УДК: 517.95

Алымбаев А. Т., докт. физ.-мат. наук, профессор
asangul 1952@gmail.com, КГУ им. И. Арабаева,
Бапа кызы Айнура, ст. преподаватель
abapakyzy@gmail.com, ИГУ им. К. Тыныстанова,
Кыргызстан

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Проекционные методы, их разнообразные виды, в частности метод Галеркина, являются одним из эффективных методов решения краевых задач различных классов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Метод Галеркина позволяет не только находить периодическое решение дифференциальных уравнений в виде разложения тригонометрического ряда Фурье, но и позволяет установить существование таких решений. В статье рассматривается задача определения условия, при выполнении которого, в окрестности приближений Галеркина существует точное периодическое решение квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка. Получена оценка точности между точным и приближенным решениями. Задача решена методом функции Грина.

Ключевые слова: *метод функции Грина, приближенное и точное периодические решения, оценка точности, дифференциальные уравнения второго порядка.*

Алымбаев А. Т., физ.-мат. илимд. докт., профессор
asangul 1952@gmail.com, И. Арабаев ат. КМУ
Бапа кызы Айнура, ага окутуучу
abapakyzy@gmail.com, К. Тыныстанов ат. ЫМУ,
Кыргызстан

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ КВАЗИСЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН МЕЗГИЛДИК ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Проекциялык методдор жана анын ар кандай түрлөрү, анын ичинде Галеркиндин ыкмасы, дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн чектик маселелердин чыгарылышын изидөөнүн натыйжалуу ыкмаларынын бири болуп эсептелет. Галеркиндин ыкмасы дифференциалдык теңдеменин мезгилдик чыгарылышын тургузуу менен бирге, анын чыгарылышынын жашашын далилдөөгө мүмкүнчүлүк берет. Мезгилдик чыгарылыш Фурьенин катары түрүндө изилденет.

Макалада экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин Галеркин боюнча алынган мезгилдик жакындаштырылган чыгарылышынын бар болушунан анын так чыгарылышынын келип чыга турганынын шарттарын аныктоо маселеси каралат. Маселе Гриндин функциясын колдонуу методу менен чечилет. Так жана жакындаштырылган чыгарылыштардын ортосундагы айырманын чени аныкталат.

Өзөктүү сөздөр: *Гриндин функциясынын ыкмасы, так жана жакындаштырылган чыгарылыштар, тактыктын ченин өлчөө, экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме.*

Alymbaev A. T., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
State University named after I. Arabaeva, e-mail: asangul 1952@gmail.com
Bapa kyzy Ainura, Master of Physics and Mathematics Education, Senior Lecturer,
Issyk-Kul State University named after K. Tynystanov,
e-mail: abapakyzy@gmail.com,
Kyrgyzstan

PERIODIC SOLUTION OF A QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

Projection methods, of various types, in particular the Galerkin method, is one of the effective methods for solving boundary value problems of various classes of differential and integro-differential equations. The Galerkin method allows not only to find a periodic solution of differential equations in the form of an expansion of the trigonometric Fourier series, but also allows you to establish the existence of such solutions. The article considers the problem of determining the conditions under which, in the vicinity of the Galerkin approximations, there is an exact periodic solution of a second-order quasilinear differential equation. An estimate of the accuracy between the exact and approximate solutions is obtained. The problem is solved by the Green's function method.

Key words. *Green's function method, approximate and exact periodic solutions, accuracy estimate, second-order differential equations.*

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Ax + f(t,x)\,, \tag{1}$$

где A-вещественное, положительное число, $f(t,x) - 2\pi$ –периодическая функция.

Построим функцию Грина, для уравнения (1) такую, что решение уравнения (1) ограничено при всех $t \in (-\infty, +\infty)$. Находим частные решения уравнения $x^4(t) - Ax(t) = 0$.

Образуем характеристическое уравнение $\lambda^2 - A = 0$ и находим корни $\lambda_1 = \sqrt{A}$, $\lambda_2 = -\sqrt{A}$. Отсюда следует два частных решений $x_1(t) = e^{\sqrt{A}t}$ которая ограничена при $t \to -\infty$ и $x_2(t) = e^{-\sqrt{A}t}$ ограничена при $t \to \infty$.

Функцию Грина ищем в виде

$$G(t,s) = \begin{cases} \varphi(s)e^{\sqrt{A}t}, & -\infty < t \le s, \\ \psi(s)e^{-\sqrt{A}t}, & s \le t < +\infty. \end{cases} \tag{2}$$

Определяя функции $\varphi(s), \psi(s)$ из условий:

$$G(t,t+0) - G(t,t-0) = 0, \quad G'_t(t,t+0) - G'_t(t,t-0) = 1, \tag{3}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} \psi(t)e^{-\sqrt{A}t} - \varphi(t)e^{\sqrt{A}t} = 0, \\ -\sqrt{A}\psi(t)e^{-\sqrt{A}t} - \sqrt{A}\varphi(t)e^{\sqrt{A}t} = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$\psi(t) = -\frac{e^{\sqrt{A}t}}{2\sqrt{A}}, \quad \varphi(t) = -\frac{e^{-\sqrt{A}t}}{2\sqrt{A}}. \tag{4}$$

Поставляя (4) в (2), получим функцию Грина

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{A}}e^{\sqrt{A}(t-s)}, & -\infty < t \le s, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{A}}e^{\sqrt{A}(s-t)}, & s \le t < +\infty. \end{cases} \tag{5}$$

Покажем, что функция Грина удовлетворяет уравнению $G_{tt} - AG = 0$.

Вычислим

$$G_t(t,s)=\begin{cases}-\frac{1}{2}e^{\sqrt{A}(t-s)}, & -\infty<t\le s,\\ -\frac{1}{2}e^{\sqrt{A}(s-t)}, & s\le t<+\infty.\end{cases}$$

$$G_{tt}(t,s)=\begin{cases}-\frac{\sqrt{A}}{2}e^{\sqrt{A}(t-s)}, & -\infty<t\le s,\\ -\frac{\sqrt{A}}{2}e^{\sqrt{A}(s-t)}, & s\le t<+\infty.\end{cases}$$

Отсюда имеем

$$G_{tt}(s,t)-AG(t,s)=\begin{cases}-\frac{\sqrt{A}}{2}e^{\sqrt{A}(t-s)}+\frac{\sqrt{A}}{2}e^{\sqrt{A}(t-s)}=0, & -\infty<t\le s,\\ -\frac{\sqrt{A}}{2}e^{\sqrt{A}(s-t)}+\frac{\sqrt{A}}{2}e^{\sqrt{A}(s-t)}=0, & s\le t<+\infty.\end{cases}$$

Пусть функция $x=x^0(t)$ решение интегрального уравнения вида

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(t,s)f\big(s,x(s)\big)ds. \tag{6}$$

Покажем, что функция $x=x^0(t)$ является решением уравнения (1). Представим (6) в виде

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t-0}G(t,s)f\big(s,x(s)\big)ds-\int_{+\infty}^{t+0}G(t,s)f\big(s,x(s)\big)ds.$$

Отсюда, получим с учетом свойств функции Грина (3).

$$x'(t)=\big(G(t,t-0)-G(t,t+0)\big)f\big(t,x(t)\big)+\int_{-\infty}^{+\infty}G_t(t,s)f\big(s,x(s)\big)ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}G_t(t,s)f\big(s,x(s)\big)ds, \tag{7}$$

$$x''(t)=\big(G_t(t,t-0)-G_t(t,t+0)\big)f\big(t,x(t)\big)+\int_{-\infty}^{+\infty}G_{tt}(t,s)f\big(s,x(s)\big)ds=$$

$$=f\big(t,x(t)\big)+\int_{-\infty}^{+\infty}G_{tt}(t,s)f\big(s,x(s)\big)ds. \tag{8}$$

Поставляя (6)-(8) в уравнение (1), получим

$$f\big(t,x^0(t)\big)+\int_{-\infty}^{+\infty}G_{tt}(t,s)f\big(s,x^0(s)\big)ds-A\int_{-\infty}^{+\infty}G(t,s)f\big(s,x^0(s)\big)ds=f\big(t,x^0(t)\big),$$

$$f\big(t,x^0(t)\big)+\int_{-\infty}^{+\infty}[G_{tt}(t,s)-AG(t,s)]f\big(s,x^0(s)\big)ds=f\big(t,x^0(t)\big),$$

$f(t, x^0(t)) = f(t, x^0(t))$.

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 1. Пусть функция $x = x^0(t)$, является решением уравнения (1) и существует функция Грина вида (2) от ограниченных решений обладающей свойством (3). Тогда функция $x = x^0(t)$, также является решением интегрального уравнения вида (6).

Покажем, что уравнение (6) имеет периодическое решение. Для этого уравнению (6) методом последовательных приближений, приняв за начальное приближение $x_0(t)$ т.е приближение $x_m(t)$ Галеркина достаточно большем m.

$$x_{k+1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s, x_k(s)) ds, \qquad x_0(t) = \bar{x}_m(t). \quad k = 0,1,2, \dots \tag{9}$$

Из представления (5) следует оценка

$$\|G(t,s)\| \le M e^{-\lambda(t-s)}, \qquad t, s \in R, \ \ t \neq s, \tag{10}$$

где $\quad M = -\frac{1}{2\sqrt{A}}, \quad \lambda = \sqrt{A}$.

Оценим разность $x_1(t) - x_0(t)$, учитывая, что

$$x_0(t) = \bar{x}_m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) S_m f(s, \bar{x}_m(s)) ds. \tag{11}$$

Из соотношений (9),(11) получаем равенство

$$x_1(t) - x_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) [f(s, \bar{x}_m(s)) - S_m f(s, \bar{x}_m(s))] ds. \tag{12}$$

Так как, согласно равенству Парсеваля справедливо равенство

$$f(t, \bar{x}_m(t)) - S_m f(t, \bar{x}_m(t)) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{k^2} [\|A_k\|^2 + \|B_k\|^2], \tag{13}$$

где A_k, B_k-коэффициенты ряда Фурье разложения функции $f(t, \bar{x}_m(t))$.

Из (13), с учетом неравенства Буняковского-Шварца, получим оценку

$$\left| f(t, \bar{x}_m(t)) - S_m f(t, \bar{x}_m(t)) \right|_0 \le \sigma(m) |f|_0, \tag{14}$$

где $\sigma(m) = \left[\frac{2}{(m+1)^4} + \frac{2}{(m+2)^4} + \cdots\right]^{1/2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{(m+1)^2} < \sigma(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2}$

вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t-s)} ds = e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda s} ds + e^{\lambda t} \int_{t}^{+\infty} e^{-\lambda s} ds = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} + \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} = \frac{2}{\lambda} \ .$$

Из равенства (12) получим

$$| x_1(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \le \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t,s)\| \left| f(s, \bar{x}_m(s)) - S_m f(s, \bar{x}_m(s)) \right|_0 ds.$$

Отсюда, с учетом (14), получим оценку

$$|x_1(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \leq \sigma(m)|f|_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t,s)\| ds \leq \sigma(m)|f|_0 M \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t-s)} ds \leq$$

$$\leq \frac{2M}{\lambda}\sigma(m)|f|_0. \quad (15)$$

Оценим разность

$$x_{k+1}(t) - x_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)\left[f\left(s, x_k(s)\right) - f\left(s, x_{k-1}(s)\right)\right] ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f_x\left(s, x_k(s) + \theta\left(x_{k-1}(s) - x_k(s)\right)\right)\left(x_k(s) - x_{k-1}(s)\right) ds,$$

$0 \leq \theta \leq 1, \qquad k = 1,2,3,\dots$

отсюда получим

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)|_0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t,s)\| |f_x|_0 |x_k(s) - x_{k-1}(s)|_0 ds \leq$$

$$\leq \frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda}\sigma(m)|x_k(t) - x_{k-1}(t)|_0 \qquad \text{при } k = 1,2,3,\dots$$

Таким образом, получим оценку

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)|_0 \leq \frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda}|x_k(t) - x_{k-1}(t)|_0 \leq \left(\frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda}\right)^2 |x_k(t) - x_{k-2}(t)|_0 \leq \cdots$$

$$\leq \left(\frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda}\right)^{k-1} |x_2(t) - x_1(t)|_0 \leq \left(\frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda}\right)^{k} |x_1(t) - x_0(t)|_0 \leq$$

$$\leq \left(\frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda}\right)^{k} \frac{2M}{\lambda}\sigma(m)|f|_0.$$

Оценим разность $x_{n+k}(t) - x_k(t)$

$$|x_{n+k}(t) - x_k(t)|_0 \leq |x_{n+k+1}(t) - x_{n+k}(t)|_0 + |x_{n+k}(t) - x_{n+k-1}(t)|_0 + \cdots$$

$$\dots + |x_{k+2}(t) - x_{k+1}(t)|_0 + |x_{k+1}(t) - x_k(t)|_0 \leq [q^{n+k} + q^{n+k-1} + \cdots + q^k] \cdot$$

$$\cdot \frac{2M}{\lambda}\sigma(m) \cdot |f|_0, \qquad q = \frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda}.$$

Отсюда, имеем

$$|x_{n+k}(t) - x_k(t)|_0 \leq q^k(q^n + q^{n-1} + \cdots + 1)\frac{2M}{\lambda}\sigma(m) \cdot |f|_0.$$

Предположим, что $0 < q < 1$, тогда

$$|x_{n+k}(t) - x_k(t)|_0 \leq q^k(1 + q + q^2 + \cdots + q^k + \cdots)\frac{2M}{\lambda}\sigma(m) \cdot |f|_0 \leq$$

$$\leq \frac{2M \cdot \sigma(m) \cdot |f|_0 \cdot q^k}{\lambda(1-q)} \quad (16)$$

Переходя к пределу из (16) при $n \to \infty$, получим оценку точности вида $|\hat{x}(t) - x_k(t)|_0 \leq \frac{2q^2 M\sigma(m) \cdot |f|_0}{\lambda(1-q)}$ (17)

Положив $k = 0$ в (11), получим оценку между точным решением интегрального уравнения (6) и приближенным решением дифференциального уравнения найденного по методу Галеркина вида

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \leq \frac{2M\sigma(m) \cdot |f|_0}{\lambda(1-q)}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{(m+1)^2} < \sigma(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2}.$$

С учетом, что $\sigma(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2}$, получим оценку

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 < \frac{2\sqrt{2}M|f|_0}{\lambda(1-q)m^2}.$$

Отсюда, при $m \to \infty$, следует $\bar{x}_m(t) \to \hat{x}(t)$.

$$G(t+2\pi, s+2\pi) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{A}} e^{\sqrt{A}(t+2\pi-s-2\pi)}, \\ -\frac{1}{2\sqrt{A}} e^{\sqrt{A}(s+2\pi-t-2\pi)}. \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{A}} e^{\sqrt{A}(t-s)}, \\ -\frac{1}{2\sqrt{A}} e^{\sqrt{A}(s-t)}. \end{cases} = G(t,s).$$

Докажем, периодическое решение интегрального уравнения (6), с периодом 2π.

$$\hat{x}(t+2\pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t+2\pi, s) f(s, \hat{x}(s)) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t+2\pi, s+2\pi) f(s+2\pi, \hat{x}(s+2\pi)) ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s, \hat{x}(s+2\pi)) ds.$$

Отсюда, следует, что $\hat{x}(t+2\pi) = \hat{x}(t)$.

Теорема 2. Пусть выполняется условие теоремы 1. Тогда, если выполняется следующее условие $q = \frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda} < 1$, то существует 2π- периодическое решение $x = \hat{x}(t)$ интегрального уравнения (6), а вместе с ним и периодическое решение дифференциального уравнения (1).

Литература:

1. Урабе М. Метод Галеркина для нелинейных периодических систем. Механика. –М.,1966, 97, №3 -с.3-34.

2. Кондратьева А.А**.** Численно-аналитические методы локализации предельных циклов в математических моделях нелинейной динамики. Учебное пособие. - М.: Доброе слово, 2019 - с. 48.

3. Алымбаев А.Т., Нуржанов О.А. Численно-аналитический метод исследований автономных систем интегро-дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн., 1979, т.31, №5 -с. 540-547.

4. Алымбаев А.Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач. - Бишкек: Издат. КНУ, 2015 - с. 205.