УДК. 517.2

# РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ЛИНЕЙНЫМИ СХОДНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

**УСЕНОВ И.А., САБИРОВ Я.А.**
*КГТУ им. И.Раззакова*
izvestiya@ktu.aknet.kg

*В работе рассматриваются решения нелинейного операторного уравнения первого рода методом малого параметра в Гильбертовом пространстве. Построен регуляризующий оператор. Изучена сходимость и устойчивость построенного регуляризующего оператора.*

В работе [2] применен метод Лаврентьева М.М. для построения приближенного решения нелинейного операторного уравнения первого рода, когда нелинейный оператор представимо через исходный линейный оператор, также исследовано, когда нелинейный оператор представимо через положительный степень исходного оператора с сходными линейными операторами.

Рассмотрим операторное уравнение вида $Az = u + BKz$, (1)

где A - линейный непрерывный самосопряженный положительный оператор в Гильбертовом пространстве;

B- линейные непрерывный оператор сходные с оператором A;

K- нелинейный оператор определенные в шаре Гильбертовом пространстве и удовлетворяет условию Липшица т.е. для любого $z_1, z_2 \in H$

$$\|Kz_1 - Kz_2\| \le N\|z_1 - z_2\| \quad (2)$$

Допустим, что при $u = u_0$ уравнение (1) имеет единственное решение $z_0 \in H$, т.е. имеет место тождество

$$Az_0 \equiv u_0 + BKz_0. \quad (3)$$

Предположим, что оператор $A^{-1}$ существует, но не является ограниченным. Тогда решение уравнения (1) не является устойчивым от правой части $u$, т.к. на практике известно только приближенное значение $u$ взятое из эксперимента, т.е. на правую часть уравнения (1) допускается погрешность $\delta$

$$\|u_0 - u_\delta\| \le \delta. \quad (5)$$

Таким образом, ставится задача: Найти устойчивое решение уравнения (1)?.

Для построения устойчивого приближенного решения наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение второго рода с малым параметром вида

$$\alpha z_\alpha + Az_\alpha = u + (\alpha E + B)Kz_\alpha. \quad (6)$$

Имеет место следующая:

**Лемма 1**[1]: Пусть оператор A – линейный непрерывный самосопряженный положительный оператор, то при любом $\alpha > 0$ оператор $\alpha E + A$ обратим и ограничен, причем имеет место неравенство

$$\left\|(\alpha E + A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{\alpha}. \quad (7)$$

**Лемма 2:** Пусть B – линейный непрерывный самосопряженный оператор, $\alpha$ - принадлежит спектру оператора B, то для оператора $\alpha E + B$ имеет место равенство $\|\alpha E + B\| = 2\alpha.$ (8)

**Доказательство:** Рассмотрим норму оператора $\alpha E + B$

$$\|(\alpha E + B)z\|^2 = (\alpha z + Bz, \alpha z + Bz) = (\alpha z, \alpha z) + (\alpha z, Bz) + (Bz, \alpha z) + (Bz, Bz).$$

В силу самосопряженности оператора B, имеем

$$\|(\alpha E + B)z\|^2 = \alpha^2\|z\|^2 + 2\alpha(Bz, z) + (Bz, Bz). \quad (9)$$

По условию леммы 2 $\alpha$ - является спектром оператора B, то имеет место равенство

$$Bz = \alpha z. \quad (10)$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Тогда используя (10) , из (9) имеем
$$\|(\alpha E+B)z\|^2=\alpha^2\|z\|^2+2\alpha(\alpha z,z)+(\alpha z,\alpha z)=$$
$$=\alpha^2\|z\|^2+2\alpha^2\|z\|^2+\alpha^2\|z\|^2=4\alpha^2\|z\|^2.$$

Отсюда, имеем $\|(\alpha E+B)z\|=2\alpha\|z\|$.

Лемма 2 доказана.

В силу леммы 1 из операторного уравнения (6) переходим к операторному уравнению вида
$$z_\alpha=(\alpha E+A)^{-1}u+(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)Kz_\alpha. \quad (11)$$

Рассмотрим, нелинейный оператор в правой части уравнения (11) и покажем, что данный оператор удовлетворяет условию Липшица
$$\left\|(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)Kz_1-(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)Kz_2\right\|\le\left\|(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)(Kz_1-Kz_2)\right\|\le$$
$$\le\left\|(\alpha E+A)^{-1}\right\|\cdot\|\alpha E+B\|\cdot\|Kz_1-Kz_2\|. \quad (12)$$

В силу неравенства (7), равенства (8) и условия (2) из (12) имеем (13). Пусть $2N<1$ или
$$\left\|(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)Kz_1-(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)Kz_2\right\|\le\frac{1}{\alpha}\cdot2\alpha\cdot N\|z_1-z_2\|=2N\|z_1-z_2\|.$$ $N<\frac{1}{2}$, то

нелинейный оператор $(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)Kz$ является сжимающим оператором.

Уравнение (11) решаем методом последовательных приближений.

За нулевое приближение возьмем элемент $\tilde z_0=(\alpha E+A)^{-1}$ (14)

Остальные определяем по формуле:
$$z_k=\tilde z_0+(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)Kz_{k-1},\quad k=1,2,\ldots (15)$$

Покажем, что последовательность приближения $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ является сходящейся.

Из элементов последовательности приближения составим ряд
$$\tilde z_0+[z_1-\tilde z_0]+[z_2-z_1]+\ldots+[z_k-z_{k-1}]+\ldots (16)$$

Сходимость последовательности $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ и ряда (16) эквивалентны, т.к. $к$- тый член последовательности (15) совпадает $к$- ой частичной суммой ряда (16).

Оценивая каждый член ряда (21) составим мажорантный ряд.

Нулевое приближение $\tilde z_0$ удовлетворяет неравенству
$$\|\tilde z_0\|\le\frac{1}{\alpha}\|u\|. \quad (17)$$

Полагая к=1 из (15) имеем
$$\|z_1-\tilde z_0\|=\left\|(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)K\tilde z_0\right\|\le$$
$$\le\left\|(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)(K\tilde z_0-K(0))\right\|+ \quad (18_1)$$
$$+\left\|(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)K(0)\right\|\le2N\|\tilde z_0\|+2\|K(0)\|.$$

Полагая в (15) к=2 и к=1, вычитая из выражения при к=2 выражение при к=1, имеем
$$\|z_2-z_1\|=\left\|(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)Kz_1-(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)K\tilde z_0\right\|\le$$
$$\le\left\|(\alpha E+A)^{-1}\right\|\cdot\|\alpha E+B\|\cdot\|Kz_1-K\tilde z_0\|\le2N\|z_1-\tilde z_0\|\le \quad (18_2)$$
$$\le(2N)^2\|\tilde z_0\|+2^2N\|K(0)\|.$$

Справедливость данного, пусть при k=n имеет место процесса при $k\ge2$, докажем методом полной математической индукции неравенство

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

$$\|z_n - z_{n-1}\| \le (2N)^n \|z_0\| + 2^n \cdot N^{n-1} \|K(0)\|. \qquad (18_n)$$

Покажем, что при k=n+1 и k=n имеет место неравенство:

$$\|z_{n+1} - z_n\| \le (2N)^{n+1} \|\tilde{z}_0\| + 2^{n+1} \cdot N^n \|K(0)\|. \qquad (18_{n+1})$$

Полагая в (20) k=n+1 и k=n и вычитая друг из друга,

имеем: $\|z_{n+1} - z_n\| \le \left\|(\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + B)Kz_n - (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + B)Kz_{n-1}\right\| \le$

$$\le \left\|(\alpha E + A)^{-1}\right\| \cdot \|\alpha E + B\| \|Kz_n - Kz_{n-1}\| \le 2N \|z_n - z_{n-1}\|.$$

В силу выполнения неравенства (18.n), имеем

$\|z_{n+1} - z_n\| \le (2N)^{n+1} \|\tilde{z}_0\| + 2^{n+1} \cdot N^n \|K(0)\|$. Следовательно, ряд (16) мажорируется следующим числовым рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2N)^k \|\tilde{z}_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot N^{k-1} \|K(0)\|. \quad (19)$$

Сходимость числового ряда (19) докажем признаком Даламбера.

Для первого ряда: $a_k = (2N)^k$ è $a_{k+1} = (2N)^{k+1}$, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2N)^{k+1}}{(2N)^k} = 2N < 1,$$

при N<$\frac{1}{2}$.

Для второго ряда: $a_k = 2^k \cdot N^{k-1}$ è $a_{k+1} = 2^{k+1} \cdot N^k$, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1} \cdot N^k}{2^k \cdot N^{k-1}} = 2N < 1, \text{ при } N < \frac{1}{2}.$$

Тогда числовой ряд при условии, что N<$\frac{1}{2}$ сходится. Следовательно, ряд (16) также является сходящимся. Сумму ряда (16) обозначим через $z_\alpha$. В силу эквивалентности $z_\alpha$ является пределом последовательности приближения $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} z_k = z_\alpha. \quad (20)$$

Переходя к пределу в (15) при $k \to \infty$ и используя непрерывность оператора $(\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + B)K$, имеем

$$z_\alpha = (\alpha E + A)^{-1} u + (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + B)K z_\alpha. \quad (21)$$

Следовательно, $z_\alpha$ удовлетворяет уравнению (11).

Таким образом, доказана:

**Теорема 1.** Пусть:

1. Операторы A,B линейные непрерывные сходные операторы т.е. $D(A) = D(B)$ ;
2. Оператор B подчиненный оператор оператору A, т.е. $D(\alpha E + B) \subseteq D(\alpha E + A)$;
3. Нелинейный оператор K определен на в пространстве H и удовлетворяет условию Липшица с постоянной N<$\frac{1}{2}$.

Тогда при любом $u \in H$ и $\alpha > 0$ уравнение (11) имеет единственное решение $z_\alpha \in H$.

Обозначим решение уравнения (11) при $u = u_0$ через $z_\alpha^0$. В силу формулы (21) оно представимо в виде

$$z_\alpha^0 = (\alpha E + A)^{-1} u_0 + (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + B) K z_\alpha^0. \quad (22)$$

По предположению при $u = u_0$ точное решение $z_0 \in H$ представимо в виде

$$z_0 = A^{-1} u_0 + A^{-1} B K z_0. \quad (23)\ (24)$$

Вычитая из (22) (23), имеем

$$z_\alpha^0 - z_0 = (\alpha E + A)^{-1} u_0 + (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + B) K z_\alpha^0 - A^{-1} u_0 - A^{-1} B K z_0.$$

Используя тождество $u_0 \equiv A z_0 - B K z_0$, из (24) имеем

$$\begin{aligned} & z_\alpha^0 - z_0 = (\alpha E + A)^{-1}(A z_0 - B K z_0) + (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + B) K z_\alpha^0 - \\ & - A^{-1}(A z_0 - B K z_0) - A^{-1} B K z_0 = (\alpha E + A)^{-1} A z_0 - (\alpha E + A)^{-1} B K z_0 + \\ & + (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + B) K z_\alpha^0 - z_0 + A^{-1} B K z_0 - A^{-1} B K z_0 = (\alpha E + A)^{-1} \cdot \\ & \cdot (A z_0 - \alpha z_0 - A z_0) + (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + B) K z_\alpha^0 - (\alpha E + A)^{-1} B K z_0 = \\ & = -\alpha (\alpha E + A)^{-1} z_0 + (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + B)\left[K z_\alpha^0 - K z_0\right] + \alpha (\alpha E + A)^{-1} K z_0 = \\ & = -\alpha (\alpha E + A)^{-1}(z_0 - K z_0) + (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + B)\left(K z_\alpha^0 - K z_0\right) \end{aligned} \quad (25)$$

Допустим, что предполагаемое точное решение представимо в виде:

$$z_0 - K z_0 = A v_0, \ v_0 \in H. \quad (26)$$

Используя (26), из (25) имеем

$$z_\alpha^0 - z_0 = -\alpha (\alpha E + A)^{-1} A v_0 + (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + B)\left(K z_\alpha^0 - K z_0\right). \quad (27)$$

Оценим разность $z_\alpha^0 - z_0$:

$$\begin{aligned} & \left\| z_\alpha^0 - z_0 \right\| \le \left\| \alpha (\alpha E + A)^{-1} A v_0 \right\| + \left\| (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + B)\left(K z_\alpha^0 - K z_0\right) \right\| \le \\ & \le \alpha \left\| (\alpha E + A)^{-1} A v_0 \right\| + \left\| (\alpha E + A)^{-1} \right\| \left\| \alpha E + B \right\| \left\| K z_\alpha^0 - K z_0 \right\| \le \\ & \le \alpha \left\| v_0 \right\| + 2N \left\| z_\alpha^0 - z_0 \right\|. \end{aligned} \quad (28)$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Учитывая, что $N<\dfrac{1}{2}$ из (28) имеем

$$\left\|z_\alpha^0-z_0\right\|\le\frac{\alpha\|v_0\|}{1-2N}. \qquad (29)$$

Из оценки (29) следует, что при $\alpha\to 0$ $z_\alpha^0\to z_0$.

Таким образом, доказана:

**Теорема 2.** Пусть:

1) выполнены все условия теоремы 1;
2) точное решение представимо в виде (26).

Тогда решение $z_\alpha$ уравнения (11) при $\alpha\to 0$ сходится к точному решению $z_0$ уравнения (1). Скорость сходимости удовлетворяет условию (29).

Пусть вместо $u_0$ нам известно его приближенное значение $u_\delta$ удовлетворяющий неравенству (5).

Тогда решение уравнения (11) в силу представления (21) запишется в виде

$$z_\alpha^\delta=(\alpha E+A)^{-1}u_\delta+(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)Kz_\alpha^\delta. \qquad (30)$$

Оценим разность $z_\alpha^\delta-z_0$.

Используя неравенство треугольника, имеем (31):

$$\left\|z_\alpha^\delta-z_0\right\|\le\left\|z_\alpha^\delta-z_\alpha^0\right\|+\left\|z_\alpha^0-z_0\right\|. \qquad (31)$$

Второе слагаемое в правой части (31) удовлетворяет неравенству (29).
Оценим первое слагаемое в правой части (31)

$$\left\|z_\alpha^\delta-z_\alpha^0\right\|=\left\|(\alpha E+A)^{-1}u_\delta+(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)Kz_\alpha^\delta-(\alpha E+A)^{-1}u_0-\right.$$
$$\left.-(\alpha E+A)^{-1}(\alpha E+B)Kz_\alpha^0\right\|\le\left\|(\alpha E+A)^{-1}(u_\delta-u_0)\right\|+\left\|(\alpha E+A)^{-1}\right\|\cdot$$
$$\cdot\|\alpha E+B\|\cdot\left\|Kz_\alpha^\delta-Kz_\alpha^0\right\|\le\frac{\delta}{\alpha}+2N\left\|z_\alpha^\delta-z_\alpha^0\right\|. \qquad (32)$$

Отсюда при $N<\dfrac{1}{2}$, имеем $\left\|z_\alpha^\delta-z_\alpha^0\right\|\le\dfrac{\frac{\delta}{\alpha}}{1-2N}$.

Тогда в силу неравенств (29) и (32), из (31) имеем

$$\left\|z_\alpha^\delta-z_\alpha\right\|\le\frac{\frac{\delta}{\alpha}}{1-2N}+\frac{\alpha\|v_0\|}{1-2N}. \qquad (33)$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{1-2N}=c_1;\quad \|v_0\|\cdot c_1=c_2. \qquad (34)$$

После введенных обозначений неравенство (33) запишется в виде:

$$\left\|z_\alpha^\delta-z_0\right\|\le c_1\cdot\frac{\delta}{\alpha}+c_2\cdot\alpha. \qquad (35)$$

Правая часть неравенства (35) является функцией от параметра $\alpha$, т.е.

$$\psi(\alpha)=c_1\cdot\frac{\delta}{\alpha}+c_2\cdot\alpha. \qquad (36)$$

Найдем минимум этой функции

$$\psi'(\alpha)=-c_1\cdot\frac{\delta}{\alpha^2}+c_2=0.$$

Отсюда находим зависимость параметра регуляризации от погрешности $\delta$, т.е.

$$\alpha(\delta)=\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\cdot\sqrt{\delta}. \qquad (37)$$

Найденное значение $\alpha$ подставим в правую часть (36), имеем $\psi\left(\alpha\left(\delta\right)\right) = 2\sqrt{c_1 \cdot c_2} \cdot \sqrt{\delta}$. (38)

Тогда неравенство (35) имеет вид

$$\left\| z^{\delta}_{\alpha(\delta)} - z_0 \right\| \le 2\sqrt{c_1 \cdot c_2} \cdot \sqrt{\delta}. \qquad (39)$$

Отсюда следует, что при $\delta \to 0$ $z^{\delta}_{\alpha(\delta)} \to z_0$ по норме пространства H, и $z^{\delta}_{\alpha(\delta)}$ является приближенным устойчивым решением уравнения (1).

Таким образом, доказана:

**Теорема 3**. Пусть:

1) выполнены все условия теоремы 2;
2) правая часть $u$ удовлетворяет неравенству (5);
3) зависимость параметра регуляризации $\alpha$ от погрешности правой части $\delta$ определяется по закону (37).

Тогда решение уравнения (11) при $u = u_{\delta}$ сходится к точному решению $z_0$ уравнения (1) при $\delta \to 0$. Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (39).

## Литература


1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. - Новосибирск, 1962.
2. Саадабаев А. Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений 1-го рода.- Бишкек, 1997.
3. Усенов И.А Построение регуляризирующих операторов для решения нелинейных операторных уравнений / диссер. кандид. наук. Бишкек-1999.