УДК 517.968

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ЯДРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

ТАГАЕВА С.Б.
КГТУ им. И. Раззакова
izvestiya@ktu.aknet.kg

В работе [1] исследованы вопросы существования многопараметрического решения для линейного интегрального уравнения Вольтера третьего рода. В работах [2], [3] исследованы вопросы существования и единственности решения линейного и нелинейного уравнений Вольтера третьего рода в пространстве суммируемых функций. В работах [4], [5] исследованы вопросы существования и единственности решения линейного и нелинейного уравнений Вольтера третьего рода в пространстве непрерывных функций. В данной работе исследования проведены для линейного интегрального уравнения Вольтера третьего рода с недифференцируемым ядром в пространстве суммируемых функций.

Рассмотрим уравнение $$a(t)u(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,s)u(s)ds=f(t)\,,\ t\in[t_0,T],T>t_0\,, \tag{1}$$

где $K(t,s), f(t), a(t)$ - заданные функции, $a(t_0)=0$, $a(t)$ - возрастающая непрерывная функция на $[t_0,T]$.

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать уравнение

$$[\varepsilon+a(t)]v(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}K(t,s)v(s,\varepsilon)ds=f(t)\,,\ t\in[t_0,T], \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ - малый параметр.

Предположим выполнения следующих условий:

а) при любом фиксированном $t\in[t_0,T]$ $K(t,s)\in L^{q_1}(t_0,t)$, $q_1\geq 1$, функция $K(t,t)\in L^1(t_0,T)$, $K(t,t)\geq 0$, $t\in[t_0,T]$;

б) при $\tau>\eta$ для любых $(\tau,s),(\eta,s)\in G=\{(t,s):t_0\leq s<t<T\}$ справедлива оценка:

$|K(\tau,s)-K(\eta,s)|\leq l(s)\int_{\eta}^{\tau}K(s,s)ds,$ где $l(s)\geq 0$ при $t\in[t_0,T]$ и $l(t)\in L^{q_1}(t_0,T)$, $q_1\geq 1$;

в) $[K(t,t)/a(t)]\in L^1(t_0,T)$ и существует $q>1$, такое, что

$$b(t)=\left\{K(t,t)\cdot\left[\int_{t_0}^{t}[l^q(s)a^{q/p}(s)ds/K^{q/p}(s,s)]\right]^{p/q}/a(t)\right\}\in L^1(t_0,T),(1/p)+(1/q)=1.$$

Обозначим через $L^p_{p,\lambda}(t_0,T), p>1$, линейное пространство всех измеримых функций $u(t)$, определенных на $[t_0,T]$, удовлетворяющих условию:

$$\|u(t)\|^p_{p,\lambda}=\int_{t_0}^{T}|u(t)|^p\lambda(t)dt<\infty\text{, где }\lambda(t)=K(t,t)/a(t).$$

ЛЕММА 1. Пусть $f_\varepsilon(x)=e^{-\frac{x}{\varepsilon+x}}$, где $0<\varepsilon$, $x\in[0;+\infty)$. Тогда имеет место

$$ef_\varepsilon(x)\geq 1,\ x\in[0;+\infty),\ 0<\varepsilon \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $x\geq 0,\ f_\varepsilon(x)>0$

$$[f_\varepsilon(x)]'_x=-\frac{(\varepsilon+x)-x}{\varepsilon+x}e^{-\frac{x}{\varepsilon+x}}=-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+x}f_\varepsilon(x)<0,\ \varepsilon>0,\ x\geq 0.$$

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Отсюда, для фиксированного $\varepsilon > 0$, функция $f_\varepsilon(x)$ - строго убывающая на $[0;+\infty)$ по x.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_\varepsilon(x) = e^{-1}$, $e^{-1} \le f_\varepsilon(x)$. Отсюда следует, $ef_\varepsilon(x) \ge 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $a(t)$ - неубывающая неотрицательная функция на $t \in [t_0, T]$, $u(t) \in L^p_\lambda(t_0,T), p \in [1,\infty)$, $[K(t,t)/a(t)] \in L^1(t_0,T)$ и

$$f_1(t,\varepsilon) = -\varepsilon u(t)/[\varepsilon + a(t)] +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left(\varepsilon K(s,s)\exp\left(-\int_s^t \{K(\tau,\tau)d\tau/[\varepsilon + a(\tau)]\}\right)u(s)ds/\{[\varepsilon + a(t)][\varepsilon + a(s)]\}\right) \qquad (4).$$

Тогда

$$\|f_1(t,\varepsilon)\|^p_{p,\lambda} \le \nu_{p,\lambda,u}\left[\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right] + \varepsilon^{p(1-\beta)}\cdot\|u(t)\|^p_{p,\lambda} + (2/q)^{p/q}\|u(t)\|^p_{p,\lambda}\cdot\left\{\omega_\lambda\left[\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right] + \varepsilon^{p(1-\beta)}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\|\lambda(t)\|_{L^1(t_0,T)}\right\}, \qquad (5)$$

где $\nu_{p,\lambda,u}\left[\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right] = \int\limits_{t_0}^{\phi(\varepsilon^\beta)} \frac{|u(t)|^p K(t,t)}{a(t)}dt$, $\omega_\lambda\left[\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right] = \int\limits_{t_0}^{\phi(\varepsilon^\beta)} \frac{K(t,t)}{a(t)}dt$, $\phi(x)$- обратная функция к $a(t)$ на $[t_0,T]$, β - произвольное число из интервала $(0,1)$, $1/p + 1/q = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим первое слагаемое (4):

$$\left\|\frac{\varepsilon u(t)}{\varepsilon + a(t)}\right\|^p_{p,\lambda} = \int_{t_0}^{T}\left|\frac{\varepsilon u(t)}{\varepsilon + a(t)}\right|^p\cdot\frac{K(t,t)}{a(t)}dt = \int_{t_0}^{T}\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon + a(t)}\right|^p |u(t)|^p\cdot\frac{K(t,t)}{a(t)}dt \le \int_{t_0}^{\phi(\varepsilon^\beta)} |u(t)|^p\cdot\frac{K(t,t)}{a(t)}dt +$$
$$+\int_{\phi(\varepsilon^\beta)}^{T}\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon + a(t)}\right|^p |u(t)|^p\cdot\frac{K(t,t)}{a(t)}dt \le \int_{t_0}^{\phi(\varepsilon^\beta)} |u(t)|^p\cdot\frac{K(t,t)}{a(t)}dt + \int_{\phi(\varepsilon^\beta)}^{T}\left|\frac{\varepsilon}{a(\phi(\varepsilon^\beta))}\right|^p |u(t)|^p\cdot\frac{K(t,t)}{a(t)}dt \le$$
$$\le \nu_{p,\lambda,u}\left[\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right] + \varepsilon^{p(1-\beta)}\cdot\|u(t)\|^p_{p,\lambda}. \qquad (6)$$

Оценим второе слагаемое (4):

$$\left\|\int_{t_0}^{t}\frac{\varepsilon K(s,s)}{\varepsilon + a(t)}\exp\left(-\int_s^t\{K(\tau,\tau)d\tau/[\varepsilon + a(\tau)]\}\right)\frac{u(s)ds}{\varepsilon + a(s)}\right\|^p_{p,\lambda} =$$
$$= \int_{t_0}^{T}\left|\int_{t_0}^{t}\frac{\varepsilon K(s,s)}{\varepsilon + a(t)}\exp\left(-\int_s^t\{K(\tau,\tau)d\tau/[\varepsilon + a(\tau)]\}\right)\frac{u(s)ds}{\varepsilon + a(s)}\right|^p\frac{K(t,t)}{a(t)}dt =$$
$$= \int_{t_0}^{T}\frac{\varepsilon^p}{[\varepsilon + a(t)]^p}\left|\int_{t_0}^{t}K^{1/q}(s,s)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_s^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon + a(\tau)}d\tau\right)u(s)K^{1/p}(s,s)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_s^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon + a(\tau)}d\tau\right)/\right.$$
$$\left./\left\{[\varepsilon + a(s)]^{1/q}[\varepsilon + a(s)]^{1/p}\right\}\right|^p\frac{K(t,t)}{a(t)}dt \le$$
$$\le \int_{t_0}^{T}\frac{\varepsilon^p}{[\varepsilon + a(t)]^p}\left\{\int_{t_0}^{t}K(s,s)\exp\left(-\frac{q}{2}\int_s^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon + a(\tau)}d\tau\right)ds\right\}^{p/q}\cdot\left\{\int_{t_0}^{t}exp\left(-\frac{p}{2}\int_s^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon + a(\tau)}d\tau\right)|u(s)|^p K(s,s)ds/\right.$$
$$\left./[\varepsilon + a(s)]\right\}\frac{K(t,t)}{a(t)}dt \le \|u(t)\|^p_{p,\lambda}\cdot\left(\frac{2}{q}\right)^{p/q}\cdot\left\{\int_{t_0}^{\phi(\varepsilon^\beta)}\frac{K(t,t)}{a(t)}dt +\right.$$
$$\left.+\varepsilon^{p(1-\beta)}\int_{\phi(\varepsilon^\beta)}^{T}\frac{K(t,t)}{a(t)}dt\right\} \le \|u(t)\|^p_{p,\lambda}\cdot\left(\frac{2}{q}\right)^{p/q}\left\{\omega_\lambda\left[\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right] + \varepsilon^{p(1-\beta)}\cdot\|\lambda(t)\|_{L^1(t_0,T)}\right\}. \qquad (7)$$

Учитывая (6),(7) из (4) получаем оценку (5). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть выполняются условия а), б) и

$$H(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{K(t,\tau)-K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(t)}+\int_{\tau}^{t}\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}\cdot\exp\left(-\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\cdot\frac{K(s,\tau)-K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(t)}ds, \qquad (8)$$

тогда справедлива оценка: $\left|H(t,\tau,\varepsilon)\right|\le\left(e^{-1}+1\right)l(\tau)$ (9)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что

$$H(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon+a(t)}[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\exp\left(-\int_{\tau}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)-\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\int_{\tau}^{t}\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}\times$$
$$\times\exp\left(-\int_{\tau}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)[K(t,\tau)-K(s,\tau)]ds. \qquad (10)$$

Оценим (10):

$$\left|H(t,\tau,\varepsilon)\right|\le\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\left|K(t,\tau)-K(\tau,\tau)\right|\exp\left(-\int_{\tau}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)+\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\int_{\tau}^{t}\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}\times$$
$$\times\exp\left(-\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\left|K(t,\tau)-K(s,\tau)\right|ds\le l(\tau)\int_{\tau}^{t}\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}ds\cdot\exp\left(-\int_{\tau}^{t}\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}ds\right)+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\int_{\tau}^{t}\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}\exp\left(-\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\left(l(\tau)\int_{s}^{t}K(\tau,\tau)d\tau\right)ds\le l(\tau)\times$$
$$\times\left[\int_{\tau}^{t}\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}ds\exp\left(-\int_{\tau}^{t}\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}ds\right)\right]+l(\tau)\int_{\tau}^{t}\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}\exp\left(-\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\left(-\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)ds\le$$
$$\le l(\tau)\cdot\left[\sup_{\nu\ge0}\left(\nu e^{-\nu}\right)+\int_{0}^{\int_{\tau}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau}e^{-\nu_1}\nu d\nu\right]\le\left(e^{-1}+1\right)l(\tau).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются условия а) и б). Тогда, если $K(t,t)>0$ при почти всех $t\in\left[t_0,T\right]$, уравнение (1) имеет решение $u(t)\in L^{p}_{p,\lambda}\left(t_0,T\right)$, то решение $v(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon\to0$ сходится по норме $L^{p}_{p,\lambda}\left(t_0,T\right)$ к $u(t)$.

При этом справедлива оценка: $\left\|v(t,\varepsilon)-u(t)\right\|^{p}_{p,\lambda}\le M\times$

$$\times\left\{\nu_{p,\lambda,u}\left[\phi\left(\varepsilon^{\beta}\right)\right]+\varepsilon^{p(1-\beta)}\left\|u(t)\right\|^{p}_{p,\lambda}+\left(\frac{2}{q}\right)^{p/q}\left\|u(t)\right\|^{p}_{p,\lambda}\left[\omega_{\lambda}\left(\phi\left(\varepsilon^{\beta}\right)\right)+\varepsilon^{p(1-\beta)}\left\|\lambda(t)\right\|_{L^{1}(t_0,T)}\right]\right\}, \qquad (11)$$

где β - произвольное число из $(0,1)$, $\nu_{p,\lambda,u}\left[\phi\left(\varepsilon^{\beta}\right)\right]=\int_{t_0}^{\phi\left(\varepsilon^{\beta}\right)}\left|u(t)\right|^{p}\frac{K(t,t)}{a(t)}dt,\omega_{\lambda}\left(\phi\left(\varepsilon^{\beta}\right)\right)=\int_{t_0}^{\phi\left(\varepsilon^{\beta}\right)}\frac{K(t,t)}{a(t)}dt,$

$\phi(x)-$ обратная функция к $a(t)$ на $\left[t_0,T\right]$, $M=2^{p-1}\exp\left(2^{p-1}\left(e^{-1}+1\right)^{p}\int_{t_0}^{T}b(\tau)d\tau\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. в [2].

Замечание:

1) Если $a(t)-$ возрастающая функция, то

$$b(\tau)\le\left(\int_{t_0}^{\tau}\frac{l^q(s)a^{\frac{q}{p}}(s)}{K^{\frac{q}{p}}(s,s)}ds\right)^{\frac{p}{q}}\frac{K(\tau,\tau)}{a(\tau)}\le\left(\int_{t_0}^{\tau}\frac{l^q(s)}{K^{\frac{q}{p}}(s,s)}ds\right)^{\frac{p}{q}}K(\tau,\tau).$$

2) Если $a(t)-$ возрастающая функция, $K(t,t)$ - невозрастающая функция, то

$$b(\tau)\le\left(\int_{t_0}^{\tau}l^q(s)ds\right)^{\frac{p}{q}}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Если выполняются условия а) и б) и $a(t)$- строго возрастающая функция при $t\in[t_0,T]$, то решение уравнения (1) в пространстве $L_\lambda^p(t_0,T)$ единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. в [2].

Литература

1. Магницкий К.А. Линейные интегральные уравнения Вольтера I и III рода// Журнал вычислительной математики и математической физики, 1979 . т.19, № 4.- с. 970-989.
2. Асанов А., Тагаева С.Б. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра III рода в пространстве суммируемых функций // Материалы Международного научно- технического симпозиума «Образование через науку».- Бишкек: КНТУ им. И. Раззакова, 2004.Т.1.С.488-493.
3. Тагаева С.Б. Регуляризация и единственность решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра III рода в пространстве суммируемых функций // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям.- Бишкек: Илим, 2007.Вып.36.С.85-90.
4. Янно Я. Регуляризация одного уравнения Вольтера I рода, равносильного уравнению III рода //Ученные Записки Тартуского Государственного Уиверситета, 1987 вып.762, с.16-30.
5. Асанов А., Ободоева Г.С. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра III рода//Исследования по интегро- дифференциальным уравнениям.- Бишкек: Илим, 1984г. вып.25, с 65-74

Click here to buy
ABBYY PDF Transformer 2.0
www.ABBYY.com