УДК 539.31+531.6

ТЕОРИЯ УПРУГОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ ХАРАКТЕРИЗУЮЩАЯ РАССЕЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ

ОРМОНБЕКОВ Т.О.
Институт физико-технических проблем и материаловедения НАН КР
izvestiya@ktu.aknet.kg

Появление новых материалов открывает широкие перспективы в развитии различных областей техники. К таким материалам относятся волокнистые и армированные композиционные материалы, волокна которых покрыты пленками специального состава. Покрытия повышают прочность материала при высоких температурах и оказывает влияние на его физико-механические свойства.

Для использования прочности волокон в конструкциях их соединяют между собой в монолитный материал с помощью полимерного или другого совместимого с выбранными волокнами связующего. Предполагают при этом, что упрочнение материала объясняется тем, что основная механическая нагрузка при растяжении воспринимается ориентированным заполнителем, а роль связующего, или матрицы, сводится к распределению напряжений на волокна [1].

При низком уровне напряжения вязко-упругие свойства термореактивных полимеров, принимающихся в качестве связывающих в армированных пластиках, описываются теорией упругой наследственности с дробноэкспоненциальными ядрами. Для определения реологических параметров, входящих в интегральные операторы упругой наследственности и характеризующих рассеяние механической энергии при периодических напряжениях, воспользуемся экспериментальными данными, полученными при испытаниях макрообразцов на простую ползучесть или релаксацию и по резонансной петле гистерезиса или затуханию собственных колебаний образцов [2]. В последних двух случаях демпфирующие свойства материала описываются более точно, чем по данным квазистатических испытаний.

Предполагаем, что образец из вязко-упругого материала находится в условиях одноосного синусоидального изменяющегося во времени с угловой частотой ω растяжения-сжатия при действии напряжения $\sigma = Re\sigma^0 e^{i\varpi t}$.

После определенного времени, достаточного для того, чтобы можно было пренебречь влияниями начальных условий, изменение деформаций во времени будет $\varepsilon = \dfrac{1}{E^*} Re\sigma^0 e^{i\varpi t}$

(1),

где согласно принятому допущению нижний предел в операторном модуле следует положить равным - ∞.

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_0}\left[1+\theta_0\int_{-\infty}^{t} d\tau Э_{1-\lambda}\left(-\theta_\infty, t-\tau\right)\right],\ (2)\,\theta_0 = \frac{E_0}{\mu},\quad \theta_\infty = \frac{E_\infty}{\mu},\quad \frac{1}{E_{\partial\lambda}} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_\infty},$$

$$Э_{1-\lambda}\left(-\omega_0, t-\tau\right) = \left(t-\tau\right)^{\lambda-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\theta_0\right)^n\left(t-\tau\right)^{n\lambda}}{\Gamma\left[(n+1)\lambda\right]},$$

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty dx e^{-x}x^{\lambda-1},\quad E^* = E_0\left[1-\theta_0 Э^*_{1-\lambda}\left(-\theta_0-\theta_\infty\right)\right],\ Э^*_{1-\lambda}\left(-\theta_0\right)f(t) = \int_\partial^t f(\tau)Э_{1-\lambda}\left(-\theta_0, t-\tau\right)d\tau.$$

При подстановке оператора (2) в формулу (1) и использовании интегралов вида

$$\int_0^\infty d\tau\tau^{\lambda-1}e^{-i\varpi t} = \Gamma(\lambda)(i\varpi)^\lambda, \qquad (3)$$

а также $Э^*_{1-\lambda}\left(-\theta_\infty\right)e^{i\varpi t} = \dfrac{e^{i\varpi t}}{\theta_\infty + i\lambda\omega\lambda}$, деформации образца определяются соотношением вида $\varepsilon = Re\left(\Pi^{/} + i\Pi^{//}\right)\sigma = \sigma_0\sqrt{\left(\Pi^{/}\right)^2 + \left(\Pi^{//}\right)^2}cos(\varpi t-\varphi)$, где $\Pi^{/}$ - упругая податливость, $\Pi^{//}$ - податливость потерь.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Тангенс фазового угла (угла потерь) φ, характеризующего отставание фазы деформации от напряжения, устанавливается по формуле

$$tg = \frac{\Pi^{//}}{\Pi^{/}}. \qquad (4)$$

Для исследования полимеров на частотах, при которых наблюдается изменение динамических характеристик вследствие высокочастотного рассеяния, применяются интегро-дифференциальные операторы. Для дробноэкспоненциальных ядер указанный оператор имеет вид [3]

$$Э^{*}_{1-\lambda}\left[-\theta_{\infty}\left(1+\frac{D^{2}}{\varpi_{a}^{2}}\right)\right]f(t)==\int_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{\lambda-1}\frac{(t-\tau)^{k\lambda}\left[-\theta_{\infty}\left(1+D^{2}\big/\omega_{a}^{2}\right)\right]^{k}}{\Gamma[\lambda(k+1)]}f(\tau)d\tau, \qquad (5)$$

где $D^{2} = \dfrac{\partial 2}{\partial t^{2}}$.

Оператор действует по следующему правилу: вначале производится дифференцирование $f(t)$ по времени t, а затем интегрирование. Частота ω_a в формуле (5) определяет расположение резонансной частоты ϖ_k и находится по данным испытаний при колебаниях полимеров. Если значение параметра λ близко к единице, то указанные частоты совпадают $\varpi_a = \varpi_k$.

Операторный модуль Юнга и обратный ему оператор принимают вид

$$E^{*} = E_{0}\left\{1-\theta_{0}Э^{*}_{1-\lambda}\left[-\theta_{0}\theta_{\infty}\left(1+\frac{D^{2}}{\varpi_{a}^{2}}\right)\right]\right\}, \qquad (6)$$

$$\frac{1}{E^{*}} = \frac{1}{E_{0}}\left\{1+\theta_{0}Э^{*}_{1-\lambda}\left[-\theta_{\infty}\left(1+\frac{D^{2}}{\varpi_{a}^{2}}\right)\right]\right\}.$$

Частота ϖ_a связана с резонансной частотой ϖ_k приближенным соотношением

$$\varpi_{a} = \frac{\varpi_{k}}{\sqrt{1+\dfrac{\varpi_{k}^{\lambda}}{\varpi_{\infty}}cos\dfrac{\pi\lambda}{2}}}. \qquad (7)$$

Интегро-дифференциальные операторы позволяют естественным образом исследовать полимеры при периодически действующих напряжениях с учетом вязко-упругих свойств и резонансных явлений на определенных частотах в предельном случае $\varpi_a \to 0$ формулы (6) вырождаются в обычные операторы соотношения, описывающие вязко-упругие свойства сред как при статических нагрузках (ползучесть и релаксация), так и при колебаниях.

Принимая во внимание возможность представления любого пространственного напряженного состояния как суммы всестороннего сжатия и наложения напряжений сдвига и пренебрегая в первом приближении вязко-упругими деформациями при всестороннем сжатии получим следующие интегро-дифференциальные операторы ν^{*}; G^{*} и обратный последнего [3]

$$\nu^{*} = \nu_{0}\left\{1+\frac{1-2\nu_{0}}{2\nu_{0}}\theta_{0}Э^{*}_{1-\lambda}\left[(-\theta_{0}-\theta_{\infty})\left(1+\frac{D^{2}}{\omega_{a}^{2}}\right)\right]\right\}, \qquad (8)$$

$$G^{*} = G_{0}\left\{1-\frac{3\theta_{0}}{2+2\nu_{0}}Э^{*}_{1-\lambda}\left[\left(-\theta_{\infty}-\frac{3\theta_{0}}{2+2\nu_{0}}\right)\left(1+\frac{D^{2}}{\omega_{a}^{2}}\right)\right]\right\},$$

$$\frac{1}{G^{*}} = \frac{1}{G_{0}}\left\{1+\frac{3\theta_{0}}{2\nu_{0}}Э^{*}_{1-\lambda}\left[-\omega_{\infty}\left(1+\frac{D^{2}}{\omega_{a}^{2}}\right)\right]\right\}.$$

Формулы преобразования интегро-дифференциальных операторов устанавливаются по аналогии с соотношениями для обычных операторов.

Уравнения связи компонентов напряжения с деформациями для рассматриваемой среды согласуется по виду с уравнениями

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E^*}\left[\sigma_{11} - \nu^*\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right], \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G^*},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E^*}\left[\sigma_{22} - \nu^*\left(\sigma_{11} + \sigma_{33}\right)\right], \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G^*}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E^*}\left[\sigma_{33} - \nu^*\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right], \quad \varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{2G^*},$$

где только операторный модуль сдвига G^* следует заменить интегро-дифференциальным оператором по (8). Векторное уравнение равновесия

$$G_s \Delta \overline{U} + \left(\lambda_s + G_s\right) grad div \overline{U} + \overline{k} = 0 \quad (10)$$

в смещениях при замене вектора $\overline{k}$ объемной силой инерции $-\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ приводится к виду

$$G_s \Delta \overline{U} + \left(\lambda_s + G_s\right) grad div \overline{U} = \rho_s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (11)$$

где ρ_s - плотность среды.

В неограниченной среде периодические возмущения распространяются в виде продольных и поперечных волн. Волновые уравнения следуют из векторного уравнения (1) при подстановке

$$\overline{U} = grad\,\psi + rot\overline{\Phi} \quad (12)$$

откуда
$$\left(\lambda^* + 2G^*\right)\Delta\psi = \rho_s \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (13)$$
$$G^* \Delta \overline{\Phi} = \rho_s \frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial t^2}.$$

Решение уравнений (13) в случае распространения плоских синусоидальных волн в неограниченной среде ищется в виде

$$\psi = Re\,\psi_0 e^{i\left(\omega t - \overline{k}\overline{r}\right)}, \quad \overline{\Phi} = Re\,\Phi_0 e^{i\left(\omega t - \overline{k}\overline{r}\right)}, (14)$$

где $\overline{k} = \overline{a_1}k_1 + \overline{a_2}k_2 + \overline{a_3}k_3$ - волновой вектор, совпадающий с направлением распространения плоской волны, $\overline{r} = \overline{a_1}x_1 + \overline{a_2}x_2 + \overline{a_3}x_3$; $\overline{a_j}$ - единичные орты декартовой системы координат. Между волновым вектором $\overline{k}$ и частотой распространяющейся волны ω существует связь, вид которой устанавливается при подстановке решений (14) в соответствующие уравнения (13). Искомые соотношения для рассматриваемых решений (13) устанавливаются в виде.

$$\varpi^2 = \frac{\lambda(i\omega) + 2G(i\omega)}{\rho_s}\left|\overline{k}\right|^2 \quad и \quad \varpi^2 = \frac{G(i\omega)}{\rho_s}\left|\overline{k}\right|^2, \ (15)$$

где комплексные величины

$$G(i\omega) = G_0\left[1 - \frac{3\theta_0/(2\nu_0+2)}{i^\lambda\theta^\lambda\left(\theta_\infty + 3\theta_0/(2+2\nu_0)\left(1-\omega^2/\omega_a^2\right)\right)}\right], \quad (16)$$

$$\lambda(i\omega) = \lambda_0\left[1 + \frac{1-2\nu_0}{1+\nu_0}\frac{\theta_0/2\nu_0}{i^\lambda\omega^\lambda + 1 - 2\nu_0/2 + \nu_0\theta_0/2 + \left(\theta_0 + \theta_\infty\right)\left(1-\omega^2/\omega_a^2\right)}\right]$$

получены на основе формул (3).

Рассмотрим решение первого уравнения (13).

Групповая скорость распространения волн определяется вещественной частью, производной от частоты по волновому числу, поэтому согласно первому соотношению (15)

$$V_1 = Re\frac{\partial\omega}{\partial\left|\overline{k}\right|} = Re\sqrt{\frac{\lambda(i\omega) + 2G(i\omega)}{\rho_s}}, \ (17)$$

то есть в данном случае групповая скорость и скорость распространения волны совпадают.

Скорость распространения волны, как это видно из формулы (17), зависит от частоты, то есть имеет место дисперсия волн. В рассматриваемой среде наблюдается диссипация энергии, причем показатель затухания, определяемый как вещественный показатель степени в первом решении (14), соответственно первой формуле (15) равен мнимой части от $\left|\overline{k}\right|$:

$$\beta_1 = \omega \operatorname{Im} \sqrt{\frac{\rho_s}{\lambda(i\omega) + 2G(i\xi)}} \qquad (18)$$

Величина β_1 зависит от частоты. Смещения точек среды согласно (12) и (14) определяются формулой

$$\overline{U}_1 = Re\ \overline{k}\, i\, \psi\, e^{i\left(\omega t - \overline{k}\,\overline{r}\right)}, \qquad (19)$$

т.е. смещения точек при распространении продольных волн совпадают с направлением волнового вектора $\overline{k}$.

Групповая скорость распространения поперечных волн определяется соотношением

$$V_2 = Re\sqrt{\frac{G(i\omega)}{\rho_s}} \qquad (20)$$

и совпадает со скоростью распространения волн сдвига. Показатель затухания устанавливается зависимостью

$$\beta_2 = \omega \operatorname{Im} \sqrt{\frac{\rho_s}{G(i\omega)}} \qquad (21)$$

Смещения точек среды для рассматриваемых волн согласно формулам (12) и (14) перпендикулярны волновому вектору $\overline{k}$:

$$U_2 = Re\left(\overline{k}\, x\, \overline{\phi}_0\right) i e^{i\left(\omega t - \overline{k}\,\overline{r}\right)} \qquad (22)$$

В предельном случае $\omega \to \infty$ скорости распространения волн согласно формулам (16), (17) и (19) определяются мгновенноупругими характеристиками среды

$$V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G_0}{\rho_s}}, \quad V_2 = \sqrt{\frac{G_0}{\rho_s}}. \qquad (23)$$

Для эпоксидно-малеинового полимера значения скоростей в соответствии с опытными данными будут $V_1 \approx 1890 м/сек$; $V_2 \approx 845 м/сек$.

При конечных частотах скорости распространения волн уменьшаются, а при переходе через резонансную частоту ω_k следует ожидать локального изменения скорости, определяемой формулами (16). При периодических [4] напряжениях механическая энергия передается через волновой процесс, чтобы передать сигнал с помощью волны, ее нужно промодулировать, то есть изменить какой-нибудь ее параметр. Это выполнено для упруго-наследственного материала.

Литература

1. Тетерс Г.А. Пластинки и оболочки из полимерных и композиционных материалов (обзор). // Механика полимеров. 1977. №3. С. 486-493
2. Фитцджеральд Э. Механическая резонансная дисперсия кристаллических полимеров при звуковых частотах. – В кн.: Физика полимеров. ИЛ. - М., 1960.
3. Ван Фо Фы Г.А. Однородные и армированные пластинки при периодическом воздействии. – Прикладная механика, 1966, 2.8.
4. Ормонбеков Т.О. Дисперсионная среда и моделированные одномерные волны. – Бишкек: Илим, 1999

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com