УДК 517.948

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СУЛАЙМАНОВ Б. Э., ТОЛОГОНОВ К.Т., ТОКТОГУЛОВА А.Ш.
КГТУ им. И. Раззакова
izvestiya@ktu.aknet.kg

В данной работе рассматривается обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Установлено условие разрешимости обратной задачи. Доказана теорема существования и единственности обратных задач для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В работе [1] методом дополнительного аргумента исследована прямая задача для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема, а в [2-3] тем же методом исследованs обратные задачи для дифференциальных уравнений. В данной работе изучаются вопрос существования и единственности решения обратной задачи (1)-(3) для интегро-дифференциальных уравнений. Показано эквивалентность обратной задачи (1)-(3) к системе интегральных уравнений.

Рассмотрим обратную задачу:

$$u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,u(t,x))d\xi = f(t,x), x\in R, t\in[0,T], \qquad (1)$$

$$u(0,x)=\varphi(x), \qquad x\in R, \qquad (2) \qquad\qquad u(t,x_0)=g(t), \qquad 0\le t\le T, \qquad (3)$$

где $a(t,u)$, $f(t,x)$, $\varphi(x)$, $g(t)$ - известные, а $u(t,x)$, $K(t)$ - неизвестные функции. Выполняется условие согласования $g(0)=\varphi(x_0)$. (4)

Предположим выполнение следующих условий:

1) $g(t)\in C^2[0,T]$, $\varphi(x)\in \overline{C}^3(R)$, $a(t,u)\in C^{0.3}(Q_T)$, $f(t,x)\in \overline{C}^{0,3}(G)$,

причём существуют такие конечные числа L, M, A, F, что

$$\max\left\{\sup_{0\le t\le T}|g(t)|,\ \sup_{0\le t\le T}|g'(t)|,\ \sup_{0\le t\le T}|g''(t)|\right\}=M, \quad \max\left\{\sup_{x\in R}|\varphi(t)|,\ \sup_{x\in R}|\varphi'(t)|,\ \sup_{x\in R}|\varphi''(t)|\right\}=L,$$

$$\max\left\{\sup_{Q_T}|a(t,u)|,\ \sup_{Q_T}|a_u(t,u)|,\ \sup_{Q_T}|a_{uu}(t,u)|\right\}=A,$$

$$\max\left\{\sup_{G}|f(t,x)|,\ \sup_{G}|f_x(t,x)|,\ \sup_{G}|f_{xx}(t,x)|\right\}=F,$$

2) функции $\varphi''(x)$, $f_{xx}(t,x)$, удовлетворяют условию Липшица по переменным x с теми же соответственно константами L, F, а функция $a_{uu}(t,u)$ удовлетворяет условию Липшица по u с константой A, где $Q_T=\{(t, u): 0\le t\le T, -N\le u\le N\}$, N - конечная постоянная которая определяется ниже,

3) $a(t,g(t))\ge\alpha>0$ при всех $t\in[0,T]$.

В (1) заменяя t на ρ, x на $p(\rho,t,x)$, где $p(\rho,t,x)=x-\int_\rho^t u(\tau,p(\tau,t,x))d\tau$, $p(t,t,x)=x$,

$p_\rho(\rho,t,x)=u(\rho,p(\rho,t,x))$, и интегрируя по ρ от 0 до s, получим:

$$u(s,p(s,t,x))=\varphi(x-\int_0^t u(\tau,p(\tau,t,x))d\tau)-\int_0^s f(\rho,x-\int_\rho^t u(\tau,p(\tau,t,x))d\tau)d\rho-$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a(\xi,u(\rho,p(\rho,t,x)))d\xi d\rho. \qquad (5)$$

В уравнении (5), полагая $u(s,p(s,t,x))\equiv w(s,t,x)$, получим:

$$w(s,t,x)=\varphi(x-\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau)+\int_0^s f(\rho,x-\int_\rho^t w(\tau,x,t)d\tau)d\rho-$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a(\xi,w(\rho,t,x))d\xi d\rho. \qquad (6)$$

В уравнении (6), полагая $s=t$, получим:

$$u(t,x)=\varphi(x-\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau)+\int_0^s f(\rho,x-\int_\rho^t w(\tau,t,x)d\tau)d\rho-$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a(\xi,w(\rho,t,x))d\xi d\rho. \qquad (7)$$

В уравнении (7), полагая $x=x_0$ и, взяв производную по t, имеем:

$$g'(t)=-\varphi'(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g(t)+\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau]+f(t,x_0)- \qquad (8)$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_x(\xi,w(\rho,t,x_0))w_t(\rho,t,x_0)d\xi d\rho-\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi-$$

$$-\int_0^t f_x(\rho,x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g(t)+\int_\rho^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau]d\rho.$$

В (6), полагая $x=x_0$,берем производную по t, затем, полагая $s=t$, имеем:

$$w_t(t,t,x_0)=-\varphi'(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g(t)+\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau]+f(t,x_0)- \qquad (9)$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_x(\xi,w(\rho,t,x_0))w_t(\rho,t,x_0)d\xi d\rho-\int_0^t f_x(\rho,x_0-$$

$$-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g(t)+\int_\rho^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau]d\rho.$$

Из уравнений (8), (.9) следует:

$$w_t(t,t,x_0)=g'(t)-f(t,x_0)+\int_0^t K(\xi)a_x(\xi,g(t))d\xi. \qquad (10)$$

В уравнении (8), взяв производную по t, имеем:

$$g''(t)=-\varphi''(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g^2(t)+2g(t)\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau]+\left\{\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau\right\}^2-$$

$$-\varphi'(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[2g'(t)+f(t,x_0)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi-\int_0^t w_{tt}(\tau,t,x_0)d\tau]+$$

$$+f_t(t,x_0)-\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))w(\tau,t,x_0)d\xi-\int_0^t\int_\rho^t K(\xi)a_{uu}(\xi,w(\rho,t,x_0))w_t^2(\rho,t,x_0)d\xi d\rho-$$

$$-\int_0^t\int_0^\rho K(\xi)a_u(\xi,w(\rho,t,x_0))w_{tt}(\rho,t,x_0)d\xi d\rho-\int_0^t K(\xi)a_u(\xi,g(t))g'(t)d\xi-K(t)a(t,g(t))+$$

$$+\int_0^t f_{xx}(\rho,x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g^2(t)+2g(t)\int_\rho^t w_t(\tau,t,x)d\tau+\{\int_\rho^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau\}^2]d\rho-$$

$$-\int_0^t f_x(\rho,x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[2g'(t)+f(t,x_0)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi+$$

$$+\int_{\rho}^{t} w_{tt}(\tau,t,x_0)d\tau]d\rho - f_x(t,x_0)g(t). \qquad (11)$$

Уравнение (11) разрешая относительно $K(t)$, имеем:

$$\begin{aligned}
K(t) = {} & \frac{1}{a(t,g(t))}\Bigg\{\varphi''(x_0 - \int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\Bigg[g^2(t) + 2g(t)\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau + \\
& + \left\{\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau\right\}^2\Bigg] - \varphi'(x_0 - \int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[2g'(t) - f(t,x_0) + \qquad (12)\\
& + \int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi + \int_0^t w_{tt}(\tau,t,x_0)d\tau\Bigg] + f_t(t,x_0) + g''(t) - \\
& - \int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))w_t(t,t,x_0)d\xi - \int_0^t\int_0^{\rho} K(\xi)a_{uu}(\xi,w(\rho,t,x_0))w_t^2(\rho,t,x_0)d\xi d\rho - \\
& - \int_0^t f_x(\rho,x_0 - \int_{\rho}^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[2g'(t) - f(t,x_0) + \int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi + \\
& + \int_0^t w_{tt}(\tau,t,x_0)d\tau\Bigg]d\rho - f_x(t,x_0)g(t) - g'(t) - \int_0^t K(\xi)a_u(\xi,g(t))g'(t)d\xi + \\
& + \int_0^t f_{xx}(\rho,x_0 - \int_{\rho}^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\Bigg[g^2(t) + 2g(t)\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau + \\
& + \left\{\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau\right\}^2\Bigg]d\rho + f_t(t,x_0) - \int_0^t\int_0^{\rho} K(\xi)a_u(\xi,w(\rho,t,x_0))w_{tt}(\rho,t,x_0)d\xi d\rho\Bigg\}.
\end{aligned}$$

В уравнении (6), полагая $x=x_0$, имеем:

$$w(s,t,x_0) = \varphi(x_0 - \int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau) + \int_0^s f(\rho,x_0 - \int_{\rho}^t w(\tau,t,x_0)d\tau)d\rho - - \int_0^s\int_0^{\rho} K(\xi)a(\xi,w(\rho,t,x_0))d\xi d\rho.$$

(13)

В уравнении (13), берем дважды производную по t, и имеем:

$$\begin{aligned}
w_t(s,t,x_0) = {} & -\varphi'(x_0 - \int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g(t) + \int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau] - \qquad (14)\\
& - \int_0^s\int_0^{\rho} K(\xi)a_x(\xi,w(\rho,t,x_0))w_t(\rho,t,x_0)d\xi d\rho - \\
& - \int_0^t f_x(\rho,x_0 - \int_{\rho}^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g(t) + \int_{\rho}^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau]d\rho,
\end{aligned}$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$w_{tt}(s,t,x)=\varphi''(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\left[g^2(t)+2g(t)\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau+\left\{\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau\right\}^2\right]-$$

$$-\varphi'(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\left[2g'(t)-f(t,x_0)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi+\int_0^t w_{tt}(\tau,t,x_0)d\tau]\right]+$$

$$+\int_0^t f_{xx}(\rho,x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\left[g^2(t)+2g(t)\int_\rho^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau+\{\int_\rho^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau\}^2\right]d\rho-$$

$$-\int_0^t f_x(\rho,x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\left[2g'(t)-f(t,x_0)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi+\int_0^t w_{tt}(\tau,t,x_0)d\tau]\right]-$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_{uu}(\xi,w(\rho,t,x_0))w_t^2(\rho,t,x)d\xi d\rho-$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_u(\xi,w(\rho,t,x_0))w_{tt}(\rho,t,x)d\xi d\rho. \qquad (15)$$

Система уравнений (6), (7), (9), (12), (13), (14), (15), определяет замкнутую систему для нахождения неизвестных функций $w(s,t,x)$, $u(t,x)$, $w_t(t,t,x_0)$, $K(t)$, $w(s,t,x_0)$, $w_t(s,t,x_0)$, $w_{tt}(s,t,x_0)$.

Теорема. Если выполняются условия 1), 2), 3), (4), то найдется T>0 такое, что обратная задача, (1) - (3) имеет единственное решение $\{u(t,x), K(t)\}$ из класса $\overline{C}^{\,1,1}([0,T]\times R)\times C\,[0,T]$.

Доказательство теоремы следует из следующих трёх лемм.

Лемма 1. Существует и явно определяется из исходных данных величина T>0 такая, что при выполнении условий 1), 2), 3), (4), система нелинейных интегральных уравнений (6), (7), (9), (12), (13), (14), (15) имеет единственное ограниченное решение.

Доказательство леммы производиться методом последовательных приближений.

В уравнениях (6), (7), взяв производные по t, x, получим:

$$w_t(s,t,x)=\varphi'(x-\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau)\left[w(t,t,x)+\int_0^t w_t(\tau,t,x)d\tau\right]-\int_0^s f_x(\rho,x-\int_\rho^t w(\tau,t,x)d\tau\times$$

$$\times\left[w(t,t,x)+\int_\rho^t w_t(\tau,t,x)d\tau\right]d\rho-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_u(\xi,w(\rho,t,x))w_t(\rho,t,x)d\xi d\rho, \qquad (19)$$

$$w_x(s,t,x)=\varphi'(x-\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau)\left[1-\int_0^t w_x(\tau,t,x)d\tau\right]+\int_0^s f_x(\rho,x- \qquad (20)$$

$$-\int_\rho^t w(\tau,t,x)d\tau\left[1-\int_\rho^t w_x(\tau,t,x)d\tau\right]d\rho-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_{xx}(\xi,w(\rho,t,x))w_x(\rho,t,x)d\xi d\rho.$$

$$u_t(t,x)=-\varphi'(x-\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau)\left[u(t,x)+\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau\right]-$$

$$\qquad (21)$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_u(\xi,w(\rho,t,x))w_t(\rho,t,x)d\xi d\rho-$$

$$-\int_0^t K(\xi)a(\xi,u(t,x))d\xi+f(t,x)-\int_0^t f_x(\rho,x-\int_\rho^t w(\tau,t,x)d\tau)\left[u(t,x)+\int_0^t w_t(\tau,t,x)d\tau\right]d\rho,$$

$$u_x(t,x)=\varphi'(x-\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau)\left[1-\int_0^t w_x(\tau,t,x)d\tau\right]-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_u(\xi,w(\rho,t,x))w_x(\rho,t,x)d\xi d\rho+$$

$$+\int_0^t f_x\left(\rho, x-\int_\rho^t w(\tau,t,x)d\tau\right)\left[1-\int_\rho^t w_x(\tau,t,x)d\tau\right]d\rho, \qquad (22)$$

причем $|K(t)|\leq 2S$, $|w(s,t,x)|\leq 2S$, $|u(t,x)|\leq N\leq 2S$, $N=L+FT+2AST^2$.

Систему нелинейных интегральных уравнений (19), (20), (21), (22), запишем в следующем виде:

$$W(s,t,x)=DW(s,t,x), \qquad (23)$$

где $W(s,t,x)=colon\{w_t(s,t,x),\ w_x(s,t,x),\ u_t(t,x),\ u_x(t,x)\}$, $D=colon\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$. Оператор D действует по правилу $DW(s,t,x)=colon\{D_1\ W(s,t,x),\ D_2\ W(s,t,x),\ D_3W(s,t,x),\ D_4\ W(s,t,x)\}$. Операторы D_i - соответственно определяются в виде уравнений (19), (20), (21), (22).

Введем пространство $Y=\overline{C}(Q)\times\overline{C}(Q)\times\overline{C}(G)\times\overline{C}(G)$.

Для любого элемента $W(s,t,x)\in Y$ вводим норму:

$$\|W(s,t,x)\|_Y = Sup_Q|w_t(s,t,x)| + Sup_Q|w_x(s,t,x)| + Sup_G|u_t(t,x)| + Sup_G|u_x(t,x)|.$$

Лемма 2. Существует и явно определяется из исходных данных величина T>0 такая, что при выполнении условий 1), 2), 3), (4), система нелинейных интегральных уравнений (19), (20), (21), (22) имеет единственное ограниченное решение.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 3. Если вектор-функция $V(s,t,x)$ - решение системы (6), (7), (9), (12), (13), (14), (15), то функции $u(t,x)$, $K(t)$ удовлетворяют задаче (1) - (3), и наоборот.

Лемма доказывается методом последовательных приближений.

Литература

1. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории системы нелинейных интегро- дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // ДАН.-1992. №6. С. 1111-1115.
2. Асанов А., Сулайманов Б. Э. Нелинейная обратная задача для дифференциальных уравнений типа Уизема// Вестник КГНУ, 2001.Вып.5.С. 102-106.
3. Асанов А., Сулайманов Б. Э. Обратная задача для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка// Труды международной конференции «Современной технологии и управление качеством в образовании, науке и производстве: опыт адаптации и внедрения». Вестник КТУ им. И. Раззакова,– Б.,2001. №5. С. 221-225.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com