lambda_2, \alpha = const, \varphi(x) \in C^2(R), g(t) \in C^1[0,T]$,

$t \in [0,T], x \in R, \forall (x,t) \in \bar{D}, (D = R \times (0,T))$,

б) $0 < h(t) \in L^1(0,T), \phi(t) = \int\limits_0^t h(s)ds$.

Тогда, в рамках указанных условий требуется восстановить векторную функцию, в случаях (А,Б): $P_0 = (U(x,t), f(t)), (P = (U(x,t), \theta(t)))$, в

$$\begin{cases} W_C(\bar{D}) = \{(U, f) : U \in C^{2,1}(\bar{D}), f(t) \in C[0,T]\} \\ \text{или } W_C(\bar{D}) = \{(U, \theta) : U \in C^{2,1}(\bar{D}), \theta(t) \in C[0,T]\} \end{cases}$$

с нормой

$$\begin{cases} \|P_0\|_{W_C} = \|U\|_{C^{2,1}(\bar{D})} + \|f\|_{C\ [0,T]} \\ \text{или } \ \|P\|_{W_C} = \|U\|_{C^{2,1}(\bar{D})} + \|\theta\|_{C\ [0,T]}, \end{cases} \tag{4.1.4}$$

а в случае (В): $P = (U(x,t), \theta(t))$ в $W^2(\bar{D})$ с нормой:

$$\begin{cases} \|P\|_{W^2(\bar{D})} = \|U\|_{C\ (\bar{D})} + \sum\limits_{i=1}^{2} \|U_{x^i}^{(i)}\|_{C(\bar{D})} + \|U_t\|_2 + \|\theta\|_{L^2[0,T]}, \\ \|U_t\|_2 = (\sup\limits_R \int\limits_0^T |U_s(x,s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}}; \quad \|\theta\|_{L^2[0,T]} = (\int\limits_0^T |\theta(s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Отсюда видно, что результаты этого параграфа содержатся в трех пунктах данного параграфа.

§4.1.1. Интегрилизация ОЗ ((4.1.1) - (4.1.3), (А)), на основе ПФ.

Отметим, чтобы интегрилизировать указанную ОЗ, можно было применить, сперва метод интегрирование по времени, а далее, учитывать МВФ относительно искомой функции, которое содержит частную производную второго порядка по переменной *x*. Но, если с левой стороны ДУ (4.1.1) вместо искомой функции третьего члена, содержалась бы функция с производной третьего порядка по переменной *x*, то, в этом случае вышеуказанные способы были бы не применимы относительно ОЗ (такая ОЗ исследуется в следующем параграфе, причем указанный оператор является нагруженным дифференциальным оператором типа КДФ).

Значит, для исследования отмеченной ОЗ с нагруженным оператором КДФ в неограниченной области, применили бы ПФ. Поэтому, чтобы не нарушать общности исследований главы 4, и в этом параграфе, рассматриваемую ОЗ исследуем на основе ПФ в пространствах, которые введены в этом параграфе.

Для этого, сперва, учитывая те условия, которые связанны с ПФ относительно функции φ, имеем:

$$\begin{cases} \hat{\varphi}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_R e^{-i\omega x} \varphi(x) dx, \\ \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_R e^{i\omega x} \hat{\varphi}(\omega) d\omega, \end{cases} \tag{4.1.1.1}$$

Тогда, на основе

$$\begin{cases} U(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} z(\omega,0,t) \hat{\varphi}(\omega) d\omega, \\ U(x,0) = \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} z(\omega,0,t) \hat{\varphi}(\omega) d\omega, \\ U_x = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega x} z(\omega,0,t) \hat{\varphi}(\omega) d\omega, \\ U_{x^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{i\omega x} z(\omega,0,t) \hat{\varphi}(\omega) d\omega, \\ U_t = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} z'_t(\omega,0,t) \hat{\varphi}(\omega) d\omega \end{cases} \tag{4.1.1.5}$$

из (4.1.1) относительно новой искомой функции z, следует задача Коши:

$$\begin{cases} z'_t(\omega,0,t) + z(\omega,0,t)[\lambda_2 + \lambda_1 (\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_R e^{ix_0\omega} \omega^2 z(\omega,0,t) \hat{\varphi}(\omega) d\omega)^2] = f(t), \\ z\big|_{t=0} = 1, \end{cases} \tag{4.1.1.6}$$

где содержатся неизвестные функции z и f.

Следовательно, воспользуясь способом интегрилизации задачи (4.1.1.6), получим:

$$z = e^{-\lambda_2 t} + \int_0^t e^{-\lambda_2 (t-s)} \{-\lambda_1 z(\omega,0,s)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{ix_0\bar{\omega}} \bar{\omega}^2 z(\bar{\omega},0,s)\hat{\varphi}(\bar{\omega}) d\bar{\omega})^2 + \qquad (4.1.1.7)$$
$$+ f(s)\} ds.$$

Далее, воспользуясь с условиями (4.1.3),(4.1.1.5) определим функцию f, т.е.:

$$f(t) = \psi_0(t) + \lambda_2 \int_0^t e^{-\lambda_2 (t-s)} f(s) ds + \lambda_1 d^{-1} (B_0 z)(t), \qquad (4.1.1.8)$$

где

$$\begin{cases} d = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \hat{\varphi}(\omega) d\omega \neq 0, \\ \psi_0(t) \equiv d^{-1} g'(t) + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \\ (B_0 z)(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \hat{\varphi}(\omega)[z(\omega,0,t)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{ix_0\bar{\omega}} \bar{\omega}^2 z(\bar{\omega},0,t)\hat{\varphi}(\bar{\omega}) d\bar{\omega})^2 - \\ -\lambda_2 \int_0^t e^{-\lambda_2 (t-s)} z(\omega,0,s)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{ix_0\bar{\omega}} \bar{\omega}^2 z(\bar{\omega},0,s)\hat{\varphi}(\bar{\omega}) d\bar{\omega})^2 ds] d\omega. \end{cases} \qquad (4.1.1.9)$$

Так как, ядро ИУ (4.1.1.8), вырожденное ядро, т.е.:

$$K(t,s) \equiv \lambda_2 e^{-\lambda_2 (t-s)} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} e^{\lambda_2 s},$$

то учитывая резольвенту:

$$R(t,s) \equiv \lambda_2 e^{-\lambda_2 (t-s)} e^{\lambda_2 (t-s)} = \lambda_2,$$

из (4.1.1.8) следует:

$$f(t) = \psi_0(t) + \lambda_2 \int_0^t [\psi_0(s) + \lambda_1 d^{-1} (B_0 z)(s)] ds + \lambda_1 d^{-1} (B_0 z)(t) \equiv (\bar{B} z)(t). \qquad (4.1.1.10)$$

Следовательно, (4.1.1.10) подставляя в (4.1.1.7) имеем ИУ относительно функции $z(\omega,0,t)$:

$$z = e^{-\lambda_2 t} + \int_0^t e^{-\lambda_2 (t-s)} \{-\lambda_1 z(\omega,0,s)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{ix_0\bar{\omega}} \bar{\omega}^2 z(\bar{\omega},0,s)\hat{\varphi}(\bar{\omega}) d\bar{\omega})^2 + \qquad (4.1.1.11)$$
$$+(\bar{B} z)(s)\} ds \equiv (Bz)(\omega,0,t).$$

Лемма 4.1.1. Так как (4.1.1.11) является ИУВ-2 по переменной *t*, то однозначно разрешимо в $C(\bar{D})$, причем решение (4.1.1.11) строится МП:

$$z_{n+1} = (Bz_n)(\omega,0,t),\ (n = 0,1...)$$

и при этом имеет место

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z(\omega,0,t), \forall(\omega,0,t) \in \bar{D}. \tag{4.1.1.12}$$

Доказательство. Чтобы доказать лемму 4.1.1, сперва рассмотрим следующие выводы.

1) Если оператор B допускают условия, т.е. является сжимающим оператором и отображает область $S_r(z_0)$ в себя, т.е.:

$$\begin{cases} q = L_B < 1, \\ B : S_r(z_0) \to S_r(z_0), \\ L_B = 2(r_1 d_0)^2[\frac{1}{\lambda_2}|\lambda_1| + 2(1+\lambda_2 T)\left|\lambda_1 d^{-1}\right|], \\ \left\|B_z - B_{\bar{z}}\right\|_C \le L_B \left\|z - \bar{z}\right\|_C, (|z| \le r_1, \forall(\omega,0,t) \in \bar{D}), \\ S_r(z_0) = \left\{z \in C(\bar{D}) : |z - z_0| \le r, \forall(\omega,0,t) \in \bar{D}\right\}, \\ d_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \omega^2 |\hat{\varphi}(\omega)| d\omega, (e^{ix_0\omega} = \cos(x_0\omega) + i\sin(x_0\omega)), \end{cases} \tag{4.1.1.13}$$

то, на основе условия принципа Банаха ИУ (4.1.1.11) однозначно разрешимо в $C(\bar{D})$ и это решение строится МП, причем пикаровский процесс имеет скорость сходимости порядка геометрической прогрессии:

$$\left\|z_n - z\right\|_C \le L_B^n r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ (0 < L_B = const < 1),$$

где $0 = z_0$ - начальное приближение.

2) Если условие $L_B < 1$ не выполняется, то и в этом случае (4.1.1.11) будет однозначно разрешимо в указанном классе.

В самом деле, используя метод подобластей, а точнее, разбивая промежуток $[0,\mathrm{T}]$ на n равномерных частей, с учетом, что шаг: $h \le (2M_0)^{-1}$, (здесь коэффициент Липшица операторов, считаем: $(\gamma_0 = M_0 h)$), получим сжимающие операторы B_i, $(i = 0,1,\dots,n)$, соответствующие промежуткам

$[0,t_1],[t_1,t_2],\dots,[t_{n-1},t_n]$ для любого $\omega\in R$ относительно z_i, $\left(i=\overline{1,n}\right)$, и при этом учитывается:

$$z_i\left(t_i\right)=z_{i+1}\left(t_i\right),\ \left(i=1,\dots,n-1\right).$$

Это означает, что уравнение (4.1.1.11) имеет единственное решение, когда условие $L_B<1$, не выполняется относительно (4.1.1.11).

Поэтому, можем сказать, что в общем, если относительно ИУ (4.1.1.11) воспользуемся МП, то скорость сходимость этого процесса будет факториальным [42,56], при этом имеет место (4.1.1.12). ЧиТД.

Значит, функция $z(\omega,0,t)$ считается известным. Кроме того, с учетом (4.1.1.6) допускается, что функция $z_t(\omega,0,t)$ также известным. Следовательно, на основе (4.1.1.10) можем считать, что и функция $f(t)$ известным, причем:

$$\begin{cases} z'_t(\omega,0,t)=z(\omega,0,t)[\lambda_2+\lambda_1(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_R e^{ix_0\omega}\omega^2 z(\omega,0,t)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2]+f(t),\\ \left|z'_t(\omega,0,t)\right|\le r_1[\lambda_2+\left|\lambda_1\right|r_1^2d_0^2]+C_{01}\le r_2,\forall(\omega,0,t)\in\bar{D},\\ \left|z\right|\le r_1,\forall(\omega,0,t)\in\bar{D},\\ d_0=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_R \omega^2\left|\hat{\varphi}(\omega)\right|d\omega,\\ \text{здесь:}\quad f(t)\equiv F_0(t)\in C[0,T]:\left|F_0(t)\right|\le C_{01},\forall t\in[0,T]. \end{cases}\tag{4.1.1.14}$$

В результате, на основе (4.1.1.14) из (4.1.1.5) следуют, что функции: U,U_t,U_x,U_{x^2} равномерно ограничены в области $\bar{D}$.

В самом деле, оценивая (4.1.1.5) с учетом (4.1.1.14), имеем оценки:

$$\begin{cases} \left|U(x,t)\right|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}z(\omega,0,t)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\right|\le\left|d\right|r_1=C_1,\forall(x,t)\in\bar{D},\\ \left|U_x\right|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega x}z(\omega,0,t)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\right|\le d_1r_1=C_2,\forall(x,t)\in\bar{D},\\ \left|U_{x^2}\right|=\left|-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2e^{i\omega x}z(\omega,0,t)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\right|\le d_0r_1=C_3,\forall(x,t)\in\bar{D}, \end{cases}\tag{4.1.1.15}$$

$$\begin{cases} |U_t| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} z_t'(\omega,0,t)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |z_t'(\omega,0,t)| \times |\hat{\varphi}(\omega)| d\omega \le \\ \le \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r_2 |\hat{\varphi}(\omega)| d\omega \le r_2 |d| = C_4, \forall (x,t) \in \bar{D}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\omega\hat{\varphi}(\omega)| d\omega \le d_1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \|U(x,t)\|_{C(\bar{D})} \le C_1; \|U_x(x,t)\|_{C(\bar{D})} \le C_2, \\ \|U_{x^2}(x,t)\|_{C(\bar{D})} \le C_3; \|U_t(x,t)\|_{C(\bar{D})} \le C_4. \end{cases}$$

Следовательно, на основе нормы $C^{2,1}(\bar{D})$ получим

$$\|U\|_{C^{2,1}(\bar{D})} \le N_0, (N_0 = \sum_{i=1}^{4} C_i). \tag{4.1.1.16}$$

Значит, в итоге из (4.1.4) следует

$$\|P_0\|_{W_C(\bar{D})} = \|U\|_{C^{2,1}(\bar{D})} + \|f\|_{C[0,T]} \le N_0 + C_{01} = N_1. \tag{4.1.1.17}$$

Поэтому, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.1.1. Пусть функции $\varphi(x), g(t)$ допускают вышесказанные ограничения при этом имеют место условия леммы 4.1.1 и (4.1.1.17). Тогда ОЗ ((4.1.1) - (4.1.3), (А)) корректна в $W_C(\bar{D})$.

§4.1.2. Регуляризация ОЗ (4.1.1)-(4.1.3) при условии (Б) в пространстве Банаха

В этом пункте допустим, что имеют место условия леммы 4.1.1 и (4.1.1.14), то, на основе (Б) и:

$$\begin{cases} F_0(t) \in C_\phi^1[0,T], F_0(0) = 0; |F_0(t)| \le C_{01}, \forall t \in [0,T], \\ |F_0(t) - F_0(s)| \le \overline{C_0} |\phi(t) - \phi(s)|, \end{cases} \tag{4.1.2.1}$$

следует ИУВ-1:

$$\int\limits_0^t h(s)\Phi(s,\theta(s))ds = F_0(t), \tag{4.1.2.2}$$

где условие (4.1.2.1) отличается от (4.1.1.14). Кроме того, учитывая относительно функции Φ условие (Б), вместо (4.1.2.2) имеем:

$$\begin{cases} \int_0^t h(s)\nu(s)ds = F_0(t), \\ \nu = \Phi(t,\theta(t)), \\ \theta(t) = G(t,\nu(t)), \\ \left|G(t,\nu_1) - G(t,\nu_2)\right| \le L_G \left|\nu_1 - \nu_2\right|, (0 < L_G = const), \\ \text{или} \\ \theta = \theta - \rho\Phi(t,\theta(t)) + \rho\nu(t) \equiv E\theta, (0 < \rho = const), \\ \left|1 - \rho\Phi_\theta(t,\theta)\right| \le k = const < 1, \forall t \in [0,T], \\ \nu(0) = \Phi(0,\theta(0)) = q_1. \end{cases} \quad (4.1.2.3)$$

В рамках допустимых условий, с учетом малого параметра $\varepsilon \in (0,1)$, введем ИУ вида (классический вид МР [2,31] и др.):

$$\begin{cases} \varepsilon\nu_\varepsilon(t) + \int_0^t h(s)\nu_\varepsilon(s)ds = F_0(t) + \varepsilon q_1, \forall t \in [0,T], \\ \nu_\varepsilon(0) = q_1 \end{cases} \quad (4.1.2.4)$$

или, учитывая резольвенту относительно ядра уравнения (4.1.2.4), получим

$$\nu_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t) - \phi(s)))[F_0(s) - F_0(t)]ds + (\frac{1}{\varepsilon}F_0(t) + q_1)\times$$
$$\times\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t)). \quad (4.1.2.5)$$

Тогда, оценивая ИУ (4.1.2.5), имеем

$$\begin{cases} |\nu_\varepsilon(t)| \le \bar{C}_0(\int_0^\infty e^{-\rho}\rho d\rho + e^{-1}) + \left|q_1\right| \le 2\bar{C}_0 + \left|q_1\right| = M_0, \\ \int_0^\infty e^{-\rho}\rho d\rho = 1; \sup \mu e^{-\mu} = e^{-1} < 1. \end{cases} \quad (4.1.2.6)$$

Следовательно, на основе

$$\theta_\varepsilon = \theta + \xi_\varepsilon, \forall t \in [0,T], \quad (4.1.2.7)$$

получим из (4.1.2.4):

$$\varepsilon\xi_\varepsilon(t) + \int_0^t h(s)\xi_\varepsilon(s)ds = -\varepsilon(\nu(t) - \nu(0))$$

или

$$\begin{cases} \xi_\varepsilon(t) = -\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))\ \{-\nu(s)+\nu(t)\}ds-(\nu(t)-\nu(0))\times \\ \times\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi(t)) \equiv \Delta(\nu,\varepsilon), \\ \left|\Delta(\nu,\varepsilon)\right| \le L_\nu(1+e^{-1})\varepsilon \le 2L_\nu\varepsilon, \\ \ \left|\nu(t)-\nu(s)\right| \le L_\nu\left|\phi(t)-\phi(s)\right|. \end{cases} \tag{4.1.2.8}$$

Поэтому, из оценки (4.1.2.8) следует

$$\|\xi_\varepsilon(t)\|_C \le 2L_\nu\varepsilon. \tag{4.1.2.8}$$

Значит, с учетом (4.1.2.7) имеем:

$$\begin{cases} \left\|\nu_\varepsilon-\nu\right\|_C \le 2L_\nu\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ \left\|\nu\right\|_C \le \left\|\nu-\nu_\varepsilon\right\|_C + \left\|\nu_\varepsilon\right\|_C \le 2L_\nu\varepsilon + M_0 \le r_0 = const, (0<\varepsilon<1). \end{cases} \tag{4.1.2.9}$$

В итоге, учитывая (4.1.2.3) получим:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(t) = G(t,\nu_\varepsilon(t)), \\ \left|\theta_\varepsilon(t)-\theta(t)\right| \le L_G\left|\nu_\varepsilon-\nu\right| \le 2L_G L_\nu\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \forall t\in[0,T], \\ \text{т.е.: } \left\|\theta_\varepsilon-\theta\right\|_C \le 2L_G L_\nu\varepsilon, (\left\|\theta_\varepsilon\right\|_C \le M_1), \\ \text{или:} \\ \theta_\varepsilon = \theta_\varepsilon - \rho\Phi(t,\theta_\varepsilon(t)) + \rho\nu_\varepsilon(t) \equiv E\theta_\varepsilon, (0<\rho=const), \\ \left\|\theta_\varepsilon-\theta\right\|_C \le (1-k)^{-1}\rho 2L_\nu\varepsilon = M_2\varepsilon, \\ \left|1-\rho\Phi_\theta(t,\theta)\right| \le k = const < 1, \forall t\in[0,T]. \end{cases} \tag{4.1.2.10}$$

Лемма 4.1.2. При условиях леммы 4.1.1 и (4.1.2.1), (4.1.2.10) ИУВ-1 (4.1.2.2) регуляризируема в $C[0,T]$.

В итоге, на основе (4.1.1.6), (4.1.1.7), (4.1.1.14) и (4.1.2.10) имеем следующие оценки:

$$\begin{cases} \left|z_\varepsilon - z\right| = \Big| \displaystyle\int\limits_0^t e^{-\lambda_2(t-s)}\{-\lambda_1 z_\varepsilon(\omega,0,s)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R e^{ix_0\varpi}\varpi^2 z_\varepsilon(\varpi,0,s)\hat{\varphi}(\varpi)d\varpi)^2 + \\ +\lambda_1 z(\omega,0,s)(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_R e^{ix_0\varpi}\varpi^2 z(\varpi,0,s)\hat{\varphi}(\varpi)d\varpi)^2 + \int\limits_0^s (h(s')\nu_\varepsilon(s'))ds' - \\ -F_0(s))ds\}\Big| \le L_B\left\|z_\varepsilon - z\right\|_C + \displaystyle\int\limits_0^t e^{-\lambda_2(t-s)}\left|\varepsilon\nu_\varepsilon(s) - \varepsilon\nu_\varepsilon(s) + \int\limits_0^s h(s')\nu_\varepsilon(s')ds' - \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -F_0(s)-\varepsilon q_1+\varepsilon q_1\Big|ds \overset{(4.1.2.4)}{\le} L_B\|z_\varepsilon - z\|_C + M_3(\varepsilon), \forall(\omega,0,t)\in\bar{D}, \\ \text{т.е.:} \\ \|z_\varepsilon - z\|_C \le (1-L_B)^{-1}M_3(\varepsilon)=\Delta_0(\varepsilon), (\frac{1}{\lambda_2}(M_0+|q_1|)\varepsilon = M_3(\varepsilon); L_B<1), \\ |z'_{t\varepsilon}-z'_t| = \Big| -z_\varepsilon(\omega,0,t)[\lambda_2+\lambda_1(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R e^{ix_0\omega}\omega^2 z_\varepsilon(\omega,0,t)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2]+ \\ +z(\omega,0,t)[\lambda_2+\lambda_1(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R e^{ix_0\omega}\omega^2 z(\omega,0,t)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2]+\int\limits_0^t h(s)\nu_\varepsilon(s)ds - \\ -F_0(t) \Big| \overset{(4.1.2.4)}{\le} (\lambda_2+L_B)\Delta_0(\varepsilon)+\varepsilon M_0 = M_4(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \forall(\omega,0,t)\in\bar{D}. \end{cases} \tag{4.1.2.11}$$

Следовательно, с учетом (4.1.1.16), (4.1.2.10) получим:

$$\begin{cases} |U_\varepsilon - U| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}[z_\varepsilon(\omega,0,t)-z(\omega,0,t)]\hat{\varphi}(\omega)d\omega\right| \le |d|\Delta_0(\varepsilon), \forall(x,t)\in\bar{D}, \\ |U_{x\varepsilon}-U_x| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega x}[z_\varepsilon(\omega,0,t)-z(\omega,0,t)]\hat{\varphi}(\omega)d\omega\right| \le \\ \le d_1\Delta_0(\varepsilon), \forall(x,t)\in\bar{D}, \\ |U_{x^2\varepsilon}-U_{x^2}| = \left|-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{i\omega x}[z_\varepsilon(\omega,0,t)-z(\omega,0,t)]\hat{\varphi}(\omega)d\omega\right| \le \\ \le d_0\Delta_0(\varepsilon), \forall(x,t)\in\bar{D}, \\ |U_{t\varepsilon}-U_t| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}[z'_{t\varepsilon}(\omega,0,t)-z'_t(\omega,0,t)]\hat{\varphi}(\omega)d\omega\right| \le \\ \le |d|M_4(\varepsilon), \forall(x,t)\in\bar{D}, \end{cases}$$

или

$$\|U_\varepsilon - U\|_{C^{2,1}(\bar{D})} \le (d+d_0+d_1)\Delta_0(\varepsilon)+|d|M_4(\varepsilon) = M_5(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{4.1.2.12}$$

Тогда, учитывая (4.1.2.10) и (4.1.2.12) из нормы (4.1.4) следует

$$\begin{cases} \|\tilde{V}_\varepsilon\|_{W_C(\bar{D})} = \|U_\varepsilon - U\|_{C^{2,1}(\bar{D})} + \|\nu_\varepsilon - \nu\|_{C[0,T]} \le M_5(\varepsilon)+2L_\nu\varepsilon = M_6(\varepsilon), \\ \tilde{V}_\varepsilon = (U_\varepsilon - U, \nu_\varepsilon - \nu). \end{cases} \tag{4.1.2.13}$$

Поэтому, в итоге имеем:

$$\begin{cases} \|V_\varepsilon\|_{W_C(\bar{D})} = \|U_\varepsilon - U\|_{C^{2,1}(\bar{D})} + \|\theta_\varepsilon - \theta\|_{C[0,T]} \le M_5(\varepsilon) + 2L_G L_v \varepsilon = M_7(\varepsilon), \\ V_\varepsilon = (U_\varepsilon - U, \theta_\varepsilon - \theta). \end{cases} \qquad (4.1.2.14)$$

Теорема 4.1.2. Если выполняются условия леммы 4.1.2 и (4.1.2.14), то ОЗ ((4.1.1) - (4.1.3), (Б)) регуляризируема в $W_C(\bar{D})$.

Замечание 4.1.1. Если функция: $\Phi(t,\theta) \equiv \theta(t), (\theta(0)=0)$, то вместо (4.1.2.2) получим линейное ИУВ-1 вида (4.1.2.3). При этом имеют место все выводы, которые получены относительно этого ИУВ-1 с однородным начальным значением относительно искомой функции.

Пример 4.1.1. Пусть (см. замечание 4.1.1):

$$\begin{cases} \int_0^t h(s)\theta(s)ds = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}, \\ C^1[0,1] \ni F_0(t) \equiv \frac{1}{3}\sqrt{t^3}; F_0(0)=0; h(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}; \phi(t) = \int_0^t h(s)ds = \sqrt{t}; \theta(0)=0, \end{cases} \qquad (1)$$

где функции $h(t), F_0(t)$ заданы виде (1). Тогда, естественно $\theta(t)=t$, но это докажем на основе результатов п. 4.1.2 в $C[0,1]$.

Решение. На основе ИУ (4.1.2.4) имеем:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{s}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))\frac{1}{3}s^{\frac{3}{2}}ds + \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} = \\ = |\text{проведем интегрирования по частям два раза}| = t - \int_0^t \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))ds, \\ |\theta_\varepsilon(t)| \le 1 + \int_0^t \frac{2\sqrt{T}}{2\sqrt{s}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))ds = 1 + 2\varepsilon\sqrt{T}\int_0^t \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s))) \times \\ \times d(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s))) \le 1 + 2\varepsilon\sqrt{T}[1-\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t))] \le 1 + 2\varepsilon\sqrt{T}, \forall t \in [0,1], \end{cases} \qquad (2)$$

или

$$\|\theta_\varepsilon\|_C \le 1 + 2\varepsilon\sqrt{T} \le 1 + 2\sqrt{T} = M_0. \qquad (3)$$

Это означает, что $\theta_\varepsilon(t)$ ограничена по норме $C[0,1]$. Кроме того, из (3) видно, что при $\varepsilon \to 0$ следует

$$\theta_\varepsilon(t) = t - \int_0^t \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))ds \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} t = \theta(t), \tag{4}$$

так как

$$\int_0^t \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))ds \le 2\sqrt{T}\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{s}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))ds =$$
$$= 2\varepsilon\sqrt{T}\int_0^t \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))d(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s))) \le 2\varepsilon\sqrt{T} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Значит:

$$\begin{cases} \xi_\varepsilon(t) = -\int_0^t \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))ds, \\ \left|\xi_\varepsilon(t)\right| \le 2\varepsilon\sqrt{T}, \forall t \in [0,1] \end{cases} \tag{5}$$

является остаточной функцией, которая вводится на основе (4.1.2.6).

В самом деле, если учтем (4.1.2.6), то из (2) имеем:

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon(t) &= -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{s}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))\ (-\theta(s))ds - \theta(t) = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{s}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))\ (-\theta(s)+\theta(t))ds - \theta(t)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\left|\theta(t)-\theta(s)\right| \le \left|t-s\right| \le \left|\phi(t)-\phi(s)\right|, (L_\theta = 1).$$

Тогда, на основе (4.1.2.7) имеет место (4.1.2.8).

С другой стороны, допуская $\theta = t$ вычисляем (6), т.е.:

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon(t) &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{s}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))\ sds - t = s\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))\Big|_0^t - \\ &-\int_0^t \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))ds - t = -\int_0^t \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))ds, \end{aligned} \tag{7}$$

то, действительно имеет место (5).

В итоге, получим

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \theta(t) = t, \\ \left\|\theta\right\|_C \le \left\|\theta-\theta_\varepsilon\right\|_C + \left\|\theta_\varepsilon\right\|_C \le 2\sqrt{T}\varepsilon + 1 + 2\sqrt{T} \le 4\sqrt{T} + 1 = r_0 = const, (0 < \varepsilon < 1). \end{cases} \tag{8}$$

ЧиТД.

Замечание 4.1.2. С другой стороны, не всегда изучаемые задачи корректно поставлены, так как в исследуемых ОЗ в неограниченной области, могут быть вырождены условно-корректные ИУВ-1. В этом случае, не могут иметь место результаты пункта 4.1.2 параграфа 4.1, т.е. ОЗ может не руляризируема в пространстве Банаха. Поэтому, в следующем пункте изучается ОЗ такого типа.

§4.1.3. Регуляризация ОЗ (4.1.1)-(4.1.3) при условии (В) в пространстве Гильберта

Пусть выполняются условия леммы 4.1.1 и имеет место (4.1.1.14). Тогда, учитывая (В) и:

$$\begin{cases} F_0(t) \in C[0,T]: \\ F_0(0) = 0, \\ \left|F_0(t) - F_0(s)\right| \le C_0 \left|\phi(t) - \phi(s)\right|, \\ F_{0\varepsilon}(t) \in C^1_{\phi(t)}[0,T]: F_{0\varepsilon}(0) = 0, \\ \left\|F_{0\varepsilon}(t) - F_0(t)\right\|_{L^2[0,T]} \le \Delta_1(\varepsilon), \\ \left|F_{0\delta}(t) - F_{0\delta}(s)\right| \le C_0 \left|\phi(t) - \phi(s)\right|, (\phi(t) = \int\limits_0^t h(s)ds), \end{cases} \qquad (4.1.3.1)$$

следует ИУВ-1:

$$\int\limits_0^t h(s)\theta(s)ds = F_0(t), \qquad (4.1.3.2)$$

где имеют место условия(б), (4.1.3.1), причем условие (4.1.3.1) отличается от (4.1.2.1), при этом функция $\theta \in L^2[0,T]$, (так как не выполняется необходимое условие корректности ИУВ-1 (4.1.3.2) в $C[0,T]$). Поэтому, чтобы доказать регуляризируемости ИУ (4.1.3.2) в пространстве Гильберта, введем параметризированное ИУ:

$$\varepsilon\theta_\varepsilon(t) + \int\limits_0^t h(s)\theta_\varepsilon(s)ds = F_{0\varepsilon}(t). \qquad (4.1.3.3)$$

Поэтому, учитывая резольвенту для ядра $(-\varepsilon^{-1}h(s))$ из (4.1.3.3), имеем

$$\theta_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t) - \phi(s))[F_{0\varepsilon}(s) - F_{0\varepsilon}(t)]ds +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))F_{0\varepsilon}(t)\equiv\Psi_{\varepsilon}(t), \qquad (4.1.3.4)$$

с оценкой:

$$\left\|\theta_{\varepsilon}(t)\right\|_{L^2[0,T]}\le C_0(e^{-1}+\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho}\rho d\rho)\le 2C_0=Q_0, \qquad (4.1.3.5)$$

где $\Psi_{\varepsilon}(t)$- известная функция.

Значит, предпологая

$$\theta_{\varepsilon}(t)=\xi_{\varepsilon}(t)+\theta(t), \qquad (4.1.3.6)$$

из (4.1.3.5), получим

$$\begin{cases}\xi_{\varepsilon}(t)=-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s))[-\theta(s)+\theta(t)+\frac{1}{\varepsilon}(F_{0\varepsilon}(s)-F_0(s))]ds-\\ -\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))\theta(t)+\frac{1}{\varepsilon}(F_{0\varepsilon}(t)-F_0(t))\equiv\Delta(\theta,\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s))\times\\ \times\frac{1}{\varepsilon}(F_{0\varepsilon}(s)-F_0(s))ds+\frac{1}{\varepsilon}(F_{0\varepsilon}(t)-F_0(t)),\\ \Delta(\theta,\varepsilon)\equiv-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s))[-\theta(s)+\theta(t)]ds-\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))\theta(t).\end{cases} \qquad (4.1.3.7)$$

Так как $\theta(t)\in L^2[0,T]$, то имеем оценку:

$$\begin{cases}\left\|\Delta(\theta,\varepsilon)\right\|_{L^2}\le[\int\limits_0^{\varepsilon^{\beta}}\left|\theta(\phi^{-1}(s))\right|^2 ds+\left\|\theta(t)\right\|_{L^2}^2 e^{-\frac{2}{\varepsilon^{1-\beta}}}]^{\frac{1}{2}}+2[w_{\theta}^2(\varepsilon^{\beta})+e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}\left\|\theta(t)\right\|_{L^2}^2]^{\frac{1}{2}}=\\ =Q_1(\varepsilon),\\ 0<\beta<1;\ \left\|\theta\right\|_{L^2}\le Q_2=const,\end{cases} \qquad (4.1.3.8)$$

причем:

$$Q_3(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\left\|F_{0\varepsilon}(t)-F_0(t)\right\|_{L^2}\le\frac{1}{\varepsilon}\Delta_1(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0\,. \qquad (4.1.3.9)$$

Тогда оценивая (4.1.3.7) с учетом (4.1.3.8), (4.1.3.9) в смысле $L^2[0,T]$, получим:

$$\left\|\xi_{\varepsilon}\right\|_{L^2}\le 4[Q_1(\varepsilon)+2Q_3(\varepsilon)]=Q_4(\varepsilon). \qquad (4.1.3.10)$$

Значит, на основе (4.1.3.6) следует:

$$\begin{cases}\left\|\theta_{\varepsilon}(t)-\theta(t)\right\|_{L^2}\le Q_4(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0,\\ \left\|\theta\right\|_{L^2}\le\left\|\theta(t)-\theta_{\varepsilon}(t)\right\|_{L^2}+\left\|\theta_{\varepsilon}(t)\right\|_{L^2}\le Q_4(\varepsilon)+Q_0\le\tilde{Q}_4+Q_0=Q_2,(0<\varepsilon<1).\end{cases} \qquad (4.1.3.11)$$

Лемма 4.1.3. В условиях леммы 4.1.1 и (б, (4.1.3.1)), и (4.1.3.11) ИУВ-1

(4.1.3.2) регулиризируемо в пространстве Гильберта $L^2[0,T]$.

В итоге, учитывая (4.1.1.15) и (4.1.3.11) имеем оценки:

$$\begin{cases} \left|z_\varepsilon - z\right| = \Big| \int\limits_0^t e^{-\lambda_2(t-s)}\{-\lambda_1 z_\varepsilon(\omega,0,s)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R e^{ix_0\bar{\omega}}\bar{\omega}^2 z_\varepsilon(\bar{\omega},0,s)\hat{\varphi}(\bar{\omega})d\bar{\omega})^2 + \\ +\lambda_1 z(\omega,0,s)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R e^{ix_0\bar{\omega}}\bar{\omega}^2 z(\bar{\omega},0,s)\hat{\varphi}(\bar{\omega})d\bar{\omega})^2 + \int\limits_0^s (h(s')\theta_\varepsilon(s')ds' - \\ -F_0(s))ds\}\Big| \le L_B\left\|z_\varepsilon - z\right\|_C + \int\limits_0^t e^{-\lambda_2(t-s)}\Big|\varepsilon\,\theta_\varepsilon(s) - \varepsilon\theta_\varepsilon(s) + \int\limits_0^s h(s')\theta_\varepsilon(s')ds' - \\ -F_{0\varepsilon}(s) + F_{0\varepsilon}(s) - F_0(s)\Big|ds \le L_B\left\|z_\varepsilon - z\right\|_C + \frac{1}{\sqrt{2\lambda_2}}(Q_0\varepsilon + \Delta_1(\varepsilon)), \\ \text{т.е.(лемма 4.1.1)}: \\ \left\|z_\varepsilon - z\right\|_C \le (1-L_B)^{-1}\frac{1}{\sqrt{2\lambda_2}}(Q_0\varepsilon + \Delta_1(\varepsilon)) = \tilde{M}_1(\varepsilon), \\ \left|z'_{t\varepsilon} - z'_t\right| = \Big| -z_\varepsilon(\omega,0,t)[\lambda_2 + \lambda_1(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R e^{ix_0\omega}\omega^2 z_\varepsilon(\omega,0,t)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2] + \\ +z(\omega,0,t)[\lambda_2 + \lambda_1(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R e^{ix_0\omega}\omega^2 z(\omega,0,t)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2] + \int\limits_0^t h(s)\theta_\varepsilon(s)ds - \\ -F_0(t)\ \Big| \le (\lambda_2 + L_B)\tilde{M}_1(\varepsilon) + \Big|\varepsilon\,\theta_\varepsilon(t) - \varepsilon\theta_\varepsilon(t) + \int\limits_0^t h(s)\theta_\varepsilon(s)ds - \\ -F_{0\varepsilon}(t) + F_{0\varepsilon}(t) - F_0(t)\Big| \overset{(4.1.3.3)}{\le} (\lambda_2 + L_B)\tilde{M}_1(\varepsilon) + \varepsilon\left|\theta_\varepsilon(t)\right| + \left|F_{0\varepsilon}(t) - F_0(t)\right|. \end{cases} \qquad (4.1.3.12)$$

Отметим, что в отличии от §4.1.2, в случае (4.1.3.12) частное производное функции $z(\omega,0,t)$, т.е.: $z_t(\omega,0,t)$ оценивается по норме L^2 по t, при этом имеется место:

$$\begin{cases} \left\|z'_{t\varepsilon} - z'_t\right\|_2 = (\sup\limits_R \int\limits_0^T \left|z'_{t\varepsilon}(\omega,0,t) - z'_t(\omega,0,t)\right|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \le \\ \le 4[\sqrt{T}(\lambda_2 + L_B)\tilde{M}_1(\varepsilon) + \varepsilon\left\|\theta_\varepsilon(t)\right\|_{L^2[0,T]} + \left\|F_{0\varepsilon}(t) - F_0(t)\right\|_{L^2[0,T]} \le \\ \le 4[\sqrt{T}(\lambda_2 + L_B)\tilde{M}_1(\varepsilon) + \varepsilon Q_0 + \Delta_1(\varepsilon)] = \tilde{M}_2(\varepsilon). \end{cases} \qquad (4.1.3.14)$$

Поэтому, на основе (4.1.1.16),(4.1.3.12), (4.1.3.14) и (4.1.3.11) следуют следующие оценки:

$$\begin{cases} \left|U_\varepsilon - U\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}[z_\varepsilon(\omega,0,t) - z(\omega,0,t)]\hat{\varphi}(\omega)d\omega\right| \le \left|d\right|\tilde{M}_1(\varepsilon), \forall(x,t)\in\bar{D}, \\ \left|U_{x\varepsilon} - U_x\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega x}[z_\varepsilon(\omega,0,t) - z(\omega,0,t)]\hat{\varphi}(\omega)d\omega\right| \le \\ \le d_1\tilde{M}_1(\varepsilon), \forall(x,t)\in\bar{D}, \\ \left|U_{x^2\varepsilon} - U_{x^2}\right| = \left|-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{i\omega x}[z_\varepsilon(\omega,0,t) - z(\omega,0,t)]\hat{\varphi}(\omega)d\omega\right| \le \\ \le d_0\tilde{M}_1(\varepsilon), \forall(x,t)\in\bar{D}, \\ \left|U_{t\varepsilon} - U_t\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}[z'_{t\varepsilon}(\omega,0,t) - z'_t(\omega,0,t)]\hat{\varphi}(\omega)d\omega\right| \le \\ \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[(\lambda_2 + L_B)\tilde{M}_1(\varepsilon) + \varepsilon\left|\theta_\varepsilon(t)\right| + \left|F_{0\varepsilon}(t) - F_0(t)\right|]\left|\hat{\varphi}(\omega)\right|d\omega \le \left|d\right|[(\lambda_2 + L_B)\times \\ \times\tilde{M}_1(\varepsilon) + \varepsilon\left|\theta_\varepsilon(t)\right| + \left|F_{0\varepsilon}(t) - F_0(t)\right|] \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left\|U_\varepsilon - U\right\|_{C(\bar{D})} \le \left|d\right|\tilde{M}_1(\varepsilon); \left\|U_{x\varepsilon} - U_x\right\|_{C(\bar{D})} \le d_1\tilde{M}_1(\varepsilon), \\ \left\|U_{x^2\varepsilon} - U_{x^2}\right\|_{C(\bar{D})} \le d_0\tilde{M}_1(\varepsilon), \\ \left\|U_{t\varepsilon} - U_t\right\|_2 \le 4\left|d\right|[\sqrt{T}(\lambda_2 + L_B)\tilde{M}_1(\varepsilon) + \varepsilon\left\|\theta_\varepsilon(t)\right\|_{L^2[0,T]} + \\ + \left\|F_{0\varepsilon}(t) - F_0(t)\right\|_{L^2[0,T]}] \le 4\left|d\right|[\sqrt{T}(\lambda_2 + L_B)\tilde{M}_1(\varepsilon) + \varepsilon Q_0 + \\ + \Delta_1(\varepsilon)] = \left|d\right|\tilde{M}_2(\varepsilon). \end{cases} \tag{4.1.3.15}$$

Следовательно, учитывая (4.1.3.11), (4.1.3.15) и (4.1.5) получим:

$$\begin{cases} \left\|V_\varepsilon\right\|_{W^2(\bar{D})} \le (\left|d\right| + d_0 + d_1)\tilde{M}_1(\varepsilon) + \left|d\right|\tilde{M}_2(\varepsilon) + Q_4(\varepsilon) = \bar{M}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ V_\varepsilon = (U_\varepsilon - U, \theta_\varepsilon - \theta). \end{cases} \tag{4.1.3.16}$$

Теорема 4.1.3. Пусть выполняются условия леммы 4.1.3 и (4.1.3.16). Тогда ОЗ ((4.1.1) - (4.1.3), (B)) регуляризируема в $W^2(\bar{D})$.

§4.2. Регуляризация нагруженной ОЗ типа Кортевега Де Фриза в неограниченной области, вырождающая в некорректное ИУВ-1

В этом параграфе исследуется КОЗ для нагруженного уравнения типа Кортевега Де Фриза в неограниченной области, встречающиеся в теории волн, в задачах, распространения диспергирующих нагруженных волн [23,24,35,58,65,66] и др. Так как в изучаемой ОЗ вырождается некоррекное ИУВ-1, то, как выше отметили, методика исследования основывается на такие аппараты иследования, как ПФ и МР в обобщенном смысле.

Пусть задается ОЗ:

$$U_t + \lambda U(U_x(t,x_0))^2 + U_{x^3} = \varphi(x)(J\theta)(t), \forall (t,x) \in \bar{D}, (D = (0,T)\times R), \qquad (4.2.1)$$

$$U(0,x) = \varphi(x), \forall x \in R, \qquad (4.2.2)$$

$$(U_t + U_{x^3})\big|_{x=0} = g(t), \forall t \in [0,T], \qquad (4.2.3)$$

где

$$J\theta \equiv \sum_{i=0}^{1} (\lambda_i \int_0^t K_0(t,s)\theta(s)ds)^{i+1}, (\lambda_0 = 1), \qquad (*)$$

и $\lambda, \lambda_1, \varphi(x), g(t), K_0(t,s) -$ известные функции удовлетворяют условия:

а) $\lambda < 1, 0 < \lambda_1; \lambda, \lambda_1 = const; \varphi(x) \in C^3(R); g(t) \in C^1[0,T]$,

б) $K_0(t,s) \in C\ (D_0) \cap Lip(t\big|L_{K_0}), (D_0 = \{(t,s): 0 \le s \le t \le T\}), K_0(t,s) \ge 0,$

$K_0(t,0) \equiv q = const; \left|K_0(t,s)\right| \le C_{01} = const.$

Так как, здесь неизвестным является вектор-функция: $P = (U, \theta)$ из векторного пространства: $\tilde{G}^1_{[\tilde{W}^1(D); Z^1(0,T)]}(D) = \{(U(t,x), \theta(t)) : U \in \tilde{W}^1(D), \theta \in Z^1(0,T)\}$ с нормой:

$$\begin{cases} \|P\|_{\tilde{G}^1_{[\tilde{W}^1(D);Z^1(0,T)]}(D)} = \|U\|_{\tilde{W}^1(D)} + \|\theta\|_{Z^1(0,T)}, \\ \|U\|_{\tilde{W}^1(D)} = \|U\|_{C^{0,3}(\bar{D})} + \|U_t\|_1, \\ \|U_t\|_1 = \sup\limits_R \int_0^T \left|U_t(t,x)\right| dt. \end{cases} \qquad (4.2.4)$$

Здесь $Z^1(0,T)$ - пространство, содержащее все элементы $L^1[0,T]$, а также неотрицательных элементов $z(t)$, связанные с ФД, причем, если существует пробная функция с условием : $g(0)=0,$ то $<g,z>=0$.

Тогда надо доказать регуляризируемости исходной ОЗ в обобщенном смысле в указанном пространстве.

Замечание 4.2.1. Отметим, что из изучаемой ОЗ (4.2.1)-(4.2.3) вырождается некорректное ИУВ-1 с неотрицательным решением, связанное с ФД , т.е.:

$$J\theta \equiv \int_0^t K_0(t,s)\theta(s)ds + \lambda_1(\int_0^t K_0(t,s)\theta(s)ds)^2 = F(t), \tag{1}$$

причем свободный член этого ИУ допускает условие:

в) $F(t) \in C\ [0,T] \cap Lip(t|L_F); F(t)>0, (F(0)\neq 0); |F(t)| \leq C_{02}.$

Значит, при условии (в) ИУВ-1 (1) не корректно в $C[0,T]$. Поэтому, если предположим

$$\theta = \alpha\delta(t) + V(t)\,, \tag{2}$$

то из ИУВ (1) следует

$$\alpha q + \int_0^t K_0(t,s)V(s)ds + \lambda_1(\alpha q + \int_0^t K_0(t,s)V(s)ds)^2 = F(t), \tag{3}$$

а далее, для определения неизвестной константы, допуская $t=0$ из (3) имеем:

$$\alpha q + \lambda_1(\alpha q)^2 = F(0),$$

или получим квадратное уравнение:

$$\lambda_2\alpha^2 + \alpha q - F(0) = 0, (\lambda_2 = \lambda_1 q^2, \lambda_1 > 0)\,. \tag{4}$$

Относительно (4) выполняется условие:

$$\tilde{D} = q^2 + 4F(0)\lambda_2 > 0, (F(0) > 0, \lambda_2 > 0), \tag{5}$$

тогда получим

$$\alpha = \frac{-q+\sqrt{\tilde{D}}}{2\lambda_2} = q_0 > 0\,, \tag{6}$$

так как по условию ИУВ (1) имеет неотрицательное решение, значит:

$$\alpha = \frac{-q-\sqrt{\tilde{D}}}{2\lambda_2} < 0\,,$$

не учитывается. Следовательно, подставляя (5) в (3) имеем

$$qq_0 + \int_0^t K_0(t,s)V(s)ds + \lambda_1(qq_0 + \int_0^t K_0(t,s)V(s)ds)^2 = F(t),$$

или

$$\begin{cases} \int_0^t K_0(t,s)V(s)ds + 2\lambda_1 qq_0 \int_0^t K_0(t,s)V(s)ds + \lambda_1(\int_0^t K_0(t,s)V(s)ds)^2 = F(t) - \overline{F}_0, \\ qq_0 + \lambda_1(qq_0)^2 = \overline{F}_0 = const, (\overline{F}_0 > 0); \quad t = 0: \ F(t)\big|_{t=0} - \overline{F}_0 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Поэтому, решая ИУ (7) на основе (2), находим решение ИУ (1). Но, так как ИУВ-1 (7) с ядром вида (б), пока еще не исследовано в пространстве Банаха, то алгоритм (2) не обеспечивает ответами на те вопросы, которые были поставлены относительно ИУВ (1). Значит, регуляризируемость ИУ (1) остается открытым.

Чтобы доказать регулиризируемости ИУВ-1 (1), в этом параграфе предлагается вариант МР, разработанного в параграфе 2.1 в $Z^1(0,T)$.

Известно, что если $\lambda_1 = 0$, то из (1) следует линейное ИУВ-1:

$$\int_0^t K_0(t,s)\theta(s)ds = F(t) \qquad (8)$$

с условиями (б, в) относительно известных функций. Полученные результаты относительно ИУВ-1 (1) применимы и относительно ИУВ-1 (8).

Кроме того, в случае:

$K_0(t,s) \equiv 1, F(t) \equiv 1,$

из ИУ (8) следует ИУВ-1:

$$\int_0^t \theta(s)ds = 1, \qquad (9)$$

которое имеет решение вида (см. результаты работы [21] и др):

$$\theta = \delta(t) = \begin{cases} 0, t > 0, \\ \infty, t = 0. \end{cases}$$

§4.2.1. **Интегрилизация ОЗ (4.2.1) - (4.2.3).** Для этого, воспользуемся ПФ, т.е. допуская:

$$\begin{cases} U(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} z(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega, \\ U(0,x) = \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\hat{\varphi}(\omega)d\omega \end{cases} \tag{4.2.5}$$

при этом имея:

$$\begin{cases} U_t(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} z_t(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega, \\ U_x = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} i\omega z(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega, \\ U_{x^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \omega^2 z(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega, \\ U_{x^3} = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} i\omega^3 z(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega, \end{cases} \tag{4.2.6}$$

из (4.2.1) следует:

$$\begin{cases} z_t(t,0,\omega) - \lambda z(t,0,\omega)\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_R \omega z(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\Big)^2 - i\omega^3 z(t,0,\omega) = (J\theta)(t), \\ z\big|_{t=0} = 1, \forall\, \omega \in R. \end{cases} \tag{4.2.7}$$

где z – новая искомая функция.

Далее, учитывая (4.2.3), (4.2.5) - (4.2.7) получим

$$g(t) = (U_t + U_{x^3})\big|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [z_t(t,0,\omega) - i\omega^3 z(t,0,\omega)]\hat{\varphi}(\omega)d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\lambda z(t,0,\omega)\times$$

$$\times\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \omega z(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\Big)^2 + i\omega^3 z(t,0,\omega) + (J\theta)(t) - i\omega^3 z(t,0,\omega)]\hat{\varphi}(\omega)d\omega = \tag{4.2.8}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\lambda z(t,0,\omega)\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \omega z(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\Big)^2 + (J\theta)(t)]\hat{\varphi}(\omega)d\omega.$$

При этом, если

$$d = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega)d\omega \neq 0, \tag{4.2.9}$$

то из (4.2.8) следует

$$(J\theta)(t) = d^{-1}\{g(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda z(t,0,\omega)\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \omega z(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\Big)^2 \hat{\varphi}(\omega)d\omega\} \equiv (B_0 z)(t). \tag{4.2.10}$$

Поэтому, подставляя (4.2.10) в (4.2.7) получим

$$z_t(t,0,\omega) = \lambda z(t,0,\omega)\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \omega z(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\Big)^2 + i\omega^3 z(t,0,\omega) + (B_0 z)(t) \tag{4.2.11}$$

или

$$z(t,0,\omega)=e^{i\omega^3 t}+\int_0^t e^{i\omega^3(t-s)}\{\lambda z(s,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \omega z(s,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2+(B_0 z)(s)\}ds\equiv \tag{4.2.12}$$
$$\equiv(Bz)(t,0,\omega).$$

Так как (4.2.12) является ИУВ-2, то можем сформулировать следующую лемму:

Лемма 4.2.1. При условиях:

$$\begin{cases} L_B<1, \\ B:S_r(z_0)\to S_r(z_0)=\{z:\left|z-z_0\right|\le r=const,\forall(t,0,\omega)\in\bar{D}\} \end{cases} \tag{4.2.13}$$

ИУ (4.2.12) однозначно разрешимо в $C(\bar{D})$, причем решение строится МП:

$$z_{n+1}=Bz_n,(n=0,1,...),$$

с оценкой

$$\begin{cases} \left\|z_{n+1}-z\right\|\le L_B^{n+1}r\xrightarrow[n\to\infty]{}0, \\ \left|z\right|\le r_1,\forall(t,0,\omega)\in\bar{D}, \end{cases} \tag{4.2.14}$$

где z_0 - начальное приближение, при этом функция z имеет производную по *t*, которая удовлетворяет ДУ (4.2.11). Тогда, на основе (4.2.5) единственным образом определяется и функция U в $\tilde{W}^1(D)$ с оценкой:

$$\left\|U\right\|_{\tilde{W}^1(D)}\le(\left|d\right|+\sum_{i=0}^{2}d_i)r_1+N_0=N_1. \tag{4.2.15}$$

Доказательство. В самом деле, первая часть доказательство этой леммы относительно функций $z(t,0,\omega)$, аналогично к доказательству леммы 4.1.1 (см. параграф 4.1), здесь:

$$\begin{cases} L_B=2\left|\lambda\right|(r_1 d_1)^2(1+\left|d^{-1}\right|)<1, \\ \left|z\right|\le r_1,\forall(t,0,\omega)\in\bar{D}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R\left|\omega\hat{\varphi}(\omega)\right|d\omega\le d_1. \end{cases}$$

Чтобы доказать вторую часть леммы, сперва, учитывая, что функция $z(t,0,\omega)$ является известным, то обозначив: $z\equiv\Psi(t,0,\omega)$ (чтобы показать определенность этой функции) и подставляя в (4.2.11), имеем

$$\begin{cases} z_t(t,0,\omega)=\lambda\Psi(t,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R \ \omega\Psi(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2+i\omega^3\Psi(t,0,\omega)+(B_0\Psi)(t), \\ \left|\Psi(t,0,\omega)\right|\le r_1,\forall(t,0,\omega)\in\bar{D}, \end{cases} \tag{4.2.16}$$

при этом (4.2.16) допускает ограничение (неравномерное), т.е.:

$$\begin{aligned} &\left|z_t(t,0,\omega)\right|=\left|\lambda\Psi(t,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R \ \omega\Psi(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2+i\omega^3\Psi(t,0,\omega)+(B_0\Psi)(t)\right|\le \\ &\le L_B r_1+\left|\omega^3\right|r_1. \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Следовательно, с учетом (4.2.5) получим

$$\begin{cases} \left|U(t,x)\right|=\left|\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\Psi(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\ \right|\le\left|d\right|r_1,\forall(t,0,\omega)\in\bar{D}, \\ \left|U_x\right|=\left|\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}i\omega\Psi(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\ \right|\le d_1r_1,\forall(t,0,\omega)\in\bar{D}, \\ \left|U_{x^2}\right|=\left|\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\omega^2\Psi(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\ \right|\le d_0r_1,\forall(t,0,\omega)\in\bar{D}, \\ \left|U_{x^3}\right|=\left|\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}i\omega^3\Psi(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\ \right|\le d_2r_1,\forall(t,0,\omega)\in\bar{D}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R\omega^2\left|\hat{\varphi}(\omega)\right|d\omega\le d_0;\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R\left|\omega^3\hat{\varphi}(\omega)\right|d\omega\le d_2, \\ \left|U_t(t,x)\right|=\left|\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\Psi_t(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega\ \right|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ [L_Br_1+ \\ +\left|\omega^3\right|r_1]\left|\hat{\varphi}(\omega)\right|d\omega\le L_Br_1\left|d\right|+r_1d_2, \end{cases} \tag{4.2.18}$$

или

$$\begin{cases} \left\|U\right\|_{C(\bar{D})}\le\left|d\right|r_1;\left\|U_x\right\|_{C(\bar{D})}\le d_1r_1;\left\|U_{x^2}\right\|_{C(\bar{D})}\le d_0r_1;\left\|U_{x^3}\right\|_{C(\bar{D})}\le d_2r_1, \\ \left\|U_t\right\|_1\le(L_Br_1\left|d\right|+r_1d_2)T=N_0. \end{cases} \tag{4.2.19}$$

В итоге, относительно функции U, с учетом (4.2.19) имеем (4.2.15). ЧиТД.

§4.2.2. Регуляризация ИУВ-1, которое вырождается на основе (4.2.10)

Так как имеют место условия леммы 4.2.1, то с учетом (*) и (4.2.10), получим ИУВ-1:

$$J\theta\equiv\int\limits_0^t K_0(t,s)\theta(s)ds+\lambda_1(\int\limits_0^t K_0(t,s)\theta(s)ds)^2=F(t), \tag{4.2.20}$$

где имеет место:

$$C[0,T] \ni F(t) \equiv d^{-1}\{g(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\Psi(t,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \omega\Psi(t,0,\omega)\hat{\varphi}(\omega)d\omega)^2\hat{\varphi}(\omega)d\omega\}, \quad (4.2.21)$$

и условия (б,в). При этом ИУ (4.2.20) является некорректным ИУВ-1, с учетом условия (в; (4.2.21)). Регуляризация ИУВ (4.2.20) в обобщенном смысле в $Z^1(0,T)$, доказывается на основе модификации метода сингулярных возмущений параграфа 2.1, когда допустимы условия вида (см. условие (2.1.3) параграфа 2.1):

$$\begin{cases} h(t) \equiv [\gamma + \frac{1}{\alpha}\mu(t)]F(t) \geq m > 0, (1 < \gamma = const);\ h_0(t) \equiv \gamma + \frac{1}{\alpha}\mu(t), \\ 0 \leq \mu(t) \in L^1(0,T);\ \phi(t) = \int_0^t [\gamma + \frac{1}{\alpha}\mu(s)]F(s)ds = \int_0^t h(s)ds, \\ F_0(t) \equiv F(t) - F(0), F_0(0) = 0;\ h_0(t) \leq \alpha^{-1}h(t); 0 < \max C_{0j} = C_0, (j = 1,2), \\ \left|F_0(t) - F_0(s)\right| \leq C_1(\phi(t) - \phi(s)), (s \leq t; \gamma > 1; M_0 = \frac{1}{\gamma\alpha}; C_1 = L_{F_0}M_0), \\ t - s \leq M_0(\phi(t) - \phi(s)), (s \leq t), \\ t \in [0,T]:\ \ t = (t^{\frac{2}{7}})^{\frac{7}{2}} \leq (\phi(t))^{\frac{7}{2}}, (\mu(t) = \frac{2}{7\sqrt[7]{t^5}}), \\ t \leq M_1(\phi(t))^2, (M_1 = \sup_{[0,T]}(\phi(t))^{\frac{3}{2}}). \end{cases} \quad (4.2.22)$$

Для этого, преобразуя (4.2.20) к виду

$$\begin{cases} \int_0^t h(s)\theta(s)ds = (H\theta)(t) + F(t), \\ (H\theta)(t) \equiv \int_0^t h_0(s)\theta(s)(J\theta)(s)ds - (J\theta)(t) \overset{(4.2.20)}{=} \int_0^t h_0(s)\theta(s)\{\int_0^s K_0(s,\bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s} + \\ +\lambda_1(\int_0^s K_0(s,\bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s})^2\}ds - \int_0^t K_0(t,\bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s} - \lambda_1(\int_0^t K_0(t,\bar{s})\theta(\bar{s})d\bar{s})^2, \end{cases} \quad (4.2.23)$$

введем параметризированную ИУ:

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(t) + (\Phi\,\theta_\varepsilon)(t) = F_\varepsilon(t), \\ (\Phi\,\theta_\varepsilon)(t) \equiv \int_0^t h(s)\theta_\varepsilon(s)ds - (H\theta_\varepsilon)(t). \end{cases} \quad (4.2.24)$$

Тогда решения представляя по правилу:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon = \upsilon(t) + \xi_\varepsilon(t) + \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(t), (\Pi_\varepsilon(0) = F(0), \upsilon(0) = 0, \xi_\varepsilon(0) = 0), \\ F_\varepsilon(0) = F(0); F_\varepsilon(t): \\ \left|F_\varepsilon(t) - F(t)\right| \le \Delta_0(\varepsilon), \forall t \in [0,T], \end{cases} \tag{4.2.25}$$

получим систему:

$$\begin{cases} \varepsilon\Pi_\varepsilon(t) + \int\limits_0^t h(s)\Pi_\varepsilon(s)ds = F(0), \\ \int\limits_0^t h(s)\upsilon(s)ds = (H\upsilon)(t) + F_0(t), (F_0(t) \equiv F(t) - F(0)), \\ \varepsilon\xi_\varepsilon(t) + \int\limits_0^t h(s)\xi_\varepsilon(s)ds = (H[\upsilon + \xi_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(t) - (H\upsilon)(t) + F_\varepsilon(t) - F(t) - \varepsilon\upsilon(t). \end{cases} \tag{4.2.26}$$

Лемма 4.2.2. При выполнении условий (б,в, (4.2.21)) из системы (4.2.26), следуют:

1) $|\Pi_\varepsilon(t)| \le C_0 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t)),$ (4.2.27)

2) функция $\upsilon(t) \in C[0,T]$ определяется как предел параметризированного ИУ:

$$\delta\upsilon_\delta + \int\limits_0^t h(s)\upsilon_\delta(s)ds = (H\upsilon_\delta)(t) + F_0(t) \tag{4.2.28}$$

в $C[0,T]$, где $(0,1) \ni \delta$ – малый параметр,

3) остаточная функция $\xi_\varepsilon(t)$ определяется однозначно из третьего ИУ системы (4.2.26), причем сходится равномерно к нулю в $C[0,T]$, когда $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. 1) В самом деле, учитывая резольвенту

$$R(t,s,\varepsilon) \equiv -\frac{1}{\varepsilon}h(s)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t h(\bar{s})d\bar{s}\right) \tag{4.2.29}$$

из первого ИУ системы (4.2.26), получим:

$$\Pi_\varepsilon(t) = F(0)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)ds\right). \tag{4.2.30}$$

Отсюда следует оценка (4.2.27).

2) Чтобы доказать второе условие леммы 4.2.2, ИУ (4.2.28) на основе резольвенты (4.2.29) преобразуется к ИУВ-2:

$$\begin{gathered}\upsilon_\delta=-\frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\delta}\int_s^t h(s')ds')\{(H\upsilon_\delta)(s)-(H\upsilon_\delta)(t)+F_0(s)-F_0(t)\}ds+\\+\frac{1}{\delta}(\exp(-\frac{1}{\delta}\int_0^t h(s')ds'))\{(H\upsilon_\delta)(t)+F_0(t)\}=-\frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(\tau))\times\\\times\{\int_0^\tau h_0(\tilde\tau)\upsilon_\delta(\tilde\tau)[\int_0^{\tilde\tau} K_0(\tilde\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta(\bar\tau)d\bar\tau+\lambda_1(\int_0^{\tilde\tau} K_0(\tilde\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta(\bar\tau)d\bar\tau)^2-\\-\int_0^t K_0(t,\bar\tau)\upsilon_\delta(\bar\tau)d\bar\tau-\lambda_1(\int_0^t K_0(t,\bar\tau)\upsilon_\delta(\bar\tau)d\bar\tau)^2]d\tilde\tau-\int_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta(\bar\tau)d\bar\tau-\\-\lambda_1(\int_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta(\bar\tau)d\bar\tau)^2+\int_0^t K_0(t,\bar\tau)\upsilon_\delta(\bar\tau)d\bar\tau+\lambda_1(\int_0^t K_0(t,\bar\tau)\upsilon_\delta(\bar\tau)d\bar\tau)^2\}d\tau+\\+\Delta_1(F_0,\delta)\equiv(Q\upsilon_\delta)(t),\end{gathered}\tag{4.2.31}$$

где

$$\begin{cases}\Delta_1(F_0,\delta)\equiv-\frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\delta}\int_s^t h(s')ds')\{F_0(s)-F_0(t)\}ds+\frac{1}{\delta}F_0(t)\exp(-\frac{1}{\delta}\int_0^t h(s')ds),\\ |\Delta_1(F_0,\delta)|\le\frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi(t)-\phi(s)))C_1(\phi(t)-\phi(s))ds+C_1\frac{1}{\delta}\phi(t)\times\\ \times\exp(-\frac{1}{\delta}\phi(t))\le C_1[\int_0^t \exp(-\frac{1}{\delta}(\phi(t)-\phi(s)))\frac{1}{\delta}(\phi(t)-\phi(s))d(-\frac{1}{\delta}(\phi(t)-\phi(s)))+\\ +(\frac{1}{\delta}\phi(t))\exp(-\frac{1}{\delta}\phi(t))]\le C_1[\int_0^\infty e^{-\rho}\rho d\rho+e^{-1})\le 2C_1=L_0,(\int_0^\infty e^{-\rho}\rho d\rho=1).\end{cases}\tag{4.2.32}$$

При этом (4.2.31) регулярно относительно малого параметра, т.е. ограничена в смысле нормы пространства $C[0,T]$.

В самом деле, если (4.2.31) допускают условия:

$$\begin{cases}0<L_Q<1,\\ Q:S_{\tilde r_1}(0)\to S_{\tilde r_1}(0),\\ S_{\tilde r_1}(0)=\{\upsilon_\delta(t)\in C[0,T]:|\upsilon_\delta(t)|\le\tilde r_1,\forall t\in[0,T]\},\end{cases}\tag{4.2.33}$$

то, учитывая (4.2.32) и (4.2.33) из оценки ИУ (4.2.31) следует

$$\|\upsilon_\delta\|_C\le(1-L_Q)^{-1}L_0=\tilde N_0,\tag{4.2.34}$$

где L_Q –коэффициент Липшица оператора Q, причем

$$
\begin{cases}
\left| \dfrac{1}{\delta^2}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\delta}(\phi(t)-\phi(s)))\{-\int\limits_0^s K_0(s,s')\upsilon_\delta(s')ds' - \right. \\
-\lambda_1[\int\limits_0^s K_0(s,s')\upsilon_\delta(s')ds']^2 + \int\limits_0^t K_0(t,s')\upsilon_\delta(s')ds' + \lambda_1[\int\limits_0^s K_0(s,s')\upsilon_\delta(s')ds']^2 + \\
+\int\limits_0^s h_0(s')\upsilon_\delta(s')[\int\limits_0^{s'} K_0(s',\overline{s})\upsilon_\delta(\overline{s})d\overline{s} + \lambda_1(\int\limits_0^{s'} K_0(s',\overline{s})\upsilon_\delta(\overline{s})d\overline{s})^2]ds' - \\
\left. -\int\limits_0^t h_0(s')\upsilon_\delta(s')[\int\limits_0^{s'} K_0(s',\overline{s})\upsilon_\delta(\overline{s})d\overline{s} + \lambda_1(\int\limits_0^{s'} K_0(s',\overline{s})\upsilon_\delta(\overline{s})d\overline{s})^2]ds'\}ds \right| \le \\
\le \{M_0C_0(1+2|\lambda_1|\tilde{r}_1L_{K_0}T^2 + 4C_0\tilde{r}_1T) + \dfrac{1}{\alpha}\tilde{r}_1C_0T(2+3|\lambda_1|\tilde{r}_1C_0T)\}\|\upsilon_\delta(t)\|_C = \\
= L_1\|\upsilon_\delta(t)\|_C; \\
\left| \dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}(\phi(t))\{-\int\limits_0^t K_0(t,s')\upsilon_\delta(s')ds' - \lambda_1[\int\limits_0^t K_0(t,s')\upsilon_\delta(s')ds']^2 + \right. \\
\left. +\int\limits_0^t h_0(s')\upsilon_\delta(s')[\int\limits_0^{s'} K_0(s',\overline{s})\upsilon_\delta(\overline{s})d\overline{s} + \lambda_1(\int\limits_0^{s'} K_0(s',\overline{s})\upsilon_\delta(\overline{s})d\overline{s})^2]ds'\} \right| \le \\
\le C_0[2^2e^{-2}M_1\delta + 2|\lambda_1|C_0T\tilde{r}_1M_0e^{-1} + 3\dfrac{1}{\alpha}C_0T^2\tilde{r}_1^2e^{-1}]\|\upsilon_\delta(t)\|_C \le L_2\|\upsilon_\delta(t)\|_C, \\
L_Q = L_1 + L_2 < 1, \\
\int\limits_0^t \exp(-\dfrac{1}{\delta}(\phi(t)-\phi(s)))\dfrac{1}{\delta}(\phi(t)-\phi(s))d(-\dfrac{1}{\delta}(\phi(t)-\phi(s))) = \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}\phi(t)} e^{-\rho}\rho d\rho \le \\
\le \int\limits_0^\infty e^{-\rho}\rho d\rho = 1, (0<\delta<1), \\
\dfrac{1}{\delta}t\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi(t)) \le \delta M_1(\dfrac{1}{\delta}\phi(t))^2\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi(t)) \le M_1 2^2e^{-2}\delta, \\
\rho \equiv \dfrac{1}{\delta}\phi(t); \chi(\rho) \equiv \rho^k\exp(-\rho), \\
\sup\limits_{\rho\ge 0}\chi(\rho) = k^k\exp(-k), \\
\rho = 0 : \chi(0) = 0; \rho\to\infty : \chi\to 0, (k=1,2,\dfrac{7}{2}).
\end{cases}
\tag{4.2.33}
$$

Следовательно, предполагая

$$
\upsilon_\delta = \upsilon(t) + \eta_\delta(t), \forall t\in[0,T], \tag{4.2.35}
$$

из (4.2.31), относительно остаточной функции η_δ имеем:

$$\delta\eta_\delta+\frac{1}{\delta}\int_0^t h(s)\eta_\delta(s)ds=\left(H[\upsilon+\eta_\delta)\right)(t)-\left(H\upsilon\right)(t)-\delta\upsilon(t),$$

или с учетом резольвенты (4.2.29) преобразуется к ИУ:

$$\begin{cases}\eta_\delta=-\dfrac{1}{\delta^2}\displaystyle\int_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\int_s^t\ h(s')ds')\{\left(H[\upsilon+\eta_\delta]\right)(s)-\left(H\upsilon\right)(s)-\left(H[\upsilon+\eta_\delta]\right)(t)+\\ +\left(H\upsilon\right)(t)-\delta(\upsilon(s)-\upsilon(t))\}ds+\dfrac{1}{\delta}\{\left(H[\upsilon+\eta_\delta]\right)(t)-\left(H\upsilon\right)(t)\}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_0^t\ h(s)ds)-\\ -\upsilon(x)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_0^t\ h(s)ds)\equiv(Q_1\eta_\delta)(t)+\Delta_2(\upsilon,\delta)\equiv(\tilde{Q}\eta_\delta)(t),\\ \Delta_2(\upsilon,\delta)\equiv-\dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\int_s^t\ h(s')ds')\{-\upsilon(s)+\upsilon(t)\}ds-\upsilon(t)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\int_0^t\ h(s)ds).\end{cases}\tag{4.2.36}$$

Пусть

$$\begin{cases}\left\|\Delta_2\left(\upsilon,\delta\right)\right\|_C\le 3\left\|\upsilon\left(t\right)\right\|_C\exp\left(-\dfrac{1}{\delta^{1-\beta}}\right)+\omega_{\bar{\upsilon}}\left(\delta^\beta\right),(0<\beta<1),\\ \omega_{\bar{\upsilon}}\left(\delta^\beta\right)=\sup\left\{\left|\upsilon\left(\phi^{-1}\left(t\right)\right)-\upsilon\left(\phi^{-1}\left(s\right)\right)\right|;\left|t-s\right|\le\delta^\beta\right\},\\ \tilde{Q}:S_{r_2}(0)\to S_{r_2}(0)=\{\eta_\delta:\ \left|\eta_\delta\right|\le r_2,\forall t\in[0,T]\},\\ \left|\upsilon\right|\le\tilde{r}_2,\forall t\in[0,T];0<L_{\tilde{Q}}=const<1,\end{cases}\tag{4.2.37}$$

где $\omega_{\bar{\upsilon}}\left(\delta^\beta\right)-$ модуль непрерывности, а $\phi^{-1}\left(t\right)$ - обратная к функции: $\phi\left(t\right)=\int_0^t h\left(s\right)ds$. Тогда из ИУ (3.1.37) получим

$$\left\|\eta_\delta\left(t\right)\right\|_C\le\left(1-L_{\tilde{Q}}\right)^{-1}\left\|\Delta_2\left(\upsilon,\delta\right)\right\|_C.\tag{4.2.38}$$

При этом, с учетом (4.2.35) и (4.2.38) имеем:

$$\begin{cases}\left\|\upsilon_\delta\left(t\right)-\upsilon(t)\right\|_C\le\left(1-L_{\bar{Q}}\right)^{-1}\left\|\Delta_2\left(\upsilon,\delta\right)\right\|_C\xrightarrow[\delta\to0]{}0,\\ \left\|\upsilon\left(t\right)\right\|_C=\left\|\upsilon\left(t\right)-\upsilon_\delta\left(t\right)+\upsilon_\delta(t)\right\|_C\le\left(1-L_{\tilde{Q}}\right)^{-1}\left\|\Delta_2\left(\upsilon,\delta\right)\right\|_C+\tilde{N}_0,\\ \text{или}\\ \left\|\upsilon\left(t\right)\right\|_C\le\left(1-\tilde{d}\right)^{-1}[\tilde{N}_0+\left(1-L_{\tilde{Q}}\right)^{-1}\omega_{\bar{\upsilon}}\left(\delta^\beta\right)]\le\tilde{r}_2,\\ \tilde{d}=3\left(1-L_{\tilde{Q}}\right)^{-1}\exp\left(-\dfrac{1}{\delta^{1-\beta}}\right)<1,\end{cases}\tag{4.2.39}$$

если допускается:

$$\delta \in (0, \delta_0], \delta_0 = \left(\ln \left(6 \left(1 - L_{\tilde{Q}} \right)^{-1} \right) \right)^{-\frac{1}{1-\beta}}.$$

Поэтому, когда $\delta \to 0$ из (4.2.39) следует:

$$\upsilon_\delta(t) \xrightarrow[\delta \to 0]{} \upsilon(t), \forall t \in [0, T],$$

а это значит, что действительно второе ИУ системы (4.2.26) регуляризируемо в $C[0,T]$, т.е. выполняется второе условие леммы 4.2.2.

3) Докажем, что функция $\xi_\varepsilon(t)$ однозначно определяетя в $C[0,T]$ при этом сходится равномерно к нулю, когда $\varepsilon \to 0$. Для этого, третье ИУ системы (4.2.26) на основе резольвенты (4.2.29) приводится к ИУ:

$$\begin{cases} \xi_\varepsilon(t) = -\dfrac{1}{\varepsilon^2} \displaystyle\int_0^t h(s)(\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}(\phi(t) - \phi(s))\{-\int_0^s K_0(s,\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau - \\ -\lambda_1[(\displaystyle\int_0^s K_0(s,\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau)^2 + 2[\int_0^s K_0(s,\tau)\upsilon(\tau)d\tau + \dfrac{1}{\varepsilon}\int_0^s K_0(s,\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau] \times \\ \times \displaystyle\int_0^s K_0(s,\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau + \int_0^t K_0(t,\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau + \lambda_1[(\int_0^t K_0(t,\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau)^2 + \\ +2[\displaystyle\int_0^t K_0(t,\tau)\upsilon(\tau)d\tau + \dfrac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_0(t,\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau]\int_0^t K_0(t,\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau + \\ +\displaystyle\int_0^s h_0(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)(\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})[\upsilon(\bar{\tau}) + \xi_\varepsilon(\bar{\tau}) + \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar{\tau})]d\bar{\tau} + (\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})[\upsilon(\bar{\tau}) + \\ +\xi_\varepsilon(\bar{\tau}) + \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar{\tau})]d\bar{\tau})^2)d\tau - \displaystyle\int_0^t h_0(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)(\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})[\upsilon(\bar{\tau}) + \xi_\varepsilon(\bar{\tau}) + \\ +\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar{\tau})]d\bar{\tau} + (\displaystyle\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})[\upsilon(\bar{\tau}) + \xi_\varepsilon(\bar{\tau}) + \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar{\tau})]d\bar{\tau})^2)d\tau + \\ +\displaystyle\int_0^s h_0(\tau)[\upsilon(\tau) + \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)](\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})\xi_\varepsilon(\bar{\tau})d\bar{\tau} + \lambda_1[(\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})\xi_\varepsilon(\bar{\tau})d\bar{\tau})^2 + \\ +2[\displaystyle\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})\upsilon(\bar{\tau})d\bar{\tau} + \dfrac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})\Pi_\varepsilon(\bar{\tau})d\bar{\tau}]\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})\xi_\varepsilon(\bar{\tau})d\bar{\tau}])d\tau - \\ -\displaystyle\int_0^t h_0(\tau)[\upsilon(\tau) + \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)](\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})\xi_\varepsilon(\bar{\tau})d\bar{\tau} + \lambda_1[(\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})\xi_\varepsilon(\bar{\tau})d\bar{\tau})^2 + \\ +2[\displaystyle\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})\upsilon(\bar{\tau})d\bar{\tau} + \dfrac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})\Pi_\varepsilon(\bar{\tau})d\bar{\tau}]\int_0^\tau K_0(\tau,\bar{\tau})\xi_\varepsilon(\bar{\tau})d\bar{\tau}])d\tau\}ds + \\ +\dfrac{1}{\varepsilon}(\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi(t))\{-\displaystyle\int_0^t K_0(t,\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau - \lambda_1[(\int_0^t K_0(t,\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau)^2 + \end{cases} \quad (4.2.40)$$

$$\begin{cases} +2[\int\limits_0^t K_0(t,\tau)\upsilon(\tau)d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t K_0(t,\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau]\int\limits_0^t K_0(t,\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau]+\int\limits_0^t h_0(\tau)\times \\ \times\xi_\varepsilon(\tau)(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)[\upsilon(\bar\tau)+\xi_\varepsilon(\bar\tau)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)]d\bar\tau+\lambda_1(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)[\upsilon(\bar\tau)+\xi_\varepsilon(\bar\tau)+ \\ +\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)]d\bar\tau)^2)d\tau+\int\limits_0^t h_0(\tau)[\upsilon(\tau)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)](\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\xi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau+ \\ +\lambda_1[(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\tau)\xi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau)^2+2[\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\upsilon(\bar\tau)d\bar\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau]\times \\ \times\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\xi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau])d\tau\}+\Delta_3(F_\varepsilon,F,\varepsilon)+\Delta_4(\upsilon,\Pi_\varepsilon,\varepsilon)+\Delta(\upsilon,\varepsilon)\equiv(Q_1\xi_\varepsilon)(t), \end{cases}$$

где выражения $\Delta(.),\Delta_3(.),\Delta_4(.),$ определяются в виде

$$\begin{cases} \Delta(\upsilon,\varepsilon)\equiv-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t h(s')ds'))(-\upsilon(s)+\upsilon(t))ds-\upsilon(t)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s')ds'), \\ \Delta_3(F_\varepsilon,F,\varepsilon)\equiv-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t h(s)(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t h(s')ds'))(F_\varepsilon(s)-F(s))ds+\frac{1}{\varepsilon}(F_\varepsilon(t)-F(t)), \\ \Delta_4(\upsilon,\Pi_\varepsilon,\varepsilon)\equiv-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t h(s)(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s))\{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^s K_0(s,\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau- \\ -\lambda_1[(\int\limits_0^s K_0(s,\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau)^2+2\frac{1}{\varepsilon}(\int\limits_0^s K_0(s,\tau)\upsilon(\tau)d\tau)(\int\limits_0^s K_0(s,\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau)]+ \\ +\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t K_0(t,\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau+\lambda_1[(\int\limits_0^t K_0(t,\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau)^2+2\frac{1}{\varepsilon}(\int\limits_0^t K_0(t,\tau)\upsilon(\tau)d\tau)\times \\ \times(\int\limits_0^t K_0(t,\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau)]+\int\limits_0^s h_0(\tau)\upsilon(\tau)(\int\limits_0^\tau \frac{1}{\varepsilon}K_0(\tau,\bar\tau)\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau+ \\ +\lambda_1[(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau)^2+2\frac{1}{\varepsilon}(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\upsilon(\bar\tau)d\bar\tau)(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau)])d\tau- \\ -\int\limits_0^t h_0(\tau)\upsilon(\tau)(\int\limits_0^\tau \frac{1}{\varepsilon}K_0(\tau,\bar\tau)\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau+\lambda_1[(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau)^2+ \\ +2\frac{1}{\varepsilon}(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\upsilon(\bar\tau)d\bar\tau)(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau)])d\tau+\int\limits_0^s h_0(\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)(\int\limits_0^\tau \frac{1}{\varepsilon}K_0(\tau,\bar\tau)\times \\ \times[\upsilon(\bar\tau)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)]d\bar\tau+\lambda_1[(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\upsilon(\bar\tau)d\bar\tau)^2+(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau)^2+ \\ +2\frac{1}{\varepsilon}(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\upsilon(\bar\tau)d\bar\tau)(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau)])d\tau-\int\limits_0^t h_0(\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)(\int\limits_0^\tau \frac{1}{\varepsilon}K_0(\tau,\bar\tau)\times \end{cases}$$

$$\begin{cases}\times[\upsilon(\bar\tau)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)]d\bar\tau+\lambda_1[(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\upsilon(\bar\tau)d\bar\tau)^2+(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau)^2+\\ +2\frac{1}{\varepsilon}(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\upsilon(\bar\tau)d\bar\tau)(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau)])d\tau\}ds+\\ +\frac{1}{\varepsilon}(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))\{-\int\limits_0^t K_0(t,\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau-\lambda_1[(\int\limits_0^t K_0(t,\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau)^2+\\ +2(\int\limits_0^t K_0(t,\tau)\upsilon(\tau)d\tau)(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t K_0(t,\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau)]+\int\limits_0^t h_0(\tau)\upsilon(\tau)\times\\ \times(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau+\lambda_1[(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau)^2+2(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\upsilon(\bar\tau)d\bar\tau)\times\\ \times(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau)])d\tau+\int\limits_0^t h_0(\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tau)(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)[\upsilon(\bar\tau)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)]d\bar\tau+\\ +\lambda_1[(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\upsilon(\bar\tau)d\bar\tau)^2+(\int\limits_0^\tau K_0(\tau,\bar\tau)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar\tau)d\bar\tau)^2+2(\int\limits_0^t K_0(t,\tau)\upsilon(\tau)d\tau)\times\\ \times(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t K_0(t,\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau)])d\tau\}.\end{cases}\tag{4.2.41}$$

Если:

$$\begin{cases}L_{Q_1}<1,\\ Q_1:S_{r_3}(0)\to S_{r_3}(0)=\{\xi_\varepsilon:\ \ |\xi_\varepsilon|\le r_3,\forall t\in[0,T]\},\end{cases}\tag{4.2.42}$$

то ИУ (4.2.40) однозначно разрешимо в $C[0,T]$.

В самом деле, чтобы оценить (4.2.40) и (4.2.41), учитываются следующие факты, в частности, покажем оценки выражений, где в знаменателях находится малый параметр с большими степенями, т.е. рассмотрим оценки:

$$\begin{cases}a_1)\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))\int\limits_0^t |K_0(t,s)|\times|\Pi_\varepsilon(s)|ds\le\frac{1}{\varepsilon^2}C_0^2t\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))\le\\ \le C_0^2\varepsilon^{\frac{3}{2}}((\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))\le C_0^2\varepsilon^{\frac{3}{2}}(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}=\sqrt{7^7}(2e)^{-\frac{7}{2}}C_0^2\varepsilon^{\frac{3}{2}},\\ a_2)\int\limits_0^t\frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi(\bar\tau))d\bar\tau=\frac{1}{\varepsilon^3}\bar\tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi(\bar\tau))\Big|_0^t+\int\limits_0^t\frac{1}{\varepsilon^3}\bar\tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi(\bar\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi(\bar\tau))\le\\ \le\frac{1}{\varepsilon^3}t\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi(t))+\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^t(\frac{2}{\varepsilon}\phi(\bar\tau))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi(\bar\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi(\bar\tau))d\bar\tau\le\end{cases}\tag{4.2.43}$$

$$
\begin{cases}
\le \frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{2}{\varepsilon}\phi(t))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi(t))+\int\limits_0^{\frac{2}{\varepsilon}\phi(t)}\rho^{\frac{7}{2}}\mathrm{e}^{-\rho}\,d\rho]\le\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\\
+\int\limits_0^{\infty}\rho^{\frac{7}{2}}\mathrm{e}^{-\rho}\,d\rho]=\sqrt{\varepsilon}\,\frac{1}{\sqrt{2^7}}[\sqrt{7^7}(2e)^{-\frac{7}{2}}+\frac{105\sqrt{\pi}}{16}],\\
a_3)\,\frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))(\int\limits_0^t\left|K_0(t,s)\right|\times\left|\Pi_\varepsilon(s)\right|ds)^2\le\frac{1}{\varepsilon^3}C_0^4[t\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))+\\
+\int\limits_0^t s\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))d(\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))]^2\le\frac{1}{\varepsilon^3}C_0^4M_1^2[\varepsilon^2(\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))^2\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))+\\
+\varepsilon^2\int\limits_0^t(\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))^2\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))d(\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))]^2\le C_0^4M_1^2\varepsilon[4e^{-2}+\int\limits_0^{\infty}e^{-\rho}\rho^2d\rho]^2\le 36C_0^4M_1^2\varepsilon,\\
a_4)\,\frac{1}{\varepsilon^4}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))\int\limits_0^t h_0(s)\left|\Pi_\varepsilon(s)\right|(\int\limits_0^s\left|K_0(s,\overline{s})\right|\times\left|\Pi_\varepsilon(\overline{s})\right|d\overline{s})^2ds\le C_0^5\,\frac{1}{\varepsilon^4}\int\limits_0^t h_0(s)\times\\
\times\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))(\int\limits_0^s\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(\overline{s}))d\overline{s})^2ds\le C_0^5\,\frac{1}{\varepsilon^4}\int\limits_0^t h_0(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))[s\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))+\\
+\int\limits_0^s\overline{s}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(\overline{s}))d\overline{s}]^2ds\le\frac{1}{\alpha}C_0^5\,\frac{1}{\varepsilon^4}M_1^2[\varepsilon^2 2^2e^{-2}+\varepsilon^2\int\limits_0^{\infty}e^{-\rho}\rho^2d\rho]^2\varepsilon(1-\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t)))\le\\
\le 36\frac{1}{\alpha}C_0^5M_1^2\varepsilon,\\
a_5)\,\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t)-\phi(s)))\{\int\limits_s^t h_0(s')C_0\,\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(s'))(\int\limits_0^{s'}\left|K_0(s',\overline{s})\right|C_0\,\frac{1}{\varepsilon}\times\\
\times\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(\overline{s}))d\overline{s})^2ds'\}ds\le\frac{1}{\varepsilon^3}C_0^5\,\frac{1}{\alpha}(\int\limits_0^{\infty}e^{-\rho}\rho d\rho)[M_1\varepsilon^2 2^2e^{-2}+M_1\varepsilon^2\int\limits_0^{\infty}e^{-\rho}\rho^2d\rho]^2\le\\
\le 36\frac{1}{\alpha}C_0^5M_1^2\varepsilon,\\
\int\limits_0^{\infty}e^{-z}zdz=1;\ \int\limits_0^{\infty}e^{-z}z^2dz=2,\\
\rho\equiv\frac{1}{\delta}\phi(t);\ \chi(\rho)\equiv\rho^k\exp(-\rho),\\
\sup\limits_{\rho\ge 0}\chi(\rho)=k^k\exp(-k),(k=2,\frac{7}{2}),\\
\rho=0:\chi(0)=0;\ \rho\to\infty:\chi\to 0.
\end{cases}
$$

Отсюда видно, что, действительно эти оценки регулярны относительно малого параметра.

С другой стороны, другие члены относительно остаточной функции, где содержится малый параметр в знаменателях с различными степенями, они меньше, чем вышеуказанных выражениях, поэтому нет необходимости их вычислять. Кроме того, члены с известными функциями, которые указаны в (4.2.41), также регулярны относительно малого параметра.

Следовательно, можем сказать, что при выполнении (4.2.25), (4.2.42), (4.2.43) и

$$\begin{cases} \left\|\Delta(\upsilon,\varepsilon)\right\|_C \le 3\left\|\upsilon(t)\right\|_C \exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}\right) + \omega_{\bar{\upsilon}}\left(\varepsilon^{\beta}\right), (0<\beta<1), \\ \left|\Delta_3(F_\varepsilon, F, \varepsilon)\right| \le \dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t h(s)(\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\int_s^t h(s')ds'))\Delta_0(\varepsilon)ds + \dfrac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon) \le \\ \le \dfrac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)(1-\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\phi(t))) + \dfrac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon) \le 2\dfrac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon), (\dfrac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0), \\ \left|\Delta_4(\upsilon, \Pi_\varepsilon, \varepsilon)\right| \le \mathrm{E}_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \end{cases} \tag{4.2.44}$$

из оценки (4.2.40) следует

$$\left\|\xi_\varepsilon(t)\right\|_C \le \left(1-L_{Q_1}\right)^{-1}[\mathrm{E}_0(\varepsilon) + \left\|\Delta(\upsilon,\varepsilon)\right\|_C + \frac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)] = \mathrm{E}_1(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{4.2.45}$$

Это значит, что функция $\xi_\varepsilon(t)$ однозначно определяется из ИУ (4.2.40), причем равномерно сходится к нулю, когда ε→0, т.е., действительно функция $\xi_\varepsilon(t)$ допускает условие леммы 4.2.2. ЧиТД.

В итоге, из полученных результатов леммы 4.2.2, с учетом (4.2.25) доказывается теорема:

Теорема 4.2.1. Если выполняются условия леммы 4.2.2, то на основе (4.2.25) следуют:

1) $$\begin{cases} \left\|\Pi_\varepsilon\right\|_{Z^1(0,T)} \le \gamma_1\varepsilon^2, (\gamma_1 = 6C_0M_1), \\ \left\|\Omega_\varepsilon\right\|_{Z^1(0,T)} \le \gamma_1\varepsilon, \end{cases} \tag{4.2.46}$$

2) $$\begin{cases} \|\theta_\varepsilon - \upsilon\|_{Z^1(0,T)} \le \mathrm{E}_1(\varepsilon)T + \gamma_1\varepsilon = \tilde{M}_0(\varepsilon), \\ \|\theta_\varepsilon\|_{Z^1(0,T)} \le r_* = const, \end{cases} \tag{4.2.47}$$

3) $$\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)\right\|_{Z^1(0,T)} \le \tilde{M}(\varepsilon), \left(\tilde{M}_0(\varepsilon), \tilde{M}(\varepsilon)\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0\right). \tag{4.2.48}$$

Доказательство. 1) Действительно, условие (4.2.46) получается на основе (4.2.27) леммы 4.2.2. Для этого, сперва, интегрируя неравенство (4.2.27) по переменной *t*, имеем

$$\begin{cases} \int_0^t |\Pi_\varepsilon(s)|ds \le C_0 \int_0^t \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))ds = C_0[t\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t)) + \int_0^t s\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))d(\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))] \le \\ \le C_0 M_1 \varepsilon^2 [(\frac{1}{\varepsilon}\phi(t))^2 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t)) + \int_0^t (\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))^2 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))d(\frac{1}{\varepsilon}\phi(s))] \le \\ \le C_0 M_1 \varepsilon^2 [4e^{-2} + \int_0^\infty \rho^2 e^{-\rho} d\rho] = 6C_0 M_1 \varepsilon^2 = \gamma_1 \varepsilon^2, \end{cases}$$

или, учитывая норму $Z^1(0,T)$ получим ((4.2.46)):

$$\begin{cases} \|\Pi_\varepsilon(t)\|_{Z^1(0,T)} \le \gamma_1 \varepsilon^2, \\ \|\Omega_\varepsilon(t)\|_{Z^1(0,T)} \le \gamma_1 \varepsilon. \end{cases}$$

2) Далее, переходим к доказательству (4.2.47). Для этого, учитывая (4.2.25) и проведя оценку, имеем:

$$\begin{cases} |\theta_\varepsilon - \upsilon| \le \mathrm{E}_1(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}|\Pi_\varepsilon(t)| \le \mathrm{E}_1(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}C_0 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t)), \\ |\Pi_\varepsilon(t)| \le E_1(\varepsilon) + C_0 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t)) + \tilde{r}_2. \end{cases} \tag{4.2.49}$$

С друной стороны, оценивая (4.2.49) в смысле нормы $Z^1(0,T)$, следует:

$$\|\theta_\varepsilon - \upsilon\|_{Z^1} \le \mathrm{E}_1(\varepsilon)T + \gamma_1\varepsilon = \tilde{M}_0(\varepsilon),$$

при этом

$$\|\theta_\varepsilon\|_{Z^1(0,T)} \le T(\tilde{r}_2 + \mathrm{E}_1(\varepsilon)) + \gamma_1\varepsilon \le r_*.$$

Значит, выполняется (4.2.47).

3) Чтобы показать (4.2.48), сперва, учитываем оценку:

$$|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)| = |\varepsilon\theta_\varepsilon + (\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F_\varepsilon(t) - \varepsilon(\theta_\varepsilon - \upsilon + \upsilon) + F_\varepsilon(t) - F(t)|, \tag{4.2.50}$$

где $F(t)$ свободный член ИУВ (4.2.20) (или(4.2.23)), а оператор $(\Phi\theta_\varepsilon)(t)$ определяется в виде (4.2.24). Далее, оценивая (4.2.50) в $Z^1(0,T)$, имеем

$$\begin{aligned} &\|(\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t)\|_{Z^1(0,T)} \le \|F_\varepsilon(t) - F(t)\|_{Z^1} + \varepsilon\|\theta_\varepsilon(t) - \upsilon(t)\|_{Z^1} + \varepsilon\tilde{r}_2 T] \le \\ &\le \Delta_0(\varepsilon)T + \varepsilon\tilde{M}_0(\varepsilon) + \varepsilon\tilde{r}_2 T] = \tilde{M}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \end{aligned}$$

ЧиТД.

§4.2.3. Общий вывод регуляризации ОЗ в пространстве $\tilde{G}^1_{[\tilde{W}^1(D),Z^1(0,T)]}(D)$ с нормой (4.2.4)

Из полученных результатов леммы 4.2.1 и теоремы 4.2.1, на основе

(4.2.5), (4.2.7) и функции $z, z_t(t,0,\omega)$, причем учитывая (4.2.23), в итоге имеем:

$$\begin{cases} \int_0^t h(s)\theta(s)ds - (H\theta)(t) \overset{(4.2.23)}{\equiv} (J\theta)(t) = F(t), \\ H\theta \equiv \int_0^t h_0(\tau)\theta(\tau)(J\theta)(\tau)d\tau - (J\theta)(t), [\int_0^t h(s)\theta(s)ds \equiv \int_0^t h_0(s)\theta(s)(J\theta)(s)ds], \\ U(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}[e^{i\omega^3 t} + \int_0^t e^{i\omega^3(t-s)}\{\lambda z(s,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \bar{\omega} z(s,0,\bar{\omega})\hat{\varphi}(\bar{\omega})d\bar{\omega})^2 + \\ +\int_0^s h(s')\theta(s')ds' - (H\theta)(s)\}ds]\hat{\varphi}(\omega)d\omega, \\ U_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} i\omega[e^{i\omega^3 t} + \int_0^t e^{i\omega^3(t-s)}\{\lambda z(s,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \bar{\omega} z(s,0,\bar{\omega})\hat{\varphi}(\bar{\omega})d\bar{\omega})^2 + \\ +\int_0^s h(s')\theta(s')ds' - (H\theta)(s)\}ds]\hat{\varphi}(\omega)d\omega, \\ U_{x^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\omega^2[e^{i\omega^3 t} + \int_0^t e^{i\omega^3(t-s)}\{\lambda z(s,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \bar{\omega} z(s,0,\bar{\omega})\hat{\varphi}(\bar{\omega})d\bar{\omega})^2 + \\ +\int_0^s h(s')\theta(s')ds' - (H\theta)(s)\}ds]\hat{\varphi}(\omega)d\omega, \\ U_{x^3} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} i\omega^3[e^{i\omega^3 t} + \int_0^t e^{i\omega^3(t-s)}\{\lambda z(s,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \bar{\omega} z(s,0,\bar{\omega})\hat{\varphi}(\bar{\omega})d\bar{\omega})^2 + \\ +\int_0^s h(s')\theta(s')ds' - (H\theta)(s)\}ds]\hat{\varphi}(\omega)d\omega, \\ U_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\{\lambda z(t,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \bar{\omega} z(t,0,\bar{\omega})\hat{\varphi}(\bar{\omega})d\bar{\omega})^2 + i\omega^3 z(t,0,\omega) + \\ +\int_0^t h(s')\theta(s')ds' - (H\theta)(t)\}\hat{\varphi}(\omega)d\omega. \end{cases} \tag{4.2.51}$$

Отсюда видно, что при проведении оценок относительно выражений

$$U - U_\varepsilon; U_x - U_{x\varepsilon}; U_{x^2} - U_{x^2\varepsilon}; U_{x^3} - U_{x^3\varepsilon}; U_t - U_{t\varepsilon}$$

есть выражение: $U_t - U_{t\varepsilon}$, связанное с разностью:

$$\begin{cases} (\Phi\theta_\varepsilon)(t) - F(t), \\ (\Phi\theta_\varepsilon)(t) \overset{(4.2.24)}{\equiv} \int_0^t h(s)\theta_\varepsilon(s)ds - (H\theta_\varepsilon)(t), \\ F(t) \overset{(4.2.23)}{=} \int_0^t h(s)\theta(s)ds - (H\theta)(t). \end{cases} \tag{4.2.52}$$

где разность (4.2.52) не находится подзнаком интеграла по переменной $t\in[0,T]$, в чем и отличается от других выражений.

Поэтому, проводим оценку относительно выражения:

$$U_{t\varepsilon}-U_t$$

где это выражение составляется, с учетом (4.2.51), т.е. :

$$\begin{aligned}
&U_{t\varepsilon}-U_t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\{\lambda[z_\varepsilon(t,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R\bar\omega z_\varepsilon(t,0,\bar\omega)\hat\varphi(\bar\omega)d\bar\omega)^2-\\
&-z(t,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R\bar\omega z(t,0,\bar\omega)\hat\varphi(\bar\omega)d\bar\omega)^2+i\omega^3[z_\varepsilon(t,0,\omega)-z(t,0,\omega)]+\\
&+(\Phi\theta_\varepsilon)(t)-F(t)\}\hat\varphi(\omega)d\omega.
\end{aligned}\tag{4.2.53}$$

Тогда, на основе результатов леммы 4.2.1 и (4.2.14) относительно функций z,z_ε, допуская условия:

$$\begin{cases}\left|z_\varepsilon-z\right|\le\Delta_{01}(\varepsilon),\forall(t,0,\omega)\in\bar D,\\ \left|z\right|,\left|z_\varepsilon\right|\le r_1,\forall(t,0,\omega)\in\bar D;\ \Delta_{01}(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0,\end{cases}\tag{4.2.54}$$

из оценки (4.2.53) следует:

$$\begin{aligned}
&\left|U_{t\varepsilon}-U_t\right|=\Big|\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\{\lambda[z_\varepsilon(t,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R\bar\omega z_\varepsilon(t,0,\bar\omega)\hat\varphi(\bar\omega)d\bar\omega)^2-\\
&-z(t,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R\bar\omega z(t,0,\bar\omega)\hat\varphi(\bar\omega)d\bar\omega)^2]+i\omega^3[z_\varepsilon(t,0,\omega)-z(t,0,\omega)]+\\
&+(\Phi\theta_\varepsilon)(t)-F(t)\}\hat\varphi(\omega)d\omega\ \Big|\le\left|\lambda\right|\times\left|d\right|(3r_1d_1+d_2)(\Delta_{01}(\varepsilon)+\left|d\right|\left|(\Phi\theta_\varepsilon)(t)-F(t)\right|=\\
&=d_*\Delta_{01}(\varepsilon)+\left|d\right|\left|(\Phi\theta_\varepsilon)(t)-F(t)\right|,(d_*=\left|\lambda\right|\times\left|d\right|(3r_1d_1+d_2)).
\end{aligned}$$

Следовательно, интегрируя по t, получим:

$$\int_0^t\left|U_{s\varepsilon}(s,x)-U_s(s,x)\right|ds\le d_*\Delta_{01}(\varepsilon)T+\left|d\right|\int_0^t\left|(\Phi\theta_\varepsilon)(s)-F(s)\right|ds\overset{(4.2.48)}{\le}d_*\Delta_{01}(\varepsilon)T+\tilde M(\varepsilon).$$

Поэтому, имеем

$$\left\|U_{t\varepsilon}-U_t\right\|_1\le d_*\Delta_{01}(\varepsilon)T+\tilde M(\varepsilon)=\Upsilon_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0.\tag{4.2.55}$$

Из остальных выражений, для наглядности проводим оценку относительно:

$$U_\varepsilon-U.$$

Отметим, что это и другие выражения:

$$U_x - U_{x\varepsilon}; U_{x^2} - U_{x^2\varepsilon}; U_{x^3} - U_{x^3\varepsilon} \ ,$$

содержат (4.2.52) под знаком интеграла по времени, поэтому их оценки аналогичны к друг другу.

В самом деле, из равенства

$$U_\varepsilon - U = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} [\int_0^t e^{i\omega^3(t-s)} \{\lambda(z_\varepsilon(s,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \bar{\omega} z_\varepsilon(s,0,\bar{\omega})\hat{\varphi}(\bar{\omega})d\bar{\omega})^2 -$$

$$-z(s,0,\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \bar{\omega} z(s,0,\bar{\omega})\hat{\varphi}(\bar{\omega})d\bar{\omega})^2) + (\Phi\theta_\varepsilon)(s) - F(s)\}ds]\hat{\varphi}(\omega)d\omega,$$

следует оценка:

$$|U_\varepsilon - U| \le 3|\lambda| \times |d| r_1 d_1 T \Delta_{01}(\varepsilon) + |d| \int_0^t |(\Phi\theta_\varepsilon)(s) - F(s)| ds \le |d| [3|\lambda| r_1 d_1 T \Delta_{01}(\varepsilon) +$$

$$+\tilde{M}(\varepsilon)] = \Upsilon_1(\varepsilon), \forall (t,0,\omega) \in \bar{D}$$

или

$$\|U_\varepsilon - U\|_{C(\bar{D})} \le \Upsilon_1(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (4.2.56)$$

Поэтому, как выше отмечено, аналогично можем допускать оценки:

$$\begin{cases} \|U_{x\varepsilon} - U_x\|_{C(\bar{D})} \le \Upsilon_2(\varepsilon), \\ \|U_{x^2\varepsilon} - U_{x^2}\|_{C(\bar{D})} \le \Upsilon_3(\varepsilon), \\ \|U_{x^3\varepsilon} - U_{x^3}\|_{C(\bar{D})} \le \Upsilon_4(\varepsilon). \end{cases} \qquad (4.2.57)$$

Значит, имеет место:

$$\|U_\varepsilon - U\|_{\tilde{W}^1(D)} \le \sum_{i=0}^{4} \Upsilon_i(\varepsilon) = \Upsilon_*(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (4.2.58)$$

В результате, учитывая (4.2.47) и (4.2.58) с теми выводами, которые указаны выше следует:

$$\|V_\varepsilon\|_{\tilde{G}^1_{[\tilde{W}^1(D);Z^1(0,T)]}(D)} \le \Upsilon_*(\varepsilon) + \tilde{M}_0(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, (V_\varepsilon = U_\varepsilon - U, \theta_\varepsilon - \upsilon)). \qquad (4.2.59)$$

Утверждение 4.2.1. В условиях леммы 4.2.1 и теоремы 4.2.1, и (4.2.59) ОЗ (4.2.1) - (4.2.3) регуляризируема в обобщенном смысле в $\tilde{G}^1_{[\tilde{W}^1(D);Z^1(0,T)]}(D)$.

Замечание 4.2.1. Если относительно (*) допускаем:

$\lambda_1 = 0$,

то вместо ИУ (4.2.20) имеем линейное некорректное ИУВ-1:

$$\int_0^t K_0(t,s)\theta(s)ds = F(t), \qquad (4.2.60)$$

причем, все результаты теоремы 4.2.1 имеют место для этого ИУВ-1.

Поэтому, для ОЗ в неограниченной области, где вырождается ИУВ-1 вида (4.2.60), можем сделать аналогичные выводы, которые указаны выше. Значит, в итоге ОЗ, выраждающая в ИУВ-1 (4.2.60) допускает условие утверждение 4.2.1.

§4.3. Заключение главы 4

В главе 4 рассмотрены ОЗ с нагруженными дифференциальными операторами параболического характера и типа Кортевега Де Фриза (КДФ) в неограниченной области, где вырождаются различные классы ИУВ-1. Изучаемые задачи исследованы на основе преобразования Фурье и метода регуляризации в введенных пространствах.

Отметим, что результаты параграфа 4.1 носит информационный характер, так как здесь изучены ОЗ, где вырождаются ИУВ-1, причем применяются классические варианты МР в пространствах Банаха и Гильберта.

В отличие от параграфа 4.1, в § 4.2 изучена ОЗ, где вырождается некорректное нелинейное ИУВ-1 специального вида. Регуляризируемость ОЗ в этом случае, рассматривается в обобщенном смысле.

Выводы

В настоящей работе исследованы некорректные нелинейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода (ИУВ-1) с различными пределами интегрирования, а также обратные задачи (ОЗ) с гиперболическими операторами и с нагруженными операторами параболического характера, и типа Кортевега Де Фриза в неограниченной области, вырождающиеся в нелинейные ИУВ-1 с решениями, связанные с функцией Дирака. При этом изложены методы регуляризации в обобщенном смысле изучаемых некорректных ИУВ-1 и ОЗ в введенных пространствах.

Все научные результаты, излагаемые в диссертационной работе строго математически обоснованы в рассматриваемых пространствах и дополняют теорию регуляризации не только ИУВ-1 в обобщенном смысле, но и теорию многомерных ОЗ, где вырождаются многомерные ИУВ-1 с решениями в классе сингулярных обобщенных функций. А также результаты работы могут быть использованы магистрантами, аспирантами, докторантами и специалистами в этой области.

Список использованных источников

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции [Текст] / В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1984(2-е изд.). –384 с.

2. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра 1 рода: теория и численные методы [Текст] /А.С. Апарцин. - Новосибирск: Наука, (Сиб. изд. РАН),1999.-199с.

3. Аллер М. Эффективный потенциал воды при высыхании почв //Термодинамика почвенной влаги [Текст] / М. Аллер. – Л.: Гидрометеоиздат, 1966. –С. 325-360.

4. Аниконов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений [Текст] / Ю.Е. Аниконов. - Новосибирск: Наука, 1978. -118с.

5. Алифанов О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач [Текст]/О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. [Текст] / -М.: Наука, 1988.-288с.

6. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. [Текст] / Б.С. Аблабеков, А.Р. Асанов, А.К. Курманбаева– Б.: Илим, 2010.-156 с.

7. Алыбаев А.М. Регуляризация обратной задачи в неограниченной области, вырождающая некорректное уравнение Вольтерра первого рода с неклассическим пределом интегрирования [Текст] / А.М. Алыбаев //Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2023, №3(111).-С.366-385.

8. Алыбаев А.М. Решение многомерной обратной задачи для нелинейного дифференциального уравнения в неограниченной области [Текст] / А.М. Алыбаев, М.Т. Омуров, Бузурман кызы Ж., Г.Ж. Белгожоева. // Актуальные научные исслед. в современном мире. -Переяслав - Хмельницкий, 2020. – Вып. 2(58). ч.2. – С. 107-116.

9. Алыбаев А.М. Регуляризация обратных задач в неограниченной области посредством преобразования Фурье[Текст] / А.М Алыбаев ., Д.Н. Шабданов

//Актуальные научные исследования в современном мире. - Переяслав-Хмельницкий, 2021,№2-8(70).-С.9-13

10.Алыбаев А.М. Регуляризация некорректного интегрального уравнения Вольтерра первого рода [Текст] / А.М. Алыбаев // Бюллетень науки и практики. – Нижневартовск, 2022. -Т.8, №7. –С.29-40.

11.Алыбаев А.М. Регуляризация обратной задачи с оператором гиперболического типа, где вырождается некорректное уравнение Вольтерра первого рода [Текст] /А.М. Алыбаев //Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. –М.: Акад. Естествознания, 2022. №7. – С.57-71.

12.Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. [Текст] / А.А. Борубаев – Фрунзе: Илим, 1990. -172с.

13.Бухгейм А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. [Текст] / А.Л. Бухгейм –Новосибирск: Наука, 1983.- 207с.

14.Байзаков А.Б. Особые точки интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. [Текст] / А.Б. Байзаков –Б.: Илим, 2007. -134 с.

15. Бараталиев К.Б. К теории интегральных уравнений третьего рода. [Текст] / К.Б. Бараталиев –Б.: АО Учкун, 2004. -160 с.

16.Владимиров В.С. Уравнения математической физики. [Текст] / В.С. Владимиров -М.: Наука,1976.-527с

17. Вабищевич П.Н. Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности [Текст] / П.Н. Вабищевич //Дифференц.уравнения. -1981.-Т.17, №7.-С.1193-1199.

18.Денисов А.М. О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности [Текст] / А.М. Денисов // Вест. МГУ. – Вычисл. матем. и киберн. – 1980. -№3. – С. 49-52.

19.Елеев В.А. Обобщенная задача Трикоми для смешанных гипербола-параболических уравнений [Текст] / В.А. Елеев // Дифференц. уравнения. - 1979. –Т.11.-№1. – С. 41-53.

20. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах [Текст] / В.К. Иванов //Мат. сб. – 1963.- Т.61,№2.-С.211-223.
21.Иманалиев М.И. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода. [Текст] / М.И. Иманалиев - Фрунзе: Илим, 1981. - 144 с.
22. Иманалиев М.И. О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом [Текст] / М.И. Иманалиев, Ведь Ю.А. // Дифференц. уравнения. –1989. – Т. 23, №3. – С. 465-477.
23. Иманалиев М.И. Метод дополнительного аргумента в теории нелинейных волновых уравнений в частных производных [Текст] / М.И. Иманалиев, П.С. Панков, Т.М. Иманалиев //ДАН, 1995. -Т.343, №5. -С.546-548.
24. Иманалиев Т.М. Обоснование и развитие метода дополнительного аргумента для решения дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / Т.М. Иманалиев /Дис. д-ра физ.–мат. наук, по спец. 01.01.02. -Б.: ЦНБ НАН КР, 2000. -128 С.
25. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теплопроводности с неклассическим краевым условием [Текст] / Н.И. Ионкин //Дифференц. уравнения. - 1977. - Т.13, №2.-С.294-304.
26. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. [Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин – Мосвка: Наука, 1976. -544с.
27. Колтон Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния [Текст] / Д. Колтон, Кресс Р. –М.: Мир, 1987. – 311 с.
28. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. [Текст] / С.И. Кабанихин- Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. – 457 с.
29. Лаврентьев М.М. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. [Текст] / М.М. Лаврентьев, В.Г. Васильев, В.Г. Романов – Изд-во: Наука Сиб. Отд-е Новосибирск, 1969.-67с.
30. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической

физики. [Текст] / М.М. Лаврентьев - Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.- 92 с.

31. Лаврентьев М.М. Регуляризация операторных уравнений типа Вольтерра [Текст] / М.М. Лаврентьев //Проблема мат.физ. и вычислит. матем. -М.: Наука, 1977.-С.199-205.

32. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода [Текст] / Н.А. Магницкий – //Журн. вычисл. мат. и мат. физики. - 1979. - Т.19, №4. – С.970-989.

33. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. [Текст] / В.А. Морозов – М.:Изд-во Моск. ун-та, 1987.-216с.

34.Напсо А.Ф. О задаче Бицадзе-Самарского для уравнения параболического типа [Текст] / А.Ф. Напсо – //Дифференц. уравнения. -1977. – Т.13, №4. – С.761-762.

35. Ньюэлл А. Солитоны вматематике и физике. [Текст] / А. Ньюэлл – М.: Мир, (пер. с англ.), 1989. – 326 с.

36.Наубетова Ш.А. Регуляризирующие алгоритмы решения интегральных уравнений Вольтерра 1 рода с переменным нижним пределом [Текст] / Ш.А. Наубетова, Ю.П. Яценко – //Прибл. методы анализа и их приложения. – Иркутск, 1988. С.81-91.

37. Наумкин П.И. Обобщенные решения для уравнения Уизема [Текст] / П.И. Наумкин, И.А. Шишмарев – //Дифференц. уравнения. - 1992. - Т.28, №1. - С.121-126.

38. Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифферен-циальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги [Текст] / А.М. Нахушев – //Там же. -1979. -Т.15, №1.-С.96-105.

39. Нерпин С.В. Энерго и массообмен в системе растение-почва-воздух. [Текст] / С.В. Нерпин, А.Ф. Чудновский – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. -358 с.

40. Омуров Т.Д. Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра

первого и третьего рода. [Текст] / Т.Д. Омуров –Бишкек: Илим, 2003.- 162 с.
41. Омуров Т.Д. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. [Текст] / Т.Д. Омуров, Т.Т. Каракеев – Бишкек: Илим, 2006.- 164с.
42. Омуров Т.Д. Обратные задачи в приложениях математической физики [Текст]./ Т.Д. Омуров, А.О. Рыспаев, М.Т. Омуров -Бишкек:КНУ,2014.-192 с.
43. Омуров Т.Д. Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса [Текст] / Т.Д. Омуров, М.М. Туганбаев Ин-т теорет. и прикладной математики НАН КР. – Б.: Илим, 2010. – 116 с.
44. Омуров Т.Д. Многомерная обратная задача с условиями типа Гурса [Текст] / Т.Д. Омуров, А.О. Рыспаев, М.Т. Омуров // Дифференциальные уравнения и процессы управления. - Санкт-Петербург, 2016, №4. – С. 1-13.
45. Омуров Т.Д. Обратная задача типа Гурса для многомерных гиперболических туравнений вида Аллера [Текст] / Т.Д. Омуров, А.О. Рыспаев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. -Воронеж, 2022, №2. - С. 81-92.
46. Омуров Т.Д. Методы регуляризации обратных задач, где вырождаются некорректные интегральные уравнения Вольтерра первого рода [Текст] / Т.Д. Омуров, А.М. Алыбаев /КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2023. -196 с.
47. Омуров Т.Д. Регуляризация обратной задачи типа Аллера, где вырождается нелинейное уравнения Вольтерра первого рода [Текст] / Т.Д. Омуров, А.М. Алыбаев //Изв. НАН КР. –Бишкек: Илим, 2023, №3.-С.7-28.
48. Омуров Т.Д. Решение смешанной системы уравнений с условиями типа Гурса с обратным временем [Текст] / Т.Д. Омуров, А.М. Алыбавев // Вестник КГНУ: ЕТН- Бишкек, 2005.–Серия 3. -Вып.3. - С.96-102.
49. Омуров Т.Д. Обратно-нелокальная задача в неограниченной области, где вырождается неклассическое интегральное уравнение Вольтерра третьего рода [Текст] / Т.Д. Омуров, А.М. Алыбаев, К.Р. Джумагулов //Москва. Наука, техника и образование, №1(31), 2017. –С.10-15.

50. Омуров Т.Д. Двухскоростные задачи с обратным временем для уравнений переноса типа Каца [Текст] / Т.Д. Омуров, А.М. Алыбаев, Ж. Саркелова //Журнал – Переяслав-Хмельницкий, 2019. – Вып.11(55),ч.8. – С.31-39.
51. Романов В.Г. Обратные задачи для математической физики. [Текст] / В.Г. Романов - М.: Наука, 1984.-264 с.
52. Саадабаев А. Построение решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве с приближенно заданной правой частью [Текст] / А. Саадабаев // Вестник Ошского ГУ. Спец. выпуск: №1. - Ош, 2013.-С. 238-242.
53. Сергеев В.О. Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / В.О. Сергеев //Докл. АН СССР.-1971.-Т.197.-№3.-С.531-534.
54. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач. [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин -М.: Наука, 1974.-224с.
55.Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. [Текст] /А.Н. Тихонов //Докл. АН СССР. - 1963.-Т. 153. -№1.-С.49-52.
56. Треногин В.А. Функциональный анализ. [Текст] / В.А. Треногин – М.: Наука, 1980.-496 с.
57. Тобиас Т. Об обратной задаче определения ядра наследственной среды [Текст] / Т. Тобиас //Изв. АН ЭССР. Физ.–матем., 1984. -№2. –С. 182-187.
58. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. [Текст] / Дж. Уизем – Москва: Мир, 1977. -622 с.
59. Шхануков М.А. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений [Текст] / М.А. Шхануков //Дифференц. уравнения. -1983.-Т.18, №1.-С.145-152.
60. Шеффер Х.Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. [Текст] / Х.Л. Массера, Х.Х. Шеффер – Москва: Мир, 1970. -456 с.
61. Янно Я. Регуляризация одного уравнения Вольтерра I рода равносильного уравнению III рода [Текст] / Я. Янно //Учен. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1987. - Вып.762. -С.16-30.

62. Некорректные задачи естествознания [Текст] / А.Н. Тихонов., А.В. Гончарский / под редакции А.Н. Тихонова., А.В. Гончарского. – М.: Изд. МУ, 1987. – 299с.
63. Asanov, A. Regularization, Uniquenesses and Existence of solutions of Volterr Equation of first Kind [Текст] / A. Asanov/ VSP, Utrecht, the Nederlands Tokyo, Japan, 1998, 272 pp.
64. Alybaev, A.M. Regularization method in conditionally well-posed inverse problems degenerating in the first kind volterra equations [Текст] /A.M. Alybaev //Advances in Differetial Equations and Control Processes, Vol. 24, (2): 187-198 (2021).
65. Faddeev, L.D. Poisson structure for the KdV eguation [Текст] /L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan. //Lett. Math. Phys., 10, pp. 183-188(1985).
66. Miura, R.M. Korteweg - de Vries eguation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transwformation [Текст] /R.M. Miura. // J. Math. Phys., 9, pp. 1202-1204(1968).
67.Omurov, T.D. Solution of multidimensional inverse problem for third-order differentional equation [Текст] / T.D. Omurov, A.M. Alybaev, M.T. Omurov //Advances in Differential Equations and Control ProcessesVol. 23 (2): 125-137 (2020).
68.Omurov, T.D. Regularization of a system of the first kind Volterra incorrect two-dimensional equations /[Текст] / T.D. Omurov, A.M. Alybaev / Advances in Differential Equations and Control ProcessesVol. 27: 149-162 (2022).
69. Omurov, T.D. Solving of multidimensional inverse problem for differential equation of the third order in unbounded domain [Текст] / T.D. Omurov, A.M. Alybaev, M.T. Omurov // VI Congress of the Turkic World Mathematical Society, Astana-Kazakhstan, October 2-5, 2017, 108.
70. Omurov, T.D. Regularization of conditionally well-posed inverse problems degenerating in the first kind Volterra equations [Текст] / T.D. Omurov, A.M. Alybaev // KMS: Theses of International Scientific Conference “Problems of

Modern Mathematics and ITS Applications” Kyrgyzstan, Bishkek- Issyk-Kul, 16-19 June, 2021, pp 94.

71. Alybaev, A.M. Regularization in the generalized sense of the looded inverse problem of Korteweg De Vries type degenerating to the incorret Volterra equation of the first kind [Текст] / A.M. Alybaev. // TWMS - 23, took place in Turkestan, Kazakhstan between 20-23 september 2023. - 1 pp.