

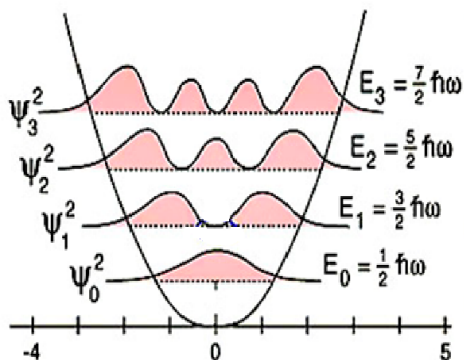
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина



В.М. Лелевкин

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЗИКИ

**Лекции и практические занятия.
Краткий курс**



Бишкек 2023

УДК 530.1
ББК 22.311
Л 43

Рецензенты:

А.Ж. Борубаев, д-р физ.-мат. наук, профессор, академик
Национальной академии наук Кыргызской Республики,
А.К. Керимбеков, д-р физ.-мат. наук, профессор
Кыргызско-Российского Славянского университета им. Б.Н. Ельцина

Рекомендовано к изданию
Научно-техническим советом КРСУ им. Б.Н. Ельцина

Лелевкин В.М.

Л 43 **ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЗИКИ.** Лекции
и практические занятия. Краткий курс. – Бишкек: Изд-во КРСУ,
2023. – 250 с. DOI: 10.36979/978-9967-19-916-3-2022
ISBN 978-9967-19-916-3

Предложен краткий курс лекций и практических занятий по дисциплине «Линейные и нелинейные уравнения физики» для студентов естественных и технических факультетов. Приведены примеры исследования различных физических явлений, основанные на решении дифференциальных уравнений. Дана классификация дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными от двух независимых переменных и методика приведения уравнений к каноническому виду. Большое внимание уделено постановке краевых задач для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов, методам решения данных уравнений и физической интерпретации полученных результатов. Приведена краткая информация о специальных функциях и их применении к решению физических задач. Достаточно подробно изложен универсальный метод решения дифференциальных уравнений – метод конечных разностей. В приложении показана возможность исследования с помощью дифференциальных уравнений движения электрона в электрическом поле атомного ядра.

Краткий курс «Линейные и нелинейные уравнения физики» может быть полезен в качестве учебного пособия студентам, аспирантам, научным работникам и инженерам, занимающимся вопросами математического моделирования и исследования физических явлений с помощью дифференциальных уравнений.

УДК 530.1
ББК 22.311

ISBN 978-9967-19-916-3

© ГОУВПО КРСУ, 2023
© Лелевкин В.М., 2023

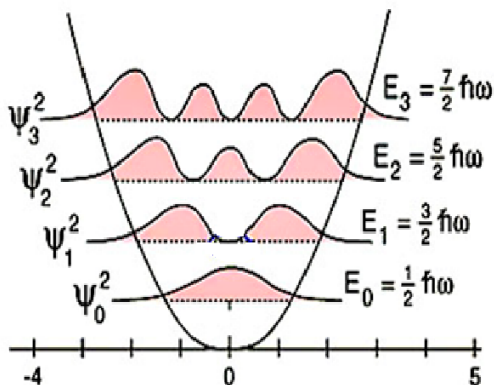
STATE EDUCATIONAL INSTITUTION
OF HIGHER PROFESSIONAL EDUCATION
KYRGYZ-RUSSIAN SLAVIC UNIVERSITY
named after the first President of the Russian Federation B.N. Yeltsin



V.M. Lelevkin

LINEAR AND NON-LINEAR EQUATIONS OF PHYSICS

**Lectures and practical classes.
A short course**



Bishkek 2023

UDC 530.1
LBC 22.311
L 43

Reviewers:

A.A. Borubaev, Doctor of Physical and Mathematical sciences, professor, academician of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic,
A.K. Kerimbekov, Doctor of Physical and Mathematical sciences, professor of Kyrgyz-Russian Slavic University named after B.N. Yeltsin

The monograph is recommended to publication by Scientific and Technical Council of KRSU named after B.N. Yeltsin

Lelevkin V.M.

L 43 LINEAR AND NON-LINEAR EQUATIONS OF PHYSICS. Lectures and practical classes. A short course. – Bishkek: Publishing house of KRSU, 2023. – 250 p. DOI: 10.36979/978-9967-19-916-3-2022

ISBN 978-9967-19-916-3

The book presents a short course of lectures and classes on the discipline “Linear and non-linear equations of Physics” for students of natural and technical faculties. It includes examples of various physical phenomena investigation based on differential equations solution. The course includes a classification of second-order partial differential equations from two independent variables and a methodology of their canonicalization. Much attention is paid to boundary value problems for hyperbolic, parabolic and elliptic types, to methodology of the given equations solution and a physical interpretation of the findings. The book gives brief information about special functions and their application to solving physical problems. It also describes the universal method of differential equations solving – method of finite difference. In the annex, one can see a possibility of investigating electron motion in the atomic nucleus electric field by means of differential equations.

A short course: “Linear and non-linear equations of Physics” can be of use as a training material for post-graduate students, researchers and engineers dealing with mathematical modelling and physical phenomena investigation by means of differential equations.

UDC 530.1
LBC 22.311

© GEIHVE KRSU 2023
© Lelevkin V.M., 2023

ISBN 978-9967-19-916-3

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 8 |
| I. КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ | 12 |
| Глава 1. Задачи, приводящиеся к линейным и нелинейным дифференциальным уравнениям физики | 12 |
| § 1.1. Классическая механика | 13 |
| § 1.2. Уравнения гидродинамики | 15 |
| § 1.3. Электродинамика..... | 16 |
| § 1.4. Атомная физика | 17 |
| Глава 2. Классификации дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными от двух независимых переменных | 19 |
| § 2.1. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными | 19 |
| § 2.2. Приведение дифференциального уравнения к новым независимым переменным..... | 21 |
| § 2.3. Определение канонических переменных и типа уравнения..... | 23 |
| § 2.4. Приведение дифференциальных уравнений второго порядка к каноническому виду..... | 24 |
| § 2.5. Упрощение линейных дифференциальных уравнений..... | 28 |
| Глава 3. Уравнения гиперболического типа | 31 |
| § 3.1. Уравнение колебания струны..... | 31 |
| § 3.2. Граничные и начальные условия..... | 36 |

| | |
|--|------------|
| § 3.3. Постановка краевых задач..... | 39 |
| § 3.4. Теорема существования и единственности | 42 |
| § 3.5. Метод распространяющихся волн Даламбера..... | 44 |
| § 3.6. Метод разделения переменных..... | 51 |
| § 3.7. Решение неоднородного дифференциального уравнения | 62 |
| Глава 4. Уравнения параболического типа..... | 66 |
| § 4.1. Уравнение теплопроводности | 66 |
| § 4.2. Постановка краевых условий..... | 72 |
| § 4.3. Постановка краевых задач..... | 74 |
| § 4.4. Метод разделения переменных..... | 76 |
| § 4.5. Общая первая краевая задача | 80 |
| § 4.6. Решение неоднородного уравнения теплопроводности | 82 |
| § 4.7. Задача на бесконечной прямой..... | 85 |
| § 4.8. Задача без начальных условий..... | 90 |
| Глава 5. Уравнения эллиптического типа..... | 96 |
| § 5.1. Задачи, приводящиеся к уравнению эллиптического типа | 97 |
| § 5.2. Постановка краевых задач..... | 98 |
| § 5.3. Фундаментальные решения уравнения Лапласа..... | 100 |
| § 5.4. Гармонические и аналитические функции | 102 |
| § 5.5. Решение краевой задачи для круга | 103 |
| § 5.6. Бигармоническое уравнение..... | 107 |
| Глава 6. Специальные функции..... | 111 |
| § 6.1. Интеграл ошибок | 111 |
| § 6.2. Распространение тепла в неограниченном пространстве..... | 114 |
| § 6.3. Колебания круглой мембраны | 116 |
| § 6.4. Цилиндрические функции Бесселя..... | 120 |

| | |
|--|-----|
| § 6.5. Специальные цилиндрические и сферические функции | 124 |
| § 6.6. Общее уравнение теории специальных функций | 127 |
| § 6.7. Дельта функция..... | 130 |
| Глава 7. Метод конечных разностей | 132 |
| § 7.1. Основные понятия..... | 132 |
| § 7.2. Разностная сетка | 135 |
| § 7.3. Аппроксимация дифференциальных операторов..... | 138 |
| § 7.4. Схемы аппроксимации | 141 |
| § 7.5. Постановка разностных краевых задач | 142 |
| § 7.6. Решение разностных краевых задач..... | 144 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ. Уравнение Шредингера | 151 |
| II. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ | 168 |
| 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (2 часа)..... | 170 |
| 2. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными. Приве- дение уравнений к каноническому виду (4 часа)..... | 184 |
| 3. Уравнения гиперболического типа (4 часа)..... | 190 |
| 4. Уравнения параболического типа (4 часа) | 207 |
| 5. Уравнения эллиптического типа (2 часа) | 225 |
| 6. Специальные функции (2 часа)..... | 230 |
| III. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ .. | 235 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 238 |
| ЛИТЕРАТУРА | 241 |
| CONTENTS | 243 |
| OPINION | 246 |
| LITERATURE (TRANSLITERATION) | 248 |

Лекция 1

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование физических явлений, наряду с экспериментальными исследованиями, является мощным инструментом изучения окружающего Мира. С помощью теоретических моделей можно, например, проникнуть в глубины микромира и структуру элементарных частиц, объяснить строение галактик, черных дыр, установить новые закономерности протекающих процессов и рекомендовать их применение для определенных практических целей.

Линейные и нелинейные уравнения физики тесно связаны с различными теоретическими моделями, постулатами и гипотезами, которые применяются для описания многих явлений, наблюдаемых в нашей жизни. В процессе развития науки и трудами многих ученых установлено, что физические явления можно представить в виде определенных математических формул, а их изменения в пространстве и во времени хорошо моделируются с помощью дифференциальных или интегральных уравнений. Этот подход широко используется в различных разделах теоретической физики, таких как классическая механика, теория относительности, гидродинамика, газодинамика, электродинамика, квантовая механика и атомная физика.

Дисциплина «**Линейные и нелинейные уравнения физики**» относится к математическим наукам, так как критериями истины и правильности выводов в ней служат математические теории, доказательства, леммы и теоремы.

Однако сама дисциплина «Линейные и нелинейные уравнения физики» основана на изучении реальных физических явлений и все результаты, представленные в виде уравнений, формул, графиков, таблиц, имеют определенную научную и практическую направленность. В данном случае физика и математика взаимно дополняют друг друга, например, из множества решений дифференциальных уравнений нужно выбрать только те, которые имеют реальный физический смысл. Данная методика широко применяется при анализе различных явлений, создания новых теорий, технологий и широко используется на практике. Математическое моделирование открывает большие теоретические возможности в изучении и познании различных форм движения материи в окружающем нас Мире.

Краткий курс лекций и практических занятий «Линейные и нелинейные уравнения физики», разработан для студентов 3-го курса (5-й семестр) естественных и технических специальностей. Краткий курс содержит **36 часов** лекций, **18 часов** практических занятий и **18 часов** отводится на самостоятельную работу (реферат, контрольные работы, домашнее задание). Отчетность проводится в виде экзамена или дифференцированного зачета.

По пятилетней программе подготовки специалистов в университетах данный курс назывался «Уравнения математической физики» и на его изучение отводилось 108 часов. При переходе на трехуровневую систему образования (бакалавр, магистр, аспирантура) практически в два раза уменьшилось число часов на лекционные и практические занятия. Поэтому возникла необходимость разработать цикл лекций и практических занятий, который и был включен в Краткий курс «Линейные и нелинейные уравнения физики». При подготовке данного пособия сделан упор на анализ реальных физических явлений, возможность

их моделирования с помощью дифференциальных уравнений и изложения тех основных разделов математической физики, которые чаще всего будут применяться студентами в их дальнейшей работе. Большое внимание уделено постановке краевых задач, методам решения дифференциальных уравнений и физической интерпретации полученных результатов. При изложении Краткого курса широко использовался теоретический материал из классических учебников и монографий [1–11].

Примечание. Иллюстрации, которые заимствованы из интернета и классических учебников, используются для того, чтобы наглядно показать студентам математические возможности исследования определенных физических явлений.

Цель данной дисциплины: освоить методику исследования явлений в окружающем нас Мире с помощью линейных и нелинейных дифференциальных уравнений математической физики.

В процессе обучения студентам необходимо научиться теоретически моделировать различные физические явления, делать математическую постановку задачи, уметь находить решение, анализировать полученные результаты и применять их на практике. Для этого студентам и молодым ученым нужно знать:

- 1) основы фундаментальной математики: векторная алгебра и аналитическая геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения, теория функции комплексного переменного;
- 2) классическую физику: механика, молекулярная физика, гидродинамика, электродинамика, атомная и ядерная физика, квантовая механика и теория относительности. Поскольку в дисциплине «Линейные и нелинейные

уравнения физики» постановка задачи является физической по существу, а методы исследования математические, то студенты в процессе обучения должны научиться:

1. Наблюдать, анализировать и выделять главное в протекающих физических явлениях.
2. Уметь математически моделировать данные физические явления:
 - 2.1. Выбрать соответствующую систему координат.
 - 2.2. Сделать необходимые предположения и упрощения.
 - 2.3. Использовать для описания физических явлений дифференциальные или интегральные уравнения, основанные на фундаментальных законах сохранения энергии, движения, массы и заряда.
 - 2.4. Определять, вычислять и задавать необходимые коэффициенты или функции в уравнениях.
 - 2.5. Делать постановку краевых (начальных и граничных) условий.
3. Выбирать соответствующий аналитический или численный метод решения уравнения.
4. Проводить тестирование задачи.
 - 4.1. Сравнить полученные результаты с экспериментом, а при численном решении уравнений – с результатами существующих упрощенных или аналитических методов решения.
 - 4.2. Определить область применения данной математической модели.
5. Исследовать полученное решение данного физического явления, а результаты использовать в виде публикаций, патентов и докладов.

І. КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

Глава 1. Задачи, приводящиеся к линейным и нелинейным уравнениям физики

Рассматриваются некоторые физические явления на основе решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений первого или второго порядков

Изучение физических явлений и представление их в виде определенных математических формул, в большинстве случаев основано на решении дифференциальных линейных или нелинейных уравнений физики. Данная методика широко применяется в таких фундаментальных областях науки, как классическая механика, гидродинамика, механика сплошной среды, электродинамика, квантовая механика, теория относительности и релятивистская механика.

В качестве примера рассмотрим некоторые задачи, которые применяются для изучения физических явлений на основе решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Примечание. Начало теоретической физики и математического подхода к изучению физических явлений было положено гениальным английским ученым Исааком Ньютоном – физиком, математиком, механиком и астрономом, автором фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором изложены основы дифференциального и интегрального исчисления, основные законы механики и закон всемирного тяготения.

§ 1.1. Классическая механика

В классической механике для описания движения материальных тел вводится Декартова система координат (Рене Декарт – французский философ, математик, физик, создатель аналитической геометрии). С помощью **уравнений движения** устанавливаются функциональные связи между положением материального тела в пространстве и временем $A(r, t)$. Уравнения движения определяются, например, с помощью радиуса вектора $r(t)$, проведённого из начала координат в данную точку (рисунок 1.1) или через его проекции, относительно прямоугольных осей координат $x(t), y(t), z(t)$ [6, 7]:

$$r = r(t) = ix(t) + jy(t) + kz(t), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

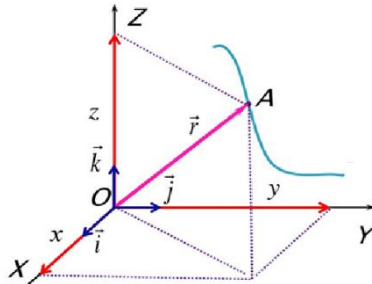


Рисунок 1.1 – Уравнения движения радиуса вектора $r(t)$ и траектория материального тела $A(r, t)$ в прямоугольной системе координат

Изменение положения материального тела в пространстве характеризуется **вектором скорости**, который определяется как первая производная от уравнения движения по времени:

$$V = i V_x + j V_y + k V_z, \quad V = \frac{dr}{dt}, \quad V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt},$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

Изменение скорости материального тела характеризуется **вектором ускорения**, как первая производная по времени от вектора скорости или вторая производная от уравнения движения:

$$W = iW_x + jW_y + kW_z, \quad W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2},$$

$$W = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}, \quad W_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad W_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$W_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Основу классической механики составляет второй закон, установленный Ньютоном на основе экспериментальных исследований движения материального тела массой m под действием сил F . С помощью дифференциального уравнения (второй закон Ньютона) определяется связь между силой, действующей на материальное тело, его ускорением и скоростью [6, 7]:

$$mW = F; \quad m \frac{dV}{dt} = F; \quad m \frac{d^2r}{dt^2} = F. \quad (1.1)$$

В классической механике полагается, что в трёхмерном пространстве Эвклида пространство и время независимы друг от друга, время абсолютно и течёт одинаково во всех инерциальных системах отсчёта. На рубеже XIX века было установлено, что уравнение (1.1) применимо в случаях, когда скорость движения материальных тел намного меньше скорости света, а размеры тел значительно превышают размеры атома. Обобщением данного уравнения на случай относительного движения материальных тел со скоростями, соизмеримыми со скоростью света, является **релятивистская механика**, основу которой составляет следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right) = F.$$

§ 1.2. Уравнения гидродинамики

Для описания течения идеальной жидкости Леонард Эйлер (швейцарский, немецкий, российский математик и механик) на основе фундаментальных законов сохранения массы и импульса, предложил нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка [8]:

$$\begin{aligned}\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) &= 0, \\ \rho\partial\mathbf{v}/\partial t + \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\nabla P + \mathbf{f}.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Для исследования течения жидкости французский физик Анри Навье и британский математик Джордж Стокс дополнили уравнение Эйлера силой вязких напряжений и получили нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка [8]:

$$\rho(\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}) = \nabla(\eta\nabla\mathbf{v}) - \nabla P + \mathbf{f}, \quad (1.3)$$

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где ∇ – дифференциальный оператор Набла; $\nabla\nabla = \nabla^2 = \Delta$ – оператор Лапласа. В случае отсутствия вязкости жидкости ($\eta = 0$), из уравнения Навье–Стокса (1.3) следует уравнение Эйлера (1.2).

В дальнейшем, уравнения гидродинамики (1.2)–(1.3) были обобщены и расширены для изучения физических явлений в газовой динамике, магнитной гидродинамике, магнитной газодинамике и физике плазмы.

§ 1.3. Электродинамика

Основу классической электродинамики заложил Джеймс Клерк Максвелл (британский и шотландский физик, математик и механик), который математически обобщил экспериментальные электромагнитные исследования ученых того времени и предсказал существование электромагнитных волн, сделал вывод об электромагнитной природе света и определил, что электромагнитные волны распространяются со скоростью света.

Уравнения Максвелла описывают взаимодействие электромагнитного поля с электрическими зарядами и токами [9, 10]:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = q, \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

и отражают следующие закономерности протекающих физических явлений:

- электрические заряды являются источниками электрического поля, силовые линии которого начинаются и кончаются на зарядах;
- источниками вихревого магнитного поля являются ток проводимости и токи смещения и поляризации, связанные с изменением индукции электрического поля;
- изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле (закон Фарадея);
- силовые линии магнитного поля замкнуты и это указывает на отсутствие магнитных зарядов.

Связь между индукцией и напряженностью электромагнитных полей устанавливается уравнениями электромагнитного состояния и законом Ома [9, 10]:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}_p, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}).$$

§ 1.4. Атомная физика

Закон радиоактивного распада открыт экспериментально английскими учеными Фредериком Содди и Эрнестом Резерфордом [11]. Закон отражает тот факт, что уменьшение количества атомов при радиоактивном распаде dN за интервал времени dt , пропорционально числу атомов N в образце, и постоянной радиоактивного распада λ :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \quad (1.5)$$

Решение дифференциального уравнения (1.5), выраженного через число атомов радиоактивного распада, можно представить через массу вещества $m(t) = Nm_a$ или его вес $P = mg$:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt, \quad \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\int_0^t \lambda dt, \quad \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t,$$

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad m(t) = m_0 e^{-\lambda t}, \quad P = P_0 e^{-\lambda t};$$

$$t = 0: N = N_0, \quad m = m_0,$$

$$P = P_0: t \rightarrow \infty: N \rightarrow 0, \quad m \rightarrow 0, \quad P \rightarrow 0,$$

где N_0, m_0, P_0 – начальное число атомов, массы и веса вещества; m_a – масса одного атома исследуемого радиоактивного вещества.

Из решения уравнения следует, что число радиоактивных атомов, его масса и вес уменьшаются со временем по экспоненциальному закону. При дифференцировании данного выражения, можно определить изменение скорости распада числа атомов от времени:

$$I(t) = -\frac{dN}{dt} = -\frac{d}{dt}(N_0 e^{-\lambda t}) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = I_0 e^{-\lambda t},$$

где $I_0 = \lambda N_0$ – скорость распада в начальный момент времени. Очевидно, что изменение числа радиоактивных атомов и скорость их распада определяются постоянной λ .

Период полураспада. На практике широко применяется временная характеристика закона радиоактивного распада, такая как **период полураспада** – время T , в течение которого число радиоактивных атомов уменьшается в два раза. Связь данной величины с постоянной радиоактивного распада определяется следующим образом:

$$\frac{N(T)}{N_0} = e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}, \quad 2 = e^{\lambda T}, \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

Начиная с момента большого взрыва, существующие в природе радионуклиды образовались в сложных цепочках распада урана или тория. Периоды полураспада радиоактивных химических элементов изменяются в широком интервале значений от $3 \cdot 10^{-7}$ секунды (^{212}Po , полоний), до $4,5 \cdot 10^9$ лет ($^{238}_{92}\text{U}$, уран) или $1,4 \cdot 10^{10}$ лет (^{232}Th , торий).

Примечание. Теория «Большого взрыва» (термин Фреда Хойла, 1949 г.) – космологическая модель, описывающая расширение Вселенной, которое произошло 13,8 млрд лет назад из некоторого начального состояния, возможно вещества при взаимодействии и взрыве Черных дыр.

Практическое занятие № 1

Лекции 2, 3

Глава 2. Классификации дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными от двух независимых переменных

Проводится классификация дифференциальных уравнений второго порядка от двух независимых переменных, преобразование, упрощение и приведение уравнений к каноническому виду

§ 2.1. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными

Изучение дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка начинается с элементарной математической азбуки, которая хорошо изложена в классическом учебнике [1]: определение дифференциальных уравнений, установление типа уравнения, преобразование уравнения с двумя независимыми переменными к каноническому виду и упрощение дифференциального уравнения.

Определения. Дифференциальным уравнением с частными производными 2-го порядка от двух независимых переменных x, y называется определенная функциональная зависимость между неизвестной функцией $u(x, y)$ и ее частными производными до 2-го порядка включительно. Данную функциональную зависимость в общем виде можно записать так:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

где используется следующее обозначение производных первого и второго порядков [1]:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Уравнение называется **линейным относительно старших производных**, если имеет следующий вид:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \quad (2.1)$$

Коэффициенты при старших производных a_{11} , a_{12} , a_{22} могут принимать постоянные значения или быть функциями от x и y . Цифра 2 при коэффициенте a_{12} записана для удобства решения при определении типа уравнения. Если коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} зависят не только от x и y , а являются, подобно функции F_1 , сложными функциями от x , y , u , u_x , u_y , то уравнение (2.1), в зависимости от вида коэффициентов, называется **квазилинейным** или **нелинейным**.

Уравнение называется **линейным**, если оно линейно как относительно старших производных u_{xx} , u_{xy} , u_{yy} , так и относительно функции $u(x, y)$ и ее первых производных u_x , u_y :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f, \quad (2.2)$$

где коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} , b_1 , b_2 , c могут принимать постоянные значения или быть функциями от аргументов x и y . Если данные коэффициенты не зависят от x, y , то уравнение (2.2) представляет собой **линейное уравнение с постоянными коэффициентами**.

Уравнение называется **однородным**, если правая часть уравнения (2.2) равна нулю:

$$f(x, y) = 0.$$

§ 2.2. Приведение дифференциального уравнения к новым независимым переменным

Рассмотрим методику приведения линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно старших производных (2.1) с двумя независимыми переменными x, y к переменным ξ, η . Новые переменные ξ, η являются функциями от x, y и наоборот:

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y), x = \varphi^*(\xi, \eta), y = \psi^*(\xi, \eta).$$

Преобразуем производные u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} от переменных x, y к переменным ξ, η , учитывая зависимость функции и её производных от x, y, ξ, η :

$$u = u(x, y), u_x = u_x(x, y, \xi, \eta), u_y = u_y(x, y, \xi, \eta),$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)}{\partial x} = \end{aligned}$$

$$= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}.$$

Аналогично делается переход к новым переменным для производных u_{xy}, u_{yy} (сделать вывод самостоятельно):

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.$$

Подставим данные значения производных в уравнение (2.1) и, после некоторых алгебраических преобразований, уравнение приводится к следующему виду:

$$a^*_{11}u_{\xi\xi} + 2a^*_{12}u_{\xi\eta} + a^*_{22}u_{\eta\eta} + F^*(u_{\xi}, u_{\eta}, u, \xi, \eta) = 0, \quad (2.3)$$

$$a^*_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2 a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$

$$a^*_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$a^*_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2 a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2.$$

В результате дифференциальное уравнение (2.3) в переменных ξ, η получается эквивалентным уравнению (2.1) в переменных x, y . Уравнение (2.2) также остается линейным, где функция $F^*(u_{\xi}, u_{\eta}, u, \xi, \eta)$ имеет следующее выражение:

$$F^* = b^*_1u_{\xi} + b^*_2u_{\eta} + c^*u + f^*(\xi, \eta).$$

Основная цель преобразования дифференциального уравнения к новым независимым переменным состоит в том, чтобы упростить его математическую структуру. Для этих целей вводятся канонические переменные.

Канонические переменные – это такие независимые переменные, которые упрощают математическую форму записи исходного дифференциального уравнения.

Примечание. Таким математическим приемом, в некоторых случаях, удается упростить и аналитически решить полученное дифференциальное уравнение в канонических переменных.

§ 2.3. Определение канонических переменных и типа уравнения

Рассмотрим для примера приведение линейного дифференциального уравнения 2-го порядка относительно старших производных (2.1) или линейного уравнения (2.2) от переменных x, y к каноническим переменным ξ, η . Канонические переменные ξ и η выбираются таким образом, чтобы в уравнении (2.3) коэффициенты при старших производных, например, при $u_{\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta}$, были равны нулю:

$$a^*_{11} = 0, \quad a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0, \quad (2.4)$$

$$a^*_{22} = 0, \quad a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 = 0.$$

Предположим, что $\xi = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения (2.4). Путем математических преобразований уравнение (2.4) приведем к следующему виду [1]:

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_x, \quad \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_y,$$

$$a_{11} \varphi_x^2 + 2a_{12} \varphi_x \varphi_y + a_{22} \varphi_y^2 = 0,$$

$$a_{11} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0,$$

$$a_{11} \left(-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\right) + a_{22} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y},$$

$$a_{11} \left(-\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0. \quad (2.5)$$

Задача о выборе новых независимых канонических переменных связана с решением алгебраического квадратного уравнения (2.5), которое состоит из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a_{12} + \sqrt{D}}{a_{11}} = F_1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-a_{12} - \sqrt{D}}{a_{11}} = F_2. \quad (2.6)$$

Дискриминант уравнения равен $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ и может принимать различные значения в зависимости от коэффициентов уравнения при старших производных: a_{12} , a_{11} , a_{22} .

Терминология определения типа дифференциального уравнения в частных производных заимствована, согласно [1], из теории кривых второго порядка:

1. Для уравнения **гиперболического типа** дискриминант $D > 0$ и тогда правые части уравнений (2.6) действительные и различные.

2. Для уравнений **параболического типа** дискриминант $D = 0$, уравнения (2.6) совпадают, и остается один общий интеграл решения.

3. Для уравнения **эллиптического типа** дискриминант $D < 0$, а правые части уравнений (2.6) – комплексные.

§ 2.4. Приведение дифференциальных уравнений второго порядка к каноническому виду

В результате решения обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6) получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int F_1 dx + C_1, \quad \varphi(x, y) = C_1; \\ y(x) &= \int F_2 dx + C_2, \quad \psi(x, y) = C_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Данные решения (2.7) относительно функции $y(x)$ являются общим интегралом обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6), так как удовлетворяют их для всех значений x в области определения решения. Поэтому уравнения (2.6) называются **характеристическими**, а его интегралы

$$y = y(x, C_1), y = y(x, C_2)$$

являются **характеристиками** данных уравнений.

Рассмотрим всю область решений, в которых дифференциальное уравнение (2.1) имеет один и тот же тип.

1. Уравнения гиперболического типа. В этом случае значение дискриминанта $D > 0$, правые части уравнений (2.6) действительные и различные. Общие интегралы решения данных уравнений

$$\varphi(x,y) = C_1 \text{ и } \psi(x,y) = C_2$$

определяют действительные семейства двух характеристик, которые проходят через каждую точку в данной области. Тогда канонические переменные будут определяться следующими выражениями:

$$\xi = \varphi(x,y) = C_1, \quad \eta = \psi(x,y) = C_2. \quad (2.8)$$

Данные канонические переменные обращают в ноль коэффициенты при старших производных ($a^{*11} = 0, a^{*22} = 0$), а уравнение (2.3) приводится к следующему виду:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad \Phi = -\frac{F^*}{2a_{12}}. \quad (2.9)$$

Полученное уравнение (2.9) называется **канонической формой** уравнения гиперболического типа.

При решении задач часто используется **вторая каноническая форма** уравнения гиперболического типа. Для этого вводятся новые канонические переменные α, β :

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta, \quad \alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}.$$

Тогда производные в уравнении (2.9) в новых канонических переменных запишутся так:

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \quad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

В результате преобразования уравнения (2.9), получается **вторая каноническая форма** уравнения гиперболического типа:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1, \quad \Phi_1 = 4\Phi. \quad (2.10)$$

2. Уравнения параболического типа. В этом случае дискриминант уравнений (2.7) $D = 0$ и решения характеристических уравнений совпадают. В результате получается один общий интеграл уравнений (2.6), который определяет одну каноническую переменную, например, ξ :

$$\varphi(x, y) = C_1 = C_2, \quad \xi = \varphi(x, y).$$

Тогда вторая каноническая переменная $\eta = \eta(x, y)$ – задается в виде любой функции, не зависимой и не кратной от $\varphi(x, y)$. При таком определении канонических переменных первый коэффициент при старшей производной в уравнении (2.3) будет равен нулю:

$$a_{11} = a_{11}\xi_x\xi_y + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0.$$

Так как $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$, то из данного условия следует, что коэффициент

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ &= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0. \end{aligned}$$

После деления уравнения (2.3) на значение коэффициента a_{22} при производной $u_{\eta\eta}$, получим каноническую форму **уравнения параболического типа**:

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad \left(\Phi = \frac{F}{a_{22}} \right). \quad (2.11)$$

Примечание. Отметим, что если в правую часть уравнения $\Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ не входит функция u_ξ , то уравнение (2.11) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно η , зависящему от канонической переменной ξ , как от параметра.

3. Уравнения эллиптического типа. В этом случае дискриминант уравнения (2.7) $D < 0$, а правые части уравнений содержат мнимую единицу:

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \varphi^*(x, y) = C_2,$$

где $\varphi^*(x, y)$ – комплексная функция самосопряженная к $\varphi(x, y)$, представляет собой общий интеграл дифференциального уравнения (2.7). Тогда канонические переменные являются комплексными функциями:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi^*(x, y). \quad (2.12)$$

Приведем уравнение (2.4) к каноническому виду путем введения новых канонических переменных α и β :

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}, \quad \xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta.$$

$$\begin{aligned} & a_{11}\xi^2_x + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi^2_y = \\ & = (a_{11}\alpha^2_x + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha^2_y) - (a_{11}\beta^2_x + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta^2_y) + \\ & \quad + 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0. \end{aligned}$$

Из данного выражения следует, что коэффициенты при старших производных будут равны:

$$a_{11} = a_{22} \quad \text{и} \quad a_{12} = 0.$$

Уравнение (2.3), после деления на коэффициент при старшей производной, принимает канонический вид **уравнения эллиптического типа**:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u_\alpha, u_\beta) \quad \left(\Phi = \frac{F}{a_{22}} \right). \quad (2.13)$$

Примечание. Для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами (2.3), решениями обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6) являются прямые линии:

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{D}}{a_{11}} x + C_1, \quad y = \frac{a_{12} - \sqrt{D}}{a_{11}} x + C_2,$$

С помощью преобразований, уравнение (2.3) приводится к одной из простейших канонической форме:

1. $u_{\xi\eta} + b_{11}u_{\xi} + b_{21}u_{\eta} + cu + f = 0$,
- $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_{11}u_{\xi} + b_{21}u_{\eta} + cu + f = 0$ ($D > 0$, гиперболический тип);
2. $u_{\xi\xi} + b_{11}u_{\xi} + b_{21}u_{\eta} + cu + f = 0$ ($D = 0$, параболический тип);
3. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_{11}u_{\xi} + b_{21}u_{\eta} + cu + f = 0$ ($D < 0$, эллиптический тип).

§ 2.5. Упрощение линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим методику упрощения линейных дифференциальных уравнений в канонических переменных (2.9)–(2.13). Для этого вместо функции $u(\xi, \eta)$ вводится следующая функция:

$$u(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \vartheta(\xi, \eta), \quad (2.14)$$

где новая неизвестная функция $\vartheta(\xi, \eta)$ и постоянные λ, μ подлежат определению. Определим производные первого и второго порядков от функции (2.14):

$$u_{\xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\vartheta_{\xi} + \lambda \vartheta), \quad u_{\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\vartheta_{\eta} + \mu \vartheta),$$

$$u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\vartheta_{\xi\xi} + 2\lambda \vartheta_{\xi} + \lambda^2 \vartheta),$$

$$u_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\vartheta_{\xi\eta} + \lambda \vartheta_{\eta} + \mu \vartheta_{\xi} + \lambda\mu \vartheta),$$

$$u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (\vartheta_{\eta\eta} + 2\mu \vartheta_{\eta} + \mu^2 \vartheta).$$

Подставляем полученные выражения производных в уравнение (2.3), сокращаем на $e^{\lambda\xi + \mu\eta}$ и в результате получим уравнение:

$$\begin{aligned} & \vartheta_{\xi\xi} + \vartheta_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda) \vartheta_{\xi} + (b_2 + 2\mu) \vartheta_{\eta} + \\ & + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c) \vartheta + f_1 = 0. \end{aligned}$$

Параметры λ и μ выбираются так, чтобы два коэффициента, например, при первых производных обратились в ноль. Это соответствует следующим значениям: $\lambda = -\frac{b_1}{2}$, $\mu = -\frac{b_2}{2}$. В результате данное уравнение приводится к более простому виду:

$$\begin{aligned} & \vartheta_{\xi\xi} + \vartheta_{\eta\eta} + \gamma \vartheta + f_1 = 0, \quad f_1 = \\ & = f e^{(b_1\xi + b_2\eta)/2}, \quad \gamma = \frac{c - b_1^2 - b_2^2}{4}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Примечание. В зависимости от вида уравнения можно обращать в ноль любой коэффициент при первой производной и функции $\vartheta(\xi, \eta)$.

Таким образом, линейные уравнения с постоянными коэффициентами гиперболического, параболического и эллиптического типов приводятся к следующим упрощенным каноническим формам записи:

$$\begin{cases} v_{\xi\eta} + \gamma v + f_1 = 0, \\ v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{гиперболический тип});$$

$$v_{\xi\xi} + b_2 \vartheta_{\eta} + f_1 = 0 \quad (\text{параболический тип});$$

$$\vartheta_{\xi\xi} + \vartheta_{\eta\eta} + \gamma \vartheta + f_1 = 0 \quad (\text{эллиптический тип}).$$

Примечание. Аналогично упрощается линейное дифференциальное уравнение (2.2) в переменных x, y путем введения вместо функции $u(x, y)$ новой неизвестной функции $\vartheta(x, y)$:

$$u(x, y) = e^{\lambda x + \mu y} \vartheta(x, y).$$

Практическое занятие № 2

Лекции 4–6

Глава 3. Уравнения гиперболического типа

Проводится вывод уравнения гиперболического типа, постановка краевых задач и методы решения на примере колебания струны под действием внешних сил и заданных краевых условий

Уравнения гиперболического типа описывают физические явления, связанные с колебательными процессами: колебания груза на пружине, струны, мембраны, звуковые колебания, колебания электрического тока и электромагнитных полей. Математическая форма записи уравнений гиперболического типа в одномерном случае имеет следующий вид:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f. \quad (3)$$

Вывод уравнения гиперболического типа основан на фундаментальном законе сохранения количества движения и волновых свойств материи.

§ 3.1. Уравнение колебания струны

3.1.1. Физика колебания струны. При отклонении натянутой струны от положения равновесия, необходимо приложить некоторое усилие для преодоления силы упругого натяжения струны, которая препятствует смещению струны и стремится вернуть её в исходное состояние. При снятии усилия струна начинает двигаться с ускорением обратно к положению равновесия, скорость струны

возрастает и в положении равновесия достигает максимального значения. Вследствие инерции струна продолжает двигаться далее от положения равновесия, постепенно замедляя движение вплоть до остановки, из-за действия силы упругости. Затем процесс движения струны повторяется в обратную сторону, и струна начинает совершать малые поперечные колебания. С течением времени, из-за действия силы сопротивления воздуха, амплитуда колебания уменьшается, и струна возвращается в равновесное состояние.

3.1.2. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны

1. *Постановка задачи:* для математического описания процесса колебания струны, определения частоты, энергии, тембра и других характеристик, рассмотрим струну длиной l с закрепленными концами (рисунок 3.1), которая совершает колебания $u(x, t)$ под действием краевых условий и заданных внешних сил $F(x, t)$.

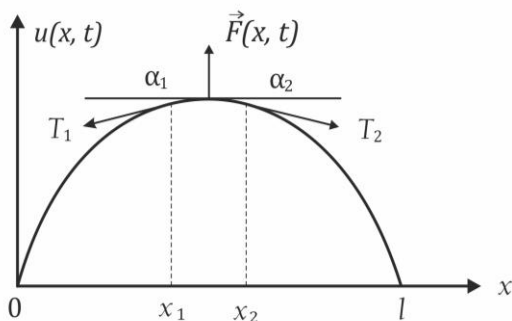


Рисунок 3.1 – Отклонение струны длиной l с закрепленными концами от положения равновесия под действием внешней силы $F(x, t)$: x_1, x_2 – произвольные точки струны; T_1, T_2 – натяжения струны, расположенные под углами α_1, α_2

В свободном состоянии струна неподвижна и расположена вдоль оси x . В любой момент времени t при вертикальных колебаниях струны в каждой точке x профиль её определяется функцией $u(x, t)$.

2. Для математического моделирования процесса колебания струны сделаем следующие предположения:

1) струна упругая, гибкая, и напряжения, возникающие в каждой точке струны, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю (рисунок 3.1);

2) величина силы натяжения T , возникающая вследствие упругости струны, пропорциональна смещению и определяется законом Гука;

3) площадь поперечного сечения по всей длине струны $A = \pi R^2$ постоянна, а для дальнейшего упрощения предполагается, что $A = 1$ [1];

4) линейная плотность струны $\rho(x)$ однородна вдоль оси x , элемент массы струны Δm на отрезке $[x_1, x_2]$ и полная масса струны M определяются выражениями:

$$\Delta m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) d\xi, \quad M = \int_0^l \rho(x) dx; \quad (3.1)$$

Примечание. При постоянной плотности струны вдоль оси x из (3.1) следует, что элемент и полная масса струны соответственно равны: $\Delta m = \rho(x_2 - x_1)$, $M = \rho l$.

5) при малых поперечных колебаниях струны пренебрегаются квадратом её отклонения от положения равновесия $(u_x)^2 \ll 1$ и, в пределах принятой точности, удлинение (растяжение) струны практически не происходит (длина дуги S струны приблизительно равна её длине):

$$S = \int_0^l \sqrt{1 + (u_x)^2} dx \cong l.$$

6) в случае малых поперечных колебаний, проекции сил натяжения на оси x и $u(x,t)$ соответственно будут равны:

$$T_x(x,t) = T(x,t) \cos\alpha = \frac{T(x,t)}{\sqrt{1+(u_x)^2}} \cong T(x,t),$$

$$T_u(x,t) = T(x,t) \sin\alpha \cong T(x,t)tg\alpha = T(x,t)\Delta u/\Delta x \cong T(x,t)u_x,$$

где α – угол касательной кривой $u(x,t)$ с осью x . Поскольку сумма проекций всех сил на ось x равна нулю:

$$T_x(x_2,t) - T_x(x_1,t) = 0, \quad T_x(x_2,t) = T_x(x_1,t),$$

то в силу произвольности x_1 и x_2 следует, что натяжение струны не зависит от x и меняется только с течением времени:

$$T(x,t) \equiv T_0(t) = const.$$

7) полагается непрерывность первых и вторых производных функции $u(x, t)$ в рассматриваемой области изменения аргументов x, t .

3. Для вывода уравнения малых поперечных колебаний струны под действием внешних сил, сил натяжения и инерции, воспользуемся вторым законом Ньютона, записанном в форме изменения момента количества движения:

$$m \frac{dv}{dt} = F, \quad \frac{dK}{dt} = F, \quad K = mv = mu_t, \quad K_1 - K_2 = \int_{t_1}^{t_2} F dt.$$

С учетом сделанных выше предположений видно, что изменение количества движения струны $K_1 - K_2$ на отрезках $[x_1, x_2]$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равно сумме импульсов сил натяжения $T_0 (u_x|_{x=x_2} - u_x|_{x=x_1})$ и заданных внешних сил $F(x,t)$, действующих на данном отрезке:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (3.2)$$

Полученное выражение (3.2) называется **интегральным уравнением** малых поперечных колебаний струны.

4. Для вывода *дифференциального уравнения* малых поперечных колебаний струны предполагается, что произвольный отрезок $\Delta x = x_2 - x_1$ и промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ достаточно малы $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$. Тогда интегральные выражения (3.2) будут практически постоянны, их можно вынести за знак интеграла и проинтегрировать:

$$\begin{aligned} & \rho(\xi)[u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \Delta x = \\ & = T_0[u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] \Delta t + F(\xi, \tau) \Delta x \Delta t. \end{aligned}$$

После двукратного применения теоремы о среднем, относительно аргументов x, t :

$$\begin{aligned} u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1) &= u_{tt}(\xi, t^*) \Delta t, \\ u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau) &= u_{xx}(\xi, \tau) \Delta x, \end{aligned}$$

данное выражение количества движения примет следующий вид:

$$u_{tt}(\xi^*, t^*) \rho(\xi^*) \Delta t \Delta x = \{T_0[u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] + F(\xi^{***}, t^{**})\} \Delta t \Delta x,$$

где произвольные промежуточные значения изменяются в следующих областях: $\xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \in (x_1, x_2), t^*, t^{**} \in (t_1, t_2)$. Сокращая на $\Delta x \Delta t$ и переходя к пределу при $x_2 \rightarrow x_1, t_2 \rightarrow t_1$, получаем **дифференциальное уравнение** малых поперечных колебаний струны:

$$\rho u_{tt} = T_0 u_{xx} + F(x, t).$$

Дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний струны приводится к более удобному для решения виду:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho(x)}, \quad (3.3)$$

где коэффициент a имеет размерность скорости; $f(x,t)$ – действующие (массовые) силы, отнесенные к единице плотности. При отсутствии внешних сил однородное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных описывает свободные собственные колебания струны:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad f(x,t) = 0. \quad (3.4)$$

Примечание. Уравнение колебания струны с учетом сил сопротивления, пропорциональных скорости движения (закон Стокса), запишется так:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \beta u_t, \quad (\beta > 0).$$

Общая математическая форма записи уравнения колебания струны с учетом нелинейных свойств коэффициентов и внешних действующих сил, имеет следующий вид:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x,t).$$

§ 3.2. Граничные и начальные условия

Для математического описания колебания струны под действием заданных сил необходимо сделать **постановку задачи**: определить коэффициенты уравнения, задать краевые условия. Это является необходимым и достаточным условием для однозначного определения процесса колебания струны.

Краевые условия. Для решения уравнения (3.3) задаются краевые условия, которые состоят из начальных и граничных условий:

1. Начальные условия. Процесс колебания струны зависит от заданий начального профиля – отклонения

струны от положения равновесия и начального распределения скорости струны, которые обозначаются функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$:

$$t = t_0: \begin{cases} u(x, t_0) = \varphi(x), \\ u_t(x, t_0) = \psi(x). \end{cases} \quad (3.5)$$

Для упрощения задания краевых условий начало отсчета времени чаще всего полагается равным нулю: $t_0 = 0$.

2. Граничные условия. Колебания струны зависят от задания граничных условий:

2.1. Граничное условие 1-го рода. Рассматриваются колебания струны с *закрепленными концами* при следующих граничных условиях:

$$x = 0: u(0, t) = 0, \quad x = l: u(l, t) = 0. \quad (3.6)$$

Если концы струны *движутся по заданному закону* $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, то граничные условия 1-го рода (3.6) имеют следующий вид:

$$x = 0: u(0, t) = \mu_1(t), \quad x = l: u(l, t) = \mu_2(t). \quad (3.7)$$

2.2. Граничные условия 2-го рода задаются, когда на концах струны действуют внешние силы: сила упругости пружины, сила инерции груза массой m , сила сопротивления движению.

Запишем смешанные граничные условия для струны, когда один конец при $x = 0$ закреплен, а на другом конце ($x = l$) находится пружина с коэффициентом жесткости k :

$$x = 0: u(0, t) = 0, \quad x = l: u_x(l, t) = T(t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Граничное условие на конце струны $x = l$ задается в виде функции, выраженной через силу натяжения $T(t)$. Если на конце струны $x = l$ сила натяжения отсутствует,

то математическая постановка граничного условия имеет вид:

$$x = l: u_x(l, t) = 0.$$

Если конец струны при $x = 0$ движется по определенному закону $\mu(t)$, а на другом конце $x = l$ задана сила $\bar{v}(t)$, то граничные условия запишутся так:

$$x = 0: u(0, t) = \mu(t), \quad x = l: u_x(l, t) = -\frac{1}{k}\bar{v}(t).$$

Типичным примером задания являются граничные условия упругого закрепления струны, например, на конце $x = l$:

$$x = l: u_x(l, t) = -hu(l, t).$$

Данный конец струны может перемещаться, но упругая сила стремится вернуть его в прежнее положение. Согласно закону Гука, данная сила пропорциональна смещению $u(l, t)$ с коэффициентом жесткости закрепления h .

2.3. Граничное условие 3-го рода. Если задано упругое закрепление на концах струны, которое смещается от начального положения в виде заданной функцией $\theta(t)$, то граничные условия 3-го рода принимают следующий вид:

$$x = 0: u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)],$$

$$x = l: u_x(l, t) = -h[u(l, t) - \theta(t)], \quad h = \frac{\alpha}{k} > 0.$$

Комбинируя перечисленные выше задания граничных условий, например, в виде (3.8), можно получить постановку шести типов простейших краевых задач. Если функции, задаваемые в правой части $\mu(t)$, $\nu(t)$, $\theta(t)$, равны нулю, то граничные условия называются *однородными* или *тривиальными*.

Более сложное граничное условие имеет место, например, при упругом закреплении, не подчиняющимся закону Гука, когда натяжение на конце струны является нелинейной функцией смещения $[u(l, t)]$:

$$x = l: u_x(l, t) = -\kappa[u(l, t)].$$

В задачах о *колебании кольца* в точках $x = 0$ и $x = l$ функция представляют одну и ту же физическую точку, тогда граничные условия сводятся к требованиям непрерывности данной функции и её производной:

$$u(l, t) = u(0, t), u_x(0, t) = u_x(l, t).$$

Производные по времени входят в граничные условия, если конец пружины испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости его движения с коэффициентом β :

$$x = l: ku_x(l, t) = -\beta u_t(l, t).$$

Если к концу струны прикреплен груз массой m , то в точке $x = l$ должно выполняться следующее граничное условие:

$$x = l: mu_{tt}(l, t) = ku_x(l, t).$$

§ 3.3. Постановка краевых задач

Исследование малых поперечных колебаний струны на основе решения уравнения гиперболического типа начинается с математической постановки краевых задач.

1. Первая краевая задача: найти функцию $u(x, t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области $[0 \leq x \leq l, t \geq 0]$, удовлетворяющую уравнению (3.3) и заданным краевым (начальным и граничным) условиям:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$x = 0: u(0, t) = \mu_1(t), \quad x = l: u(l, t) = \mu_2(t), \quad t > 0,$$

$$t = 0: \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad 0 < x < l.$$

Коэффициент, входящий в уравнение a и силы, действующие на струну $f(x, t)$, должны быть заданы.

2. Постановка второй и третьей краевых задач делается аналогично, если на концах струны при $x = 0$ и $x = l$ задаются граничные условия второго или третьего рода. Если на концах струны задаются различные граничные условия, например, первого, второго или третьего рода, то такие краевые задачи называют **смешанными**.

3. Задача для бесконечной прямой (задача Коши). Когда струна достаточно протяженная (неограниченная область изменения аргумента x), то граничные условия не оказывают влияние на процесс колебания струны. В этом случае предполагаются очевидные (виртуальные) граничные условия:

$$x \rightarrow \pm \infty : u(x, t) \rightarrow 0.$$

Тогда процесс колебания струны определяется заданием только начальных условий.

Постановка задачи: найти функцию $u(x, t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области, из решения уравнения (3.3), удовлетворяющего следующим начальными условиям:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$t = 0: \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad -\infty < x < \infty.$$

4. Задача для полуограниченной прямой. Если рассматриваются колебания струны вблизи одной границы, например, при $x = 0$, а влияние условия на второй границе несущественно, то в этом случае делается постановка краевой задачи для полуограниченной струны.

Постановка задачи: найти функцию $u(x,t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области, из решения уравнения (3.3), при следующих начальных и граничных условиях:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 \leq x < \infty, t > 0,$$

$$t = 0: \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad 0 \leq x < \infty,$$

$$x = 0: u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq 0.$$

5. Задача без начальных условий. Если влияние начальных условий не существенно, то характер колебания струны будет определяться только заданием граничных условий. Подобные задачи встречаются при воздействии на границах струны различных периодических сил в течение длительного времени.

Постановка задачи: найти функцию $u(x,t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области, из решения уравнения (3.3) при следующих граничных условиях:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 \leq x \leq l, t >> 0,$$

$$x = 0: u(0, t) = \mu_1(t), \quad x = l: u(l, t) = \mu_2(t).$$

§ 3.4. Теорема существования и единственности

Для того чтобы убедиться, что решение дифференциального уравнения с частными производными 2-го порядка гиперболического типа однозначно определяет исследуемый физический процесс, следуя учебнику [1], докажем теорему о существовании и единственности решения. Для доказательства воспользуемся уравнением колебания струны с учетом нелинейных свойств коэффициентов и полагаем, что:

1) заданные условия достаточны для выделения однозначного решения (доказательство – **теорема единственности**);

2) дополнительные условия не переопределяют задачу, и среди них нет несовместимых условий (доказательство – **теорема существования**).

Теорема существования и единственности решения: существует только одна функция $u(x, t)$, определенная и непрерывная в рассматриваемой области изменения аргументов $0 \leq x \leq l, t \geq 0$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению и заданным начальным и граничным условиям:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t),$$

$$(\rho(x) > 0, T(x) > 0), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$t = 0: \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x);$$

$$x = 0: \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad x = l: \quad u(l, t) = \mu_2(t).$$

Данная теорема предполагает выполнение следующих условий на рассматриваемом отрезке $0 \leq x \leq l$ при $t \geq 0$:

1) функция $u(x, t)$ и её производные, входящие в уравнение, непрерывны;

2) коэффициенты уравнения $\rho(x)$, $T(x)$ заданы и непрерывны.

Доказательство теоремы связано с методом нахождения единственного решения. Предположим, что существует не одно, а два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, которые удовлетворяют постановке краевой задачи:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + F(x,t),$$

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + F(x,t),$$

$$t = 0: u_1(x, 0) = \varphi(x), \quad u_{1t}(x, 0) = \psi(x),$$

$$u_2(x, 0) = \varphi(x), \quad u_{2t}(x, 0) = \psi(x);$$

$$x = 0: u_1(0, t) = \mu_1(t), \quad u_2(0, t) = \mu_1(t);$$

$$x = l: u_1(l, t) = \mu_2(t), \quad u_2(l, t) = \mu_2(t).$$

Рассмотрим разность данных уравнений и краевых условий. Функция $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению и следующим краевым условиям:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

$$\begin{cases} t = 0: v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0; \\ x = 0: v(0, t) = 0; \quad x = l: v(l, t) = 0. \end{cases}$$

При такой постановке задачи видно, что в дифференциальном уравнении нет внешних действующих сил $F(x,t) = 0$, нет начального отклонения струны и начальной скорости, а концы струны соответствуют условию жесткого закрепления. Поэтому единственным решением данной краевой задачи в рассматриваемой области изменения аргументов x, t будет функция $v(x,t) = 0$, а предполагаемые два решения будут тождественно равны $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$. *Что и требовалось доказать.*

Вывод: из множества решений дифференциального уравнения с частными производными 2-го порядка гиперболического типа существуют только одна функция $u(x,t)$, которая однозначно определяет процесс колебания струны.

§ 3.5. Метод распространяющихся волн Даламбера

Для решения уравнений гиперболического типа французский ученый Даламбер (Жан Лерон Д'Аламбер) в 1748 году на примере малых поперечных колебаний неограниченной струны разработал метод распространяющихся волн, названный впоследствии методом Даламбера.

1. Формула Даламбера. Рассмотрим собственные свободные колебания неограниченной струны под действием заданных начальных условий, полагая, что нет внешних сил $f(x, t) = 0$, а коэффициент a , входящий в дифференциальное уравнение, задан с учетом плотности и упругости струны.

Постановка задачи: найти функцию $u(x, t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области $(-\infty < x < +\infty, t \geq 0)$, удовлетворяющую однородному уравнению (3.4), и заданным начальным условиям (3.5):

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad (3.4)$$

$$t = 0: \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.5)$$

Решение задачи. Приведем дифференциальное уравнение (3.4) к каноническому виду (см. гл. 2). Определим коэффициенты уравнения при старших производных и запишем характеристическое уравнение:

$$a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = -a^2; \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a^2, \frac{dx}{dt} = \pm a.$$

Проинтегрируем данные характеристические уравнения и определим новые канонические переменные:

$$x - at = C_1, x + at = C_2; \xi = x + at, \eta = x - at.$$

Выразим в уравнении (3.4) производные через канонические переменные:

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1; \xi_t = \frac{\partial \xi}{\partial t} = a, \eta_t = \frac{\partial \eta}{\partial t} = -a;$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_t = a(u_\xi - u_\eta),$$

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \quad u_{tt} = a^2((u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}) - (u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta})).$$

Подставим значения вторых производных в уравнение (3.4), и после некоторых преобразований, приведем его к следующему виду:

$$u_{\xi\eta} = 0, \quad \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} = 0.$$

Первый интеграл решения по канонической переменной ξ будет равен:

$$u_\eta(\xi, \eta) = f^*(\eta), \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = f^*(\eta),$$

где $f^*(\eta)$ – неизвестная функция переменного η . Далее интегрируем уравнение по канонической переменной η :

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta) d\eta = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

здесь f_1 и f_2 соответственно являются функциями только переменных ξ и η . Перейдем обратно от функции в канонических переменных $u(\xi, \eta)$ к функции в физических переменных $u(x, t)$:

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at). \quad (3.9)$$

Полученное решение (3.9) является общим интегралом уравнения (3.4), при условии, что функции $f_1(x + at)$ и $f_2(x - at)$ непрерывны и дважды дифференцируемы. Определим данные функции, используя заданные начальные условия (3.5). Для этого из формулы (3.9) найдем скорость струны:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial f_1}{\partial(x+at)} \frac{\partial(x+at)}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial(x-at)} \frac{\partial(x-at)}{\partial t} = \\ &= f'_1(x + at)a - f'_2(x - at)a. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В начальный момент времени профиль (3.9) и скорость (3.10) струны определяются функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} t = 0: \quad u(x,0) &= f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u_t &= a(f'_1(x) - f'_2(x)) = \psi(x). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Решение уравнения относительно разности значения функций f_1 и f_2 , находится путем разделения переменных и интегрирования выражения (3.11):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f_1(x) - f_2(x)) &= \frac{1}{a}\psi(x), \\ f_1(x) - f_2(x) &= \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где x_0 и C – постоянные. Из выражений (3.11)–(3.12) определяются значения функций f_1 и f_2 :

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2}, \\ f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Подставляя найденные значения f_1 и f_2 в уравнение (3.9), получим выражение относительно функции $u(x,t)$ для любых значений аргументов x, t :

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha \right\} = \\
& = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \\
& + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha = f_1(x+at) + f_2(x-at), \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(x+at) &= \frac{1}{2} \varphi(x+at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, \\
f_2(x-at) &= \frac{1}{2} \varphi(x-at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Выражение (3.14) является решением уравнения (3.4) и называется **формулой Даламбера**, которая однозначно удовлетворяет теореме существования и единственности решения.

Замечание. В формуле (3.13) функции f_1 и f_2 определены с точностью до константы C , которая не определяется в (3.13) через φ и ψ , поскольку при сложении f_1 и f_2 константа C сокращается.

2. Физическая интерпретация. Формула Даламбера (3.14) является общим решением задачи Коши для неограниченной струны, а функция $u(x, t)$ описывает процесс распространения вдоль оси x начального отклонения $\varphi(x)$ и начальной скорости $\psi(x)$.

1. Функция $f_2(x-at)$ в формуле (3.14) представляет собой полуволну, перемещающуюся вправо, в положительном направлении оси x , со скоростью $v = \frac{\partial x}{\partial t} = a$ (распространяющаяся бегущая волна). Функция $f_1(x+at)$ представляет собой полуволну, распространяющуюся влево, в отрицательном направлении оси x , с такой же скоростью: $v = \frac{\partial x}{\partial t} = -a$. Следовательно профиль струны:

$$u(x, t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

является суперпозицией двух полуволн $f_1(x+at)$ и $f_2(x-at)$.

2. При фиксированном времени $t = t_0$ функция $u(x, t_0)$ представляет собой профиль струны в данный момент, а при заданном значении координаты (точка $x = x_0$), функция $u(x_0, t)$ определяет процесс движения данной точки струны (рисунок 3.2).

Предположим, что наблюдатель, находящийся в точке x в момент времени t , движется со скоростью $v = a$ в положительном направлении оси x . В подвижной системе координат ($x' = x - at$, $t' = t$) наблюдатель все время будет видеть один и тот же профиль струны $u(x, t) = f_2(x - at) = f_2(x')$, который был в начальный момент времени.

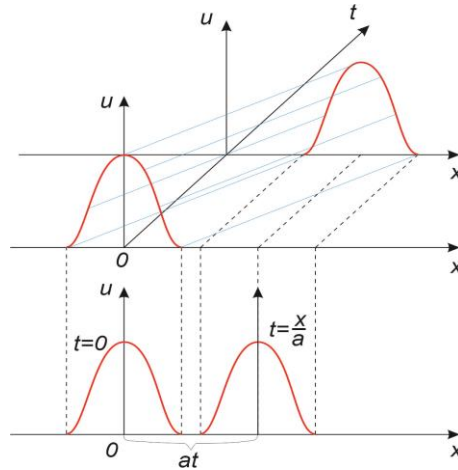


Рисунок 3.2 – Профиль струны, определяющий процесс движения в данный момент $u(x, t_0)$ и в данной точке $u(x_0, t)$ струны

3. В фазовой плоскости x, t прямые $x - at = const$ и $x + at = const$ являются характеристиками уравнения (3.4). Определенные вдоль данных характеристик функции $f_2(x - at)$ и $f_1(x + at)$, сохраняют свои постоянные значения (рисунок 3.3).

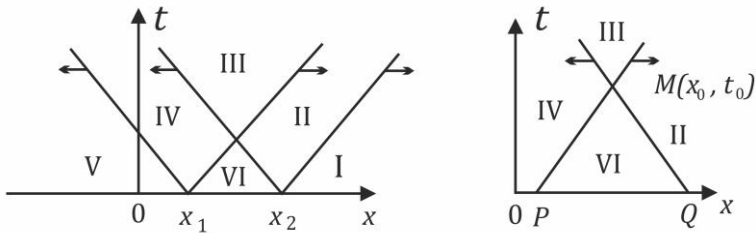


Рисунок 3.3 – Распространение волн f_1 и f_2 в фазовой плоскости, проходящих через точки x_1 и x_2 , и образованный характеристический треугольник

4. Предположим, что в начальный момент времени функция $u(x, 0)$ отлична от нуля только в интервале $[x_1, x_2]$ и равна нулю вне этого отрезка. Тогда характеристики $(x - at = x_1$ и $x - at = x_2)$, проведенные через точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, разбивают всю полуплоскость $(x, t > 0)$ на три характерные области (рисунок 3.3). Отметим, что функция $u(x, t) = f_2(x - at)$ отлична от нуля в области II ($x_1 < x - at < x_2$), а характеристики $x - at = x_1$ и $x - at = x_2$ представляют собой передний и задний фронт волны, распространяющейся вправо.

Аналогично такая же картина следует для функции $u(x, t) = f_1(x + at)$ и характеристик $x + at$, проведенных через точки $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ и представляющих собой фронты волн, распространяющихся влево.

5. Характер процесса распространения колебаний функции $u(x, t)$ хорошо наблюдается в фазовой плоскости (x, t) путем проведения характеристик функций $f_1(x + at)$ и $f_2(x - at)$ через точки x_1 и x_2 . В этом случае полуплоскость $(-\infty < x < \infty, t \geq 0)$ условно разбивается на шесть областей (рисунок 3.3). В областях I, III, V отклонение струны равно нулю, так как характеристический треугольник не имеет

общих точек с отрезком $[x_1, x_2]$, на котором заданы начальные условия. Поскольку в области II решением является правая полуволна $u(x,t) = 0,5\varphi(x - at)$, а в области IV – левая полуволна $u(x,t) = 0,5\varphi(x + at)$, то в области VI наблюдается суперпозиция левой и правой полуволн. Область VI представляет собой характеристический треугольник, образованный пересечением переднего фронта волны, распространяющийся вправо, и заднего фронта волны, распространяющийся влево.

6. Рассмотрим некоторую фиксированную точку (x_0, t_0) , и проведем из нее обе характеристики: $x - at = x_0 - at_0$, $x + at = x_0 + at_0$, которые пересекут ось x в точках $x_1 = x_0 - at_0$, $x_2 = x_0 + at_0$, $t = 0$. Значение функции $u(x,t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$ в точке $(x_0, 0)$ определяется функциями $f_1(x_2)$ и $f_2(x_1)$ в точках $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, которые являются вершинами характеристического треугольника MPQ с точкой (x_0, t_0) (рисунок 3.3), образованного двумя характеристиками и осью x . В характеристическом треугольнике MPQ происходит суперпозиция левой и правой полуволн (область VI). Из формулы (3.14) видно, что положение функции $u(x_0, t_0)$ точки струны x_0 в момент времени t_0 зависит от значений начального отклонения струны в вершинах характеристического треугольника MPQ ($P(x_0 - at_0, 0)$, $Q(x_0 + at_0, 0)$) и начальной скорости (сторона PQ). Тогда формулу Даламбера (3.14) можно записать так:

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_P^Q \varphi(\alpha) d\alpha. \quad (3.16)$$

Начальные условия, заданные вне стороны PQ , не оказывают влияния на значения функции $u(x, t)$ в точке $M(x_0, t_0)$. Если начальные условия заданы на отрезке PQ , то они однозначно определяют решение задачи внутри данного характеристического треугольника.

§ 3.6. Метод разделения переменных

Рассмотрим решение уравнения гиперболического типа методом, разработанным в 1807 году французским ученым Жан-Батистом Жозефом Фурье. Метод разделения переменных или метод Фурье, является одним из наиболее распространенных способов решения уравнений с частными производными второго и более высоких порядков.

Основная идея метода: *неизвестная функция от нескольких переменных заменяется произведением нескольких функций от одной переменной, а уравнение в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых находится в виде рядов или интегралов Фурье.*

Проведем подробное решение уравнения гиперболического типа методом Фурье, для того чтобы при решении уравнений параболического и эллиптического типов делать ссылку на данный параграф, опуская повторения отдельных предположений, доказательств и выводов.

Метод разделения переменных рассмотрим на примере решения задачи о собственных колебаниях струны с закрепленными концами (рисунок 3.1) и отсутствия действующих внешних сил: $f(x,t) = 0$.

1. Постановка задачи: найти функцию $u(x, t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области $[0 \leq x \leq l, t \geq 0]$, из решения однородного уравнения гиперболического типа (3.4) с постоянными коэффициентами и заданными начальными и граничными условиями:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0. \quad (3.4)$$

$$t = 0: \quad \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (3.5)$$

$$x = 0: u(0, t) = 0, \quad x = l: u(l, t) = 0. \quad (3.6)$$

Коэффициент, входящий в уравнение (3.4) $a = \sqrt{T/\rho}$, определяется из справочника через данные о свойствах материала струны T, ρ .

1.1. Для решения уравнения (3.4) сделаем постановку **вспомогательной задачи**: найти функцию, не равную тождественно нулю $u(x,t) \neq 0$, удовлетворяющую однородным граничным условиями (3.6), и представленную в виде произведения двух функций:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0, \quad (3.17)$$

где $X(x)$ – функция от координаты x ; $T(t)$ – функция, зависящая только от времени t . Подставим функцию (3.17) в уравнение (3.4), и получим:

$$T''X = a^2 X''T.$$

Преобразуем данное уравнение путем деления на $a^2 X(x)T(t)$ и запишем полученное выражение в таком виде:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (3.18)$$

Чтобы функция (3.17) была решением уравнения (3.4) в области изменения аргументов $0 < x < l, t > 0$, равенство (3.18) должно выполняться для всех значений независимых переменных x, t . Правая часть (3.18) является функцией только переменного t , а левая – только переменной x . При произвольном изменении значений x или t видно, что правая и левая части (3.18) остаются без изменения. Поэтому их можно приравнять к произвольной константе $\lambda = const$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda. \quad (3.19)$$

Знак минус у постоянной λ взят для удобства решения уравнений. Из выражения (3.19) следуют два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0, \quad (3.20)$$

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0. \quad (3.21)$$

Из граничных условий (3.6) и выражения (3.17) определим граничные условия для функции $X(x)$:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

Поскольку $T(t) \neq 0$, то равенство нулю реализуется, когда функция $X(x)$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (3.22)$$

В обратном же случае при $T(t) = 0$ следовало бы, что функция $u(x,t) = 0$, а это противоречит постановке задачи при нахождении нетривиального решения уравнения (3.4).

1.2. Для определения функции $X(x)$ сделаем постановку задачи по определению собственных значений параметра λ .

Задача Штурма–Лиувилля: найти собственные значения параметра $\lambda = const$, при которых существуют нетривиальные (не нулевые) решения уравнения (3.20), удовлетворяющие граничным условиям (3.22).

Рассмотрим возможные случаи решения задачи Штурма–Лиувилля, когда параметр λ отрицателен, равен нулю и положителен. Для этого методом Эйлера находим решение обыкновенного дифференциального уравнения (3.20) в виде функции:

$$X(x) = Ce^{\alpha x}.$$

Подставим данное решение в уравнение (3.20), и получим следующее характеристическое уравнение:

$$\alpha^2 + \lambda = 0, \quad \alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}.$$

1. При $\lambda < 0$ корни характеристического уравнения имеют два действительных значения: $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$. Запишем

общее решение уравнения (3.20) и граничные условия (3.22):

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}, \quad X(0) = \\ &= C_1 + C_2 = 0; \quad X(l) = C_1 e^{\alpha l} + C_2 e^{-\alpha l} = 0. \end{aligned}$$

Определим постоянные C_1, C_2 :

$$C_1 = -C_2, \quad C_1(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}) = 0, \quad (e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}) \neq 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Видно, что в этом случае функция $X(x) \equiv 0$, и задача сводится к тривиальному решению уравнения (3.20). Поэтому для данного значения параметра $\lambda < 0$ существует только тривиальное решение уравнения (3.20): $u(x,t) = 0$.

2. При $\lambda = 0, \alpha_{1,2} = 0$ общее решение уравнения (3.20) и граничные условия (3.22) имеют вид:

$$X(x) = C_1 x + C_2, \quad X(0) = C_2 = 0, \quad X(l) = C_1 l = 0, \quad C_1 = 0.$$

Следовательно при значении параметра $\lambda = 0$, функция $X(x) = 0$ и существует только однородное тривиальное решение уравнения (3.20): $u(x,t) = 0$.

3. При постоянной $\lambda > 0$, корни характеристического уравнения комплексные: $\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, а общее решение уравнения (3.20) и граничные условия (3.22) запишутся в таком виде:

$$\begin{aligned} X(x) &= D_1 \cos\sqrt{\lambda}x + D_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \\ X(0) &= D_1 = 0, \quad X(l) = D_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{aligned}$$

Для определения нетривиального решения уравнения (3.20) $X(x) \neq 0$ следует положить, что

$$D_2 \neq 0, \quad \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Следовательно, при условии $\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ есть любое целое число, существует множество нетривиальных

решений задачи Штурма–Лиувилля, где собственным значениям параметра λ_n соответствуют и собственные значения функции $X_n(x)$:

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = D_2 \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \quad (3.23)$$

1.3. Решаем второе дифференциальное уравнение (3.21) относительно функции $T(t)$ для данного значения λ , аналогично решению уравнения (3.20):

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T_n(t) = C_3 \cos(\sqrt{a\lambda}t) + C_4 \sin(\sqrt{a\lambda}t).$$

Подставим в данное решение собственные значения λ_n , введем обозначение $\omega_n = \frac{\pi n}{l}a$, и запишем решение задачи относительно функции $u(x,t)$ (3.17):

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x) T_n(t) = \\ &= (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $A_n = D_2 C_3$ и $B_n = D_2 C_4$ – произвольные постоянные. Таким образом, функция $u_n(x,t)$ является частным решением уравнения (3.4). В силу линейности и однородности уравнения (3.4) следует, что сумма частных решений является общим решением данного уравнения, удовлетворяющего граничным (3.6) и начальным условиям (3.5):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \end{aligned} \quad (3.25).$$

Постоянные A_n и B_n определяются из начальных условий (3.5):

$$t = 0: \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \end{cases} \quad (3.26)$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольные кусочно-непрерывные и кусочно-дифференцируемые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, заданные в промежутке $0 \leq x \leq l$, разлагаются в ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Из сравнения данных рядов Фурье с выражениями (3.26) получим, что

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \psi_n.$$

Коэффициенты рядов Фурье φ_n, ψ_n находятся путем обратного преобразования Фурье:

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi.$$

Данные значения полностью определяют функцию $u(x,t)$, которая представляет собой решение искомой задачи в виде ряда Фурье.

2. Физическая интерпретация решения. Проведем анализ процесса колебания струны на основе полученного решения. Для этого частное решение (3.24) относительно функции $u_n(x,t)$ преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\ &= a_n \sin(\omega_n t + \delta_n) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad (3.27) \\ A_n &= a_n \sin \delta_n, \quad B_n = a_n \cos \delta_n, \\ a_n &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \delta_n = \arctg\left(\frac{A_n}{B_n}\right). \end{aligned}$$

Из выражения (3.27) видно, что каждая точка струны совершает гармонические колебания относительно аргумента x и времени t . Для фиксированного значения $x = x_0$, функция $u_n(x_0, t)$ имеет следующий вид:

$$u_n(x_0, t) = a_n \sin(\omega_n t + \delta_n) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x_0\right) = a(x_0) \sin(\omega_n t + \delta_n), \quad (3.28)$$

$$a(x_0) = a_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x_0\right), \quad \omega_n = \frac{\pi n}{l} a.$$

Таким образом, струна совершает гармоническое колебание с амплитудой $a(x_0)$ и частотой ω_n (рисунок 3.4). Колебательное движение струны такого типа называется *стоячей волной*. Точки $x_0 = ml/n$ ($m = 1, 2, \dots, n - 1$), которые в течение колебания струны остаются неподвижными ($\sin(\frac{\pi n}{l} x_0) = 0$), называются *узлами* стоячей волны $u_n(x_0, t)$. Точки $x_0 = (2m + 1)l/2n$ ($m = 0, 1, \dots, n - 1$), совершающие колебания с максимальной амплитудой a_n ($\sin(\frac{\pi n}{l} x_0) = \pm 1$), называются *пучностями* стоячей волны.

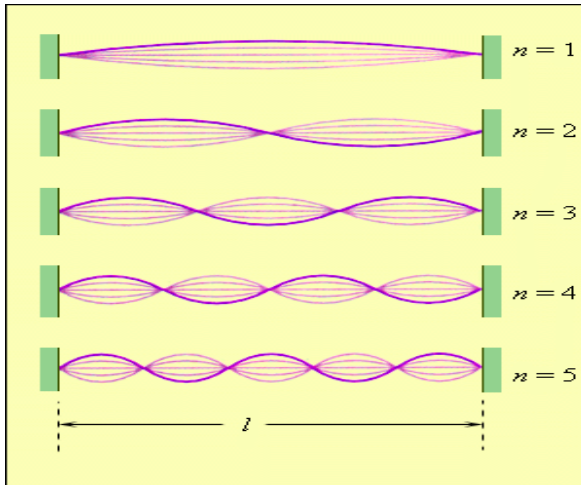


Рисунок 3.4 – Профиль колебания струны длиной l в зависимости от n -й гармоники (рисунок из интернета)

Профиль стоячей волны $u_n(x, t)$, в любой момент $t = t_0$ представляет собой синусоиду по всей длине струны от 0 до l (рисунок 3.4):

$$u_n(x, t) = C_n(t_0) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Отклонение струны от положения равновесия $C_n(t_0)$ и скорость u_t будут соответственно равны:

$$C_n(t_0) = a_n \sin(\omega_n t_0 + \delta_n),$$

$$u_t(x, t) = \frac{\partial u_n}{\partial t} = a_n \omega_n \cos(\omega_n t + \delta_n) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Для моментов времени, когда отклонения струны от положения равновесия достигают максимального значения ($\sin(\omega_n t + \delta_n) = \pm 1$), скорость движения струны равна нулю ($\cos(\omega_n t + \delta_n) = 0$). Для моментов времени, когда отклонения струны от положения равновесия равно нулю ($\sin(\omega_n t + \delta_n) = 0$), скорость движения струны имеет максимальное значение ($\cos(\omega_n t + \delta_n) = \pm 1$).

Частота колебания всех точек струны ω_n называется *собственной частотой* колебания. Поскольку для поперечных колебаний струны значение $a^2 = T/\rho$, то собственная частота колебаний определяется свойствами материала и длиной струны:

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (3.29)$$

3. Энергия колебания струны. Полная энергия механических колебаний струны равна сумме кинетической и потенциальной энергии. Поскольку масса струны распределена по всей её длине, то полная энергия будет определяться выражением:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 + T(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$$

Определим энергию n -й гармоник для случая поперечных колебаний струны, учитывая выражения для α_n , ω_n , $T = a^2\rho$, $M = l\rho$ (масса струны):

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \frac{\alpha_n^2}{2} \int_0^l \left[\rho \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t + \delta_n) \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \right. \\ &+ T \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2(\omega_n t + \delta_n) \cos^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \left. \right] dx = \\ &= \frac{\alpha_n^2}{4} \left[\rho \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t + \delta_n) + T \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2(\omega_n t + \delta_n) \right] = \\ &= \frac{\rho \alpha_n^2 \omega_n^2}{4} l = \omega_n^2 M \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где значения интегралов:

$$\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \int_0^l \cos^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \frac{l}{2}.$$

4. Звуковые колебания струны. Колебания струны воспринимаются по звуку, издаваемому струной. Не оставиваясь на процессе распространения колебаний в воздухе и восприятия звуковых колебаний нашим ухом, отметим: звук струны является наложением «простых тонов», соответствующих стоячим волнам. Разложение звука на простые тона не является операцией математического характера, а является реальным физическим процессом и выделение простых тонов можно произвести экспериментально при помощи резонаторов.

Высота тона зависит от частоты колебаний, соответствующих этому тону. Сила звука данного тона зависит от энергии колебания струны и, следовательно, от её амплитуды α (3.30). Самый низкий тон, который издает струна, определяется собственной частотой колебания и при $n = 1$ называется **основным тоном** струны:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Остальные тона ω_n , кратные к ω_1 , и соответствующие частоты (3.29) при изменении $n = 2, 3, \dots, \infty$ называются **обертонами**.

Тембр звука определяется присутствием, наряду с основным тоном, других обертонов и от распределения энергии по гармоникам. Низший тон струны и ее тембр зависят от способа возбуждения колебания, который определяется начальными условиями и выражается через значения коэффициентов A_n и B_n :

$$u(x,0) = \varphi(x); \quad u_t(x,0) = \psi(x).$$

Если $A_1 = B_1 = 0$, то низший тон соответствует частоте ω_n ($n = 2, 3, \dots$) – наименьшее значение n , для которого A_n или B_n отличны от нуля.

Обычно струна издает один и тот же тон, когда отклоняем её от положения равновесия и отпускаем без начальной скорости:

$$u(x,0) = \varphi(x) \geq 0 \quad (A_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin(\frac{\pi}{l} \xi) d\xi > 0, \\ \sin(\frac{\pi}{l} \xi) > 0), \quad u_t(x,0) = 0.$$

Следующие коэффициенты значительно меньше A_1 , так как функция $\sin(\pi n \xi / l)$ знакопеременна при $n \geq 2$. В частности, если $\varphi(x)$ симметрична относительно середины отрезка, то $A_2 = 0$. Если привести струну в колебание, отклоняя ее в одну сторону $\varphi(x) > 0$, то низшим тоном струны будет основной тон, энергия которого больше энергии других гармоник. Если начальная функция нечетная относительно середины струны, то $A_1 = 0$ и низший тон звучащей струны будет соответствовать частоте:

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Флажолет. Если к звучащей струне прикоснуться точно в середине, то звук ее резко меняется в октаву к своему тону. Этот прием применяется при игре на скрипке, гитаре и других струнных инструментах и носит название **флажолета**. С точки зрения теории колебания струн в момент прикосновения к её середине гасятся стоячие волны, имеющие в этой точке пучности, и сохраняются лишь гармоники, имеющие в этой точке узлы (рисунок 3.4). Таким образом, остаются четные гармоники с самой низкой частотой звучания:

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Если прикоснуться к струне на расстоянии $1/3$ её длины от края, то высота основного тона повышается втрое, так как при этом сохраняются лишь гармоники, имеющие узлы в точке $x = l/3$.

5. Законы Мерсенна. Экспериментальные законы колебания струн были установлены французским физиком Мареном Мерсенне в 1636 году:

1. Для различных струн с одинаковой плотностью и коэффициентом натяжения период колебания пропорционален их длине $\tau \sim l$.

2. При заданной длине струны период колебания изменяется обратно пропорционально корню квадратному от коэффициента натяжения и прямо пропорционально корню квадратному от линейной плотности струны:

$$\tau \sim 1/\sqrt{T}, \quad \tau \sim \sqrt{\rho}.$$

Законы Мерсенна полностью согласуются с полученным выражением относительно периода **основного тона** колебания струны ($n = 1$):

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l \sqrt{\frac{\rho}{T}}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

6. Струнные музыкальные инструменты по способу извлечения звука делятся на смычковые (скрипка, виолончель), щипковые (арфа, гитара, балалайка), ударные (цимбала), ударно-клавишные (пианино, фортепиано), щипково-клавишные (клавесин).

6.1. В **щипковых** музыкальных инструментах извлечение звука производится пальцами, медиаторами и другими приспособлениями, отклоняя натянутую струну от положения равновесия, формируя начальный профиль $\varphi(x)$, и отпуская её без начальной скорости $\psi(x)$:

$$t = 0: u_t(x,0) = \psi(x) = 0, u(x,0) = \varphi(x) \neq 0.$$

6.2. В **ударных** музыкальных инструментах звук создается ударом молоточка или палочки по струне или мембране. В этом случае начальный профиль струны $\varphi(x)$ равен нулю (струна неподвижна), а начальная скорость $\psi(x)$ равна скорости ударного механизма:

$$t = 0: u(x,0) = \varphi(x) = 0, u_t(x,0) = \psi(x) = v \neq 0.$$

6.3. В **смычковых** музыкальных инструментах извлечение звука осуществляется в процессе ведения смычка по натянутым струнам. В этом случае начальный профиль струны $\varphi(x)$ и начальная скорость $\psi(x)$ отличны от нуля:

$$t = 0: u(x,0) = \varphi(x) \neq 0, u_t(x,0) = \psi(x) = v \neq 0.$$

§ 3.7. Решение неоднородного дифференциального уравнения

Рассмотрим колебания струны с закрепленными концами под действием заданных внешних сил $F(x,t)$ (рисунок 3.1). Для определения процесса колебания струны сделаем постановку краевой задачи.

1. Первая краевая задача: найти профиль струны – функцию $u(x,t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области изменения аргументов $[0 \leq x \leq l, t \geq 0]$, из решения неоднородного уравнения, удовлетворяющего начальным и однородным граничным условиям:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (0 < x < l, t > 0) \quad (3.3)$$

$$t = 0: \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (0 < x < l) \quad (3.5)$$

$$x = 0: u(0, t) = 0, \quad x = l: u(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3.6)$$

Коэффициент, входящий в уравнение (3.3) $a^2 = T/\rho$ и внешние действующие силы $F(x,t)$, заданы.

2. Решение первой краевой задачи находим в виде разложения функции $u(x,t)$ в ряд Фурье по аргументу x , по аналогии с собственными колебаниями струны, а коэффициенты ряда являются функциями времени t :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (3.31)$$

Для определения коэффициентов ряда Фурье $u_n(t)$ значения функции $f(x,t)$ и начальные условия на отрезке $[0 \leq x \leq l]$ представим также в виде рядов Фурье:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi. \quad (3.32)$$

Подставляя решения (3.31) и (3.32) в исходное уравнение (3.3), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \left\{ -a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n + f_n(t) \right\} = 0.$$

Поскольку функция $\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$ может принимать любые значения в интервале $[0, l]$, то коэффициенты разложения в ряд Фурье будут равны нулю:

$$\ddot{u}_n + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 u_n = f_n(t). \quad (3.33)$$

Решение обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения (3.33) с постоянными коэффициентами и функцию $u_n(t)$ представим в виде суммы двух решений:

$$u_n(t) = u_n^I(t) + u_n^{II}(t),$$

где $u_n^I(t)$ – решение однородного уравнения; $u_n^{II}(t)$ – частное решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями [1]:

$$u_n^I(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) f_n(\tau) d\tau, \quad \omega_n = a \frac{\pi n}{l}.$$

Частное решение однородного уравнения с заданными начальными условиями (см. § 3.6) определяется выражением:

$$u_n^{II}(t) = \varphi_n \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \psi_n \sin(\omega_n t).$$

Тогда общее решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения (3.3) запишется в следующем виде:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \psi_n \sin(\omega_n t) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) f_n(\tau) d\tau. \quad (3.34)$$

Первая сумма ряда в (3.34) представляет собой решение задачи о свободных колебаниях струны при заданных

начальных условиях (3.5), где коэффициенты φ_n, ψ_n определяются с помощью выражений (3.32):

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$u_n(0) = \varphi_n, \quad \dot{u}_n(0) = \psi_n.$$

Вторая сумма ряда в (3.34) определяет вынужденные колебания струны под действием внешних сил при нулевых начальных условиях.

Пользуясь выражением (3.32) для коэффициента ряда Фурье $f_n(t)$ можно упростить форму записи решения неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} u^l(x, t) &= \int_0^t \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n(t - \tau)) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Поскольку $f(\xi, \tau)$ представляет массовую плотность действующих внешних сил, то функция

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\omega_n(t - \tau)) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right)$$

отражает влияние данных сил.

Практическое занятие № 3

Лекции 7–10

Глава 4. Уравнения параболического типа

Проводится вывод уравнения параболического типа, постановка краевых условий и методов решения на примере задачи о распространении тепла в стержне с теплоизолированной боковой поверхностью под действием внешних источников или стоков тепла и заданных начальных и граничных условий

Дифференциальные уравнения с частными производными 2-го порядка параболического типа описывают явления, связанные с физическими процессами переноса тепла и массы (диффузия частиц), которые в одномерном случае имеют следующий вид:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f. \quad (4)$$

Вывод уравнения параболического типа основан на фундаментальных законах сохранения балансов энергии или массы.

§ 4.1. Уравнение теплопроводности

1. Распространение тепла в однородном стержне.

Определим распределение температуры в стержне длины l , радиуса R с теплоизолированной боковой поверхностью. Стержень достаточно тонкий и в любой момент времени температура во всех точках его поперечного сечения одинакова. Начальная температура стержня постоянна

и равняется $u(x,0) = \varphi(x) = u_1$. Один конец стержня при $x = 0$ поддерживается при постоянной температуре $u(0,t) = u_1$, а на втором конце $x = l$ температура $u(l,t) = \mu(t)$ за промежуток времени t_0 линейно возрастает от u_1 до максимального значения: u_2 ($u_1 < u_2$, $\mu(t) = u_1 + (u_2 - u_1) t / t_0$).

Как следует из эксперимента, количество тепла Q , протекающее через поперечное сечение стержня площадью $A = \pi R^2$ за единицу времени, от более нагретого конца стержня к менее нагретому, определяется следующим выражением:

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} A,$$

где k – коэффициент теплопроводности. С течением времени в стержне постепенно устанавливается линейное стационарное распределение температуры (рисунок 4.1), которое хорошо подтверждается экспериментом:

$$u(x, t) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l}.$$

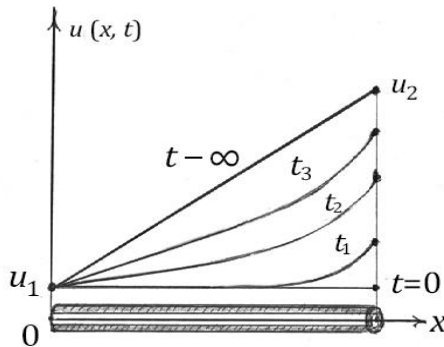


Рисунок 4.1 – Изменение температуры в стержне с теплоизолированной боковой поверхностью за промежутки времени:

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t \rightarrow \infty$$

2. Вывод уравнения теплопроводности. Для определения изменения температуры $u(x,t)$ в произвольной точке стержня x в момент времени t , сделаем вывод уравнения теплопроводности на основе фундаментального закона сохранения баланса энергии. Для этого рассмотрим физические процессы, протекающие в стержне при нагреве и распространении потоков тепла.

2.1. *Закон Фурье.* Если температура в стержне распределена неравномерно, то в нем возникают тепловые потоки, направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой. Количество тепла, протекающее через сечение x стержня за промежуток времени $(t, t+dt)$, определяется на основе экспериментального закона Фурье:

$$dQ = qAdt, \quad q = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4.1)$$

где q – плотность теплового потока, равная количеству тепла, протекшего в единицу времени через единицу площади сечения. Полное количество тепла, протекающее за промежуток времени (t_1, t_2) через поперечное сечение x , находится путем интегрирования выражения (4.1):

$$Q = -A \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt. \quad (4.2)$$

2.2. Количество тепла, необходимое сообщить однородному стержню, чтобы повысить его температуру на $\Delta u = u(x, t_2) - u(x, t_1)$, равно:

$$Q = cm\Delta u = c\rho V\Delta u,$$

где c – удельная теплоемкость; m – масса тела; ρ – плотность; V – объем.

Если температура изменяется неравномерно на различных участках стержня или стержень неоднороден, то полное количество тепла, которое необходимо затратить

для нагрева стержня на отрезке $[x_1, x_2]$, будет определяться выражением:

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho A \Delta u(x) dx. \quad (4.3)$$

2.3. Внутри стержня могут возникать процессы, связанные с выделением или поглощением тепла, например, при прохождении электрического тока или вследствие химических реакций. Данные явления можно охарактеризовать плотностью тепловых источников или стоков тепла $F(x, t)$ в стержне в точке x и в момент времени t . В результате этого на участке стержня $[x, x+dx]$ за промежуток времени $[t, t+dt]$ будет выделяться или поглощаться определенное количество тепла:

$$dQ = AF(x, t) dx dt.$$

Полное количество тепла на отрезке стержня $[x_1, x_2]$ за промежуток времени $[t_1, t_2]$ запишется так:

$$Q = A \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx. \quad (4.4)$$

3. Уравнение теплопроводности в интегральной форме. На основе закона сохранения энергии, учитывая выражения (4.2), (4.3) и (4.4), получим уравнение теплопроводности в интегральной форме:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right] d\tau + \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ & = \int_{x_1}^{x_2} c\rho [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4. Уравнение теплопроводности в дифференциальной форме. Для определения температуры стержня $u(x, t)$ в произвольной точке x и в момент времени t необходимо уравнение теплопроводности (4.5) записать в дифференциальной форме. Для этого предполагается, что функция $u(x, t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные u_x , u_{xx} и u_t . Для достаточно малых промежутков изменения аргументов $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ и на основе теоремы о среднем, можно искомые функции вынести за знак интеграла и проинтегрировать слагаемые в уравнении (4.5):

$$\begin{aligned} & \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - k \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, \tau) \right] \Big|_{\tau=t_3}^{\tau=t_3+\Delta t} + F(x, t) \Big|_{x=x_3}^{x=x_3+\Delta x} \Delta t \Delta x = \\ & = \{c\rho[u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\} \Big|_{\xi=x_4} \Delta x. \end{aligned}$$

Пользуясь теоремой о конечных приращениях, приведем данное уравнение к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] \Big|_{x=x_4}^{x=x_4+\Delta x} \Delta t \Delta x + F(x, t) \Big|_{x=x_3}^{x=x_3+\Delta x} \Delta x \Delta t = \\ & = \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right] \Big|_{t=t_3}^{t=t_3+\Delta t} \Delta x \Delta t, \end{aligned}$$

где t_3 , t_4 и x_3 , x_4 – промежуточные точки интервалов (t_1, t_2) и (x_1, x_2) . После сокращения на произведение $\Delta x \Delta t$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_4}^{x=x_4+\Delta x} + F(x, t) \Big|_{x=x_3}^{x=x_3+\Delta x} = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_3}^{t=t_3+\Delta t}.$$

Переходя к пределу при стремлении $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ ($x_1 \rightarrow x_2$, $t_1 \rightarrow t_2$), уравнение теплопроводности в дифференциальной форме запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (4.6)$$

5. Рассмотрим некоторые **частные случаи** уравнения теплопроводности.

5.1. Если стержень однороден, то коэффициенты k , c , ρ постоянны вдоль оси x и уравнение теплопроводности примет следующий вид:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho}, \quad (4.7)$$

где a^2 – называется *коэффициентом температуропроводности*.

5.2. Если в стержне источники или стоки тепла отсутствуют $F(x,t) = 0$, то однородное уравнение теплопроводности запишется так:

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (4.8)$$

5.3. В случае теплообмена с окружающей средой, согласно *закону Ньютона*, количество тепла, теряемое стержнем, рассчитанное на единицу длины и времени, равно:

$$F_0 = h(u - \theta),$$

где $\theta(x,t)$ – температура окружающей среды, h – *коэффициент теплообмена*.

5.4. Если стержень однороден, то уравнение теплопроводности с учетом бокового теплообмена имеет следующий вид:

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x,t),$$

здесь $f(x,t) = \alpha\theta(x,t) + \frac{F_1(x,t)}{c\rho}$ – заданная известная функция.

5.5. Если коэффициенты k и c являются медленно меняющимися функциями температуры, то сделанное выше предположение о постоянстве данных коэффициентов возможно лишь при условии рассмотрения небольших интервалов изменения температуры и давления. Изучение

произвольных температурных процессов приводит к квазилинейным или нелинейным уравнениям теплопроводности, которые для неоднородного стержня запишутся в таком виде:

$$c(u,x)\rho(u,x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k(u,x)\frac{\partial u}{\partial x}) + F(x,t).$$

Примечание. Математическая форма записи уравнения (4.7) используется для описания процесса диффузии какого-либо вещества. При выводе уравнения диффузии применяется фундаментальный закон сохранения массы. В этом случае функция $u(x,t)$ описывает распределение концентрации вещества с учетом источников или стоков массы f , где $a^2 = D/c$; D – коэффициент диффузии; c – коэффициент пористости (отношение объема пор к рассматриваемому занимаемому объему).

§ 4.2. Постановка краевых условий

Для решения уравнения теплопроводности необходимо задать начальные и граничные условия.

1. Начальное условие. В момент времени t_0 задается начальное распределение температуры, которое определяется функцией $\varphi(x)$:

$$t = t_0: u(x, t_0) = \varphi(x).$$

2. Граничные условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границах. Рассмотрим некоторые основные типы задания граничных условий:

2.1. Граничное условие 1 рода. На концах стержня задан закон изменения температуры от времени:

$$x = 0: u(0, t) = \mu_1(t), \quad x = l: u(l, t) = \mu_2(t).$$

Функции $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ определены в промежутке времени $t_0 \leq t \leq t_k$, где t_k – конечное время, в течение которого изучается процесс распространения тепла в стержне.

2.2. Граничное условие 2-го рода. На конце стержня $x = l$ задано значение производной, которая выражается через функцию $v(t)$, определяемую величиной теплового потока $Q(l,t)$, протекающего через поперечное торцевое сечение стержня:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = v(t), \quad v(t) = -\frac{Q(l,t)}{k}, \quad Q(l,t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(l,t).$$

Аналогично задается граничное условие на другом конце стержня $x = 0$.

2.3. Граничное условие 3-го рода задается на основе закона Ньютона, учитывающего теплообмен на поверхности тела с окружающей средой, температура которой $\theta(t)$ является заданной функцией от времени, h – коэффициент теплообмена. Зададим граничное условие 3-го рода на конце стержня $x = l$, которое линейно относительно производной и функцией:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -h[u(l,t) - \theta(t)].$$

На конце стержня $x = 0$ третье граничное условие имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h[u(0,t) - \theta(t)].$$

2.4. Смешанные граничные условия задаются на концах стержня и могут состоять из шести типов данных краевых условий. Если заданные функции $\mu(t)$, $v(t)$ или $\theta(t)$ равны нулю, то граничные условия называются **однородными**.

§ 4.3. Постановка краевых задач

Решение задач по определению изменения и распределения температуры на основе уравнения теплопроводности начинается с постановки краевой задачи.

1. Первая краевая задача: найти распределение температуры – функцию $u(x,t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области изменения аргументов: $[0 \leq x \leq l, t \geq 0]$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности (4.7) и заданным начальным и граничным условиям:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$t = 0: u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l,$$

$$x = 0: u(0, t) = \mu_1(t), \quad x = l: u(l, t) = \mu_2(t), \quad t > 0,$$

где функции $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, коэффициент, входящий в уравнение a и источники тепла $f(x,t)$ должны быть известны и определены.

2. Постановка второй и третьей краевых задач делается аналогично, если на обоих концах стержня при $x = 0$ и $x = l$ задаются граничные условия второго или третьего рода.

3. Смешанные краевые задачи. Если на концах струны задаются различные граничные условия первого, второго или третьего рода, то такие краевые задачи называют смешанными.

4. Краевые условия более сложных типов. Если на конце стержня при $x = 0$ помещено тело с теплоемкостью C_1 и большой теплопроводностью, то температура по всему объему этого тела будет постоянной и теплообмен стержня с внешней средой происходит по закону Ньютона. Тогда краевое условие на основе уравнения теплового баланса, будет иметь вид:

$$x = 0: C_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - \theta).$$

5. Неоднородная среда, для которой коэффициенты уравнения являются разрывными функциями. В этом случае стержень разбивается точками x_i на несколько i частей, в которых наблюдается разрыв коэффициентов. Поэтому внутри данных отрезков функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, а на границах реализуются условия сопряжения, которые отражают непрерывность температуры и тепловых потоков в точках x_i разрыва коэффициентов:

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t),$$

$$k(x_i - 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i - 0, t) = k(x_i + 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i + 0, t).$$

6. Краевая задача на бесконечной прямой. Если при рассмотрении распространения тепла в длинном (бесконечном) стержне влияние температурного режима, заданного на границах, не сказывается на его исследуемой области, то температура в данной области определяется только начальным распределением. В этом случае задание длины стержня практически не имеет значения.

Постановка задачи: найти решение уравнения теплопроводности (4.7) в рассматриваемой области ($-\infty < x < \infty$, $t \geq t_0$) изменения аргументов при заданном начальном распределении температуры (задача Коши):

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad (-\infty < x < +\infty).$$

7. Краевая задача на полубесконечной прямой. Если исследуемый участок стержня находится вблизи одного конца и далеко от другого, то в этом случае изменение температуры в стержне практически определяется температурным режимом на данном конце стержня и начальным условием.

Постановка задачи: найти решение уравнения теплопроводности (4.7) в области $(0 \leq x \leq \infty, t_0 \leq t)$ изменения аргументов, удовлетворяющее заданным краевым условиям:

$$t = t_0: u(x, t_0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$x = 0: u(0, t) = \mu(t) \quad (t \geq t_0).$$

§ 4.4. Метод разделения переменных

Рассмотрим решение уравнения теплопроводности методом разделения переменных или методом Фурье.

Постановка задачи: определить распределение температуры $u(x, t)$ в однородном стержне длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью с учетом действия источников или стоков тепла $f(x, t)$.

Для решения уравнения теплопроводности сделаем постановку краевой задач.

1. Общая первая краевая задача: найти функцию $u(x, t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq t_k$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности и заданным начальным и граничным условиям:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (0 < x < l, t > 0),$$

$$t = 0: u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.9)$$

$$x = 0: u(0, t) = \mu_1(t); \quad x = l: u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq t_k, \quad (4.10)$$

где $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – функции начального распределения температуры и изменения температуры на концах стержня; t_k – конечное время исследуемого процесса; $f(x, t)$ – плотность источников или стоков тепла.

При решении краевой задачи воспользуемся методом разделения переменных (смотри §3.6) и упростим постановку общей первой краевой задачи, полагая, что нет внешних источников или стоков тепла $f(x,t) = 0$, а на границах поддерживается постоянная температура равная нулю.

2. Первая краевая задача: найти функцию $u = u(x,t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области ($0 \leq x \leq l, t \geq 0$) из решения однородного уравнения теплопроводности, удовлетворяющего начальным и однородным граничным условиям:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq t_k$$

$$t=0: u(x, 0) = \varphi(x), \quad (0 \leq x \leq l),$$

$$x = 0: u(0, t) = 0, \quad x = l: u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_k. \quad (4.11)$$

3. Вспомогательная задача: найти функцию $u(x,t) \neq 0$ из решения однородного уравнения (4.8), удовлетворяющую краевым условиям и представленную в следующем виде:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0, \quad (4.12)$$

где $X(x)$ – функция только переменного x ; $T(t)$ – функция только переменного t .

Подставляем данное решение (4.12) в уравнение (4.8) и после некоторых преобразований получим:

$$XT_t = a^2 TX_{xx}, \quad XT' = a^2 T X'' \quad (T' = \frac{dT}{dt}, X'' = \frac{d^2X}{dx^2}).$$

Разделим обе части уравнения на a^2XT и, учитывая, что левая часть равенства зависит только от t , а правая – только от x , приравняем их к $\lambda = \text{const}$ (§ 3.6):

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

Отсюда следуют два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T' + a^2\lambda T = 0, \quad X'' + \lambda X = 0. \quad (4.13)$$

Граничные условия для функции $X(x)$ уравнения (4.13) запишутся так:

$$\begin{aligned} u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l,t) = X(l)T(t) = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

4. Задача Штурма-Лиувилля: найти такие значения параметра λ для функции $X(x)$, при которых существуют нетривиальные решения

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

В § 3.6 показано, что для собственных значений параметра $\lambda = \lambda_n$ существуют нетривиальные решения уравнения (4.15):

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad \lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Определим решения уравнения (4.13) через собственные функции $T(t) = T_n(t)$:

$$\frac{dT_n}{dt} = -a^2 \lambda_n T_n, \quad \frac{dT_n}{T_n} = -a^2 \lambda_n dt, \quad T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t},$$

где C_n – постоянная интегрирования. Возвращаясь к вспомогательной задаче, видим, что функция $u_n(x,t)$ является частными решениями уравнения (4.8) и удовлетворяет нулевым граничным условиям:

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Общее решение первой краевой задачи представим в виде ряда Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (4.16)$$

Коэффициенты ряда Фурье C_n определяются заданием начального условия $\varphi(x)$:

$$t = 0: u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi.$$

5. Функция источника. Можно представить решение задачи через функцию источника. Для этого преобразуем полученное уравнение (4.16), заменяя коэффициент C_n его значением:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \right] e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\ &= \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \right] \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

В силу того, что ряд сходится равномерно по ξ , можно изменять порядок суммирования и интегрирования. Введем функцию $G(x, \xi, t)$ и представим решение относительно функции $u(x,t)$ в виде:

$$u(x,t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right). \quad (4.17)$$

Функция $G(x, \xi, t)$ называется **функцией источника** или функцией температурного влияния мгновенного точечного источника тепла, которая отражает распределение температуры вдоль стержня $0 \leq x \leq l$ в момент времени t .

§ 4.5. Общая первая краевая задача

Определим распределение температуры $u(x, t)$ в стержне длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью и произвольными граничными условиями.

1. Постановка общей первой краевой задачи: найти функцию $u(x, t)$ определенную и непрерывную в рассматриваемой области изменения аргументов $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq t_0$ удовлетворяющую уравнению теплопроводности и следующим начальным и граничным условиям:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (\text{при } 0 < x < l, t > 0),$$

$$t = 0: u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$\begin{cases} x = 0: u(0, t) = \mu_1(t), \\ x = l: u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

2. Метод решения. Для решения задачи введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$ и заданную вспомогательную функцию $U(x, t)$ таким образом, чтобы на границах у функции $v(x, t)$ были нулевые граничные условия:

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t). \tag{4.18}$$

Подставим значение функции $u(x, t)$ в уравнение (4.7) и, учитывая условия (4.9), (4.10), запишем краевую задачу для функции $v(x, t)$ с нулевыми граничными условиями:

$$v_t - a^2 v_{xx} = \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_t - a^2 U_{xx}],$$

$$t = 0: v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0),$$

$$x = 0: v(0, t) = 0, \quad U(0, t) = \mu_1(t),$$

$$x = l: v(l, t) = 0, \quad U(l, t) = \mu_2(t).$$

3. Определим вспомогательную функцию $U(x, t)$ из выражения (4.18) с учетом граничных условий:

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)]. \quad (4.19)$$

Нахождение функции $u(x, t)$ из решения общей первой краевой задачи сведено к определению функции $v(x, t)$ с нулевыми граничными условиями.

Примечание. В качестве примера определим распределение температуры в стержне $u(x, t)$, концы которого поддерживаются при постоянных значениях температуры u_0 и u_1 :

$$x = 0: u(0, t) = u_0, \quad x = l: u(l, t) = u_1.$$

Запишем уравнение относительно функции $v(x, t)$ и определим вспомогательную функцию $U(x, t)$ с учетом граничных условий:

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t), \quad v_t = a^2 v_{xx} + f(x, t),$$

$$U(x, t) = u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0).$$

$$t = 0: v(x, 0) = \varphi(x); \quad x = 0: v(0, t) = 0, \quad x = l: v(l, t) = 0.$$

§ 4.6. Решение неоднородного уравнения теплопроводности

Определим распределение температуры $u(x,t)$ в стержне с теплоизолированной боковой поверхностью с учетом действия источников или стоков тепла $f(x,t) \neq 0$.

1. Общая первая краевая задача: найти функцию $u(x,t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области изменения аргументов $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq t_k$, удовлетворяющую неоднородному уравнению теплопроводности (4.7) и следующим начальным и граничным условиями (4.9), 4.10).

2. Рассмотрим случай, когда начальная температура стержня равна нулю и на границах поддерживается нулевая температура:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad (\text{при } 0 < x < l, t > 0),$$

$$t = 0: u(x,0) = \varphi(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (4.20)$$

$$x = 0: u(0,t) = \mu_1(t) = 0; \quad x = l: u(l,t) = \mu_2(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_k.$$

Данным способом можно определить влияние внешних источников или стоков тепла на физику нагрева стержня.

3. Решение. Будем искать решение задачи $u(x,t)$ в виде ряда Фурье, полагая, что коэффициенты ряда $u_n(t)$ являются функциями времени:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (4.21)$$

Для решения задачи представим функцию $f(x,t)$ в виде ряда Фурье:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi.$$

Подставим данное выражение и $u(x,t)$ из (4.21) в исходное уравнение (4.7) и после некоторых преобразований, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \left\{ \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}(t) - f(t) \right\} = 0.$$

Данный ряд равен нулю, когда все коэффициенты ряда равны нулю:

$$\dot{u}_n(t) + a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) = f_n(t). \quad (4.22)$$

Из начального условия (4.20) для функции $u(x,t)$ получим условие для определения $u_n(t)$:

$$t = 0: u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0, \quad u_n(0) = 0.$$

Из решения обыкновенного дифференциального уравнения (4.22) с нулевым начальным условием, находим функцию $u_n(t)$:

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau.$$

Подставляя данное выражение в формулу (4.21), получим решение неоднородного уравнения (4.7) в следующем виде:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (4.23)$$

4. Функция источника. Можно представить решение (4.23) через функцию источника. Для этого воспользуемся выражением для $f_n(\tau)$ и преобразуем решение (4.23):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \quad (4.24)$$

Функция $G(x, \xi, t)$ называется функцией источника или функцией температурного влияния источников или стоков тепла. Физический смысл функции $G(x, \xi, t)$ – распределение температуры в стержне, когда в момент времени t в точке $x = \xi$ выделяется или поглощается некоторое количество тепла.

Дополнение 1. Если начальное распределение температуры в стержне (4.20) не равно нулю

$$t = 0: u(x, 0) = \varphi(x) \neq 0, \quad 0 < x < l, \quad u_n(0) \neq 0,$$

то общее решение неоднородного уравнения (4.7) находится в виде функции (4.21). Коэффициенты ряда $u_n(t)$ определяются как сумма двух решений уравнения (4.22): однородного уравнения $u_n^{II}(t)$ (4.16) и частного решения неоднородного уравнения $u_n^I(t)$ (4.23):

$$u_n(t) = u_n^I(t) + u_n^{II}(t). \quad (4.25)$$

Решение однородного уравнения в (4.25) $u_n^{II}(t)$ определяется заданием начального условия:

$$u_n^{II}(t) = C_n e^{-a^2 \lambda t}, \quad C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi.$$

Дополнение 2. Рассмотрим случай, когда граничные условия не равны нулю:

$$x = 0: u(0, t) = \mu_1(t) \neq 0; \quad x = l: u(l, t) = \mu_2(t) \neq 0, \quad 0 \leq t \leq t_k.$$

Тогда применяется *метод решения общей первой краевой задачи*: искомая функция находится путем введения новой неизвестной функции $v(x, t)$ и вспомогательной $U(x, t)$ (4.19) так, чтобы на границах у функции $v(x, t)$ были нулевые граничные условия (4.18). Тогда получим, что

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$f_n(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{f}(\xi, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_t - a^2 U_{xx}].$$

§ 4.7. Задача на бесконечной прямой

1. Распространение тепла в неограниченном стержне. Рассмотрим изменение температуры в бесконечном стержне, расположенном вдоль оси x , с теплоизолированной боковой поверхностью и заданным начальным распределением температуры. Стержень считается неограниченным, когда условия на границах не оказывают влияние на явления, протекающие в рассматриваемой области.

2. Постановка задачи: найти функцию $u(x,t)$, определенную, непрерывную и ограниченную в рассматриваемой области изменения аргументов $(-\infty < x < \infty, t \geq 0)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности и заданному начальному условию (задача Коши):

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

$$t = 0: u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

3. Решение задачи определяется начальным условием и находится методом разделения переменных (см. § 3.6):

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0, \quad XT' = a^2 TX'' \quad (T' = \frac{dT}{dt}, X'' = \frac{d^2x}{dx^2}).$$

Разделим обе части равенства на $a^2 XT$ и получим два обыкновенных дифференциальных уравнения с параметром $\lambda = const$, представляющим собой вещественное число, изменяющееся в области $-\infty < \lambda < \infty$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2, \quad T' + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad X'' + \lambda^2 X = 0.$$

Решаем данные уравнения (см. § 4.4), и находим частное решение для искомой функции $u_\lambda(x,t)$ относительно параметра λ :

$$T(t) = C_1(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t}, \quad X(x) = C_2(\lambda) e^{\pm i \lambda x},$$

$$u_\lambda(x,t) = A(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i\lambda x}, \quad A(\lambda) = C_1(\lambda) C_2(\lambda).$$

Общее решение определим путем интегрирования по всем значениям параметра λ , но с учетом выполнения условия ограниченности решения нужно взять знак «плюс»:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda. \quad (4.26)$$

Постоянную $A(\lambda)$ находим из начального условия и обратного преобразования интеграла Фурье:

$$t = 0: u(x, 0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda,$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi.$$

Подставим данное значение $A(\lambda)$ в (4.26), изменим порядок интегрирования и получим:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi \right) e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda \right) \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл сводится к табличному значению [1]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}.$$

Тогда общее решение задачи запишется в следующем виде:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi. \quad (4.27)$$

Полученная формула (4.27) называется *интегралом Пуассона* для любой ограниченной функции.

2. Функция источника для неограниченной области. Можно представить решение задачи (4.28) через функцию источника:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (4.28)$$

Функцию $G(x, \xi, t)$ называют *фундаментальным решением* уравнения теплопроводности, функцией источника для неограниченной прямой и интегралом Пуассона для любой ограниченной функции. Функция источника удовлетворяет уравнению теплопроводности (4.8) относительно переменных x, t , что можно проверить непосредственным дифференцированием:

$$G_t = a^2 G_{xx}.$$

3. Физическая интерпретация функции источника.

С помощью формулы (4.29) определяется количество тепла вдоль оси x стержня в момент времени $t > t_0 \neq 0$, если начальное распределение температуры постоянно и равно $\varphi(x) = c\rho$:

$$c\rho \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - t_0) dx = \frac{c\rho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} =$$

$$= \frac{c\rho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = Q = c\rho. \quad (4.29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}, \quad \left(\alpha = \frac{x-\xi}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad d\alpha = \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} \right).$$

Видно, что функция источника представляет собой распределение температуры вдоль оси x в момент времени t , если в начальный момент времени $t = t_0$ в точке ξ выделяется определенное количество тепла $Q = c\rho$.

Выразим функцию источника $G(x, \xi, t - t_0)$ через аргумент $\theta = \sqrt{\alpha^2(t - t_0)}$:

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\theta}}.$$

Построим распределение данной функции вдоль оси x для разных значений θ (рисунок 4.2). Величина площади, ограниченная функцией источника и умноженная на $c\rho$, равна количеству тепла, подведенному к стержню в начальный момент времени (4.29). Отметим, что для различных значений аргумента θ количество тепла на неограниченной прямой не меняется с течением времени (выполняется закон сохранения энергии). Для малых значений времени $t - t_0 > 0$ почти все тепло сосредоточено в окрестности точки ξ , а в момент t_0 все количество тепла помещается в точке ξ .

Рассмотрим изменение температуры в точке $x = \xi + h$, с течением времени. При $x = \xi$, $h = 0$ функция источника будет иметь следующий вид:

$$G_{x=\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}.$$

С уменьшением θ температура в точке $x = \xi$ неограниченно возрастает (стремится к бесконечности). Если $x \neq \xi$ ($h \neq 0$), то функция источника представляется в виде произведения двух функций f_1 и f_2 :

$$G_{x \neq \xi} = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \right] e^{-\frac{h^2}{4\theta}} = f_1 f_2, \quad f_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}, \quad f_2 = e^{-\frac{h^2}{4\theta}}.$$

При больших θ первая функция $f_1 = 0$, а вторая $f_2 = 1$. При малых θ первая функция неограниченно возрастает $f_1 \rightarrow \infty$, а вторая $f_2 \rightarrow 1$. Поэтому функция источника $G_{x \neq \xi} \ll G_{x=\xi}$ для больших значений θ (рисунок 4.4). Чем меньше h (x ближе к ξ), тем больше вторая функция. Раскрывая неопределенность нетрудно видеть, что:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} G_{x \neq \xi} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \right] e^{-\frac{h^2}{4\theta}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}}}{\frac{h^2}{4\theta^2} e^{\frac{h^2}{4\theta}}} = 0.$$

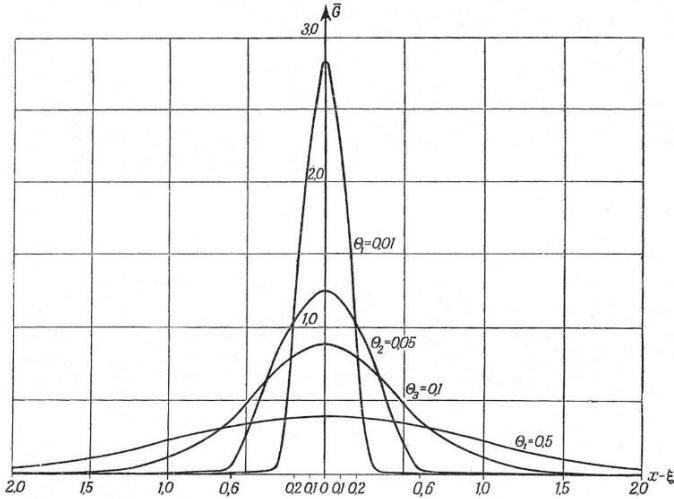


Рисунок 4.2 – Распределение функции источника по оси x для различных значений времени $\theta = \sqrt{\alpha^2(t - t_0)}$

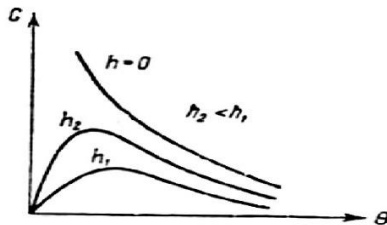


Рисунок 4.3 – Распределение функции источника по оси $\theta = \sqrt{\alpha^2(t - t_0)}$ для различных значений $h = x - \xi$

Примечание. Функции источника G показывает, что в любой точке x температура, создаваемая мгновенным точечным источником в начальный момент $t = 0$, отлична от нуля для сколь угодно малых моментов времени. Подобный факт можно интерпретировать как результат распространения температуры с бесконечной скоростью. Однако это противоречит молекулярно-кинетическим представлениям о природе тепла и связано с тем, что при выводе уравнения теплопроводности использовались феноменологические представления о распространении тепла, а не учитывались инерционные свойства движения молекул [1].

§ 4.8. Задача без начальных условий

При изучении процессов распространения тепла достаточно удаленных от начального момента времени, влияние начальных условий заметно снижается на распределении температуры и основную роль начинают играть условия на границах. То же самое происходит при воздействии периодических граничных условий.

В качестве примера рассмотрим задачу об изменении температуры в полубесконечном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, если на границе температура меняется по заданному гармоническому закону.

1. Постановка задачи: найти решение уравнения теплопроводности в области $t > 0$, удовлетворяющее заданному периодическому граничному условию:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ x = 0: \quad u(0, t) = \mu(t) = A \cos \omega t = \operatorname{Re}(Ae^{i\omega t}), \quad (4.30)$$

где A – амплитуда периодического изменения температуры с частотой ω ; коэффициент температуропроводности a задан ($a^2 = k/\rho c$); функция $u(x, t)$ ограничена и однозначна.

2. Решение уравнения теплопроводности (4.30)

находится в виде следующей функции:

$$u(x, t) = Ae^{\alpha x + \beta t}, \quad (4.31)$$

где α и β – коэффициенты определяются путем подстановки выражения (4.31) в уравнение теплопроводности и в граничное условие (4.30):

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad Ae^{\alpha x + \beta t} \beta = a^2 Ae^{\alpha x + \beta t} \alpha^2, \quad \alpha^2 = \frac{1}{a^2} \beta;$$

$$x = 0: u(0, t) = Ae^{i\omega t} = Ae^{\beta t}, \quad \beta = i\omega.$$

Коэффициент α после некоторых преобразований приводится к следующему виду:

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \sqrt{i} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = \pm \left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \right].$$

Подставим полученные значения коэффициентов α и β в формулу (4.31), сгруппируем слагаемые с действительной и мнимой частью, и получим следующее выражение:

$$u(x, t) = Ae^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + i \left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right)}.$$

Действительная часть решения $Re(u(x, t))$ будет равна:

$$u(x, t) = Ae^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos \left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right).$$

Данное выражение удовлетворяет уравнению теплопроводности и граничному условию (4.30). Данное выражение определяет решение двух функций, в зависимости от выбора знака плюс или минус:

1) знак минус удовлетворяет требованию ограниченности и однозначности решения;

2) со знаком плюс решение расходится с увеличением координаты x .

Таким образом, решение задачи, определяющее распределение температуры при периодическом воздействии граничного условия, можно представить в следующем виде:

$$u(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right). \quad (4.32)$$

3. Температурные волны. Задача о распространении температурных волн в почве является одним из примеров приложения математической теории теплопроводности, которую впервые применил Фурье к изучению периодических температурных колебаний почвы Земли.

Изменения температуры на поверхности земли носит ярко выраженную суточную и годовую периодичность. Поэтому граничное условие на поверхности земли может быть представлено в виде гармонической функции (4.30) с амплитудой A , которая представляет собой температуру в данный момент времени с суточной или годовой периодичностью с частотой колебания ω . Подобная постановка соответствует задаче без начальных условий, так как при многократном повторении температурного режима на поверхности земли влияние начального распределения температуры становится несущественным.

Для определения распространения температуры в однородном полупространстве почвы ($0 \leq x < \infty$) при воздействии периодических температурных колебаний на поверхности земли, воспользуемся методом решения уравнения теплопроводности для полубесконечного стержня с граничным условием (4.30).

В результате решения (4.32) установлено, что при периодическом изменении температуры на поверхности

земли, в глубине почвы устанавливаются затухающие колебания температуры с определенном периодом (рисунок 4.4). При сравнении распространения температурной волны в глубину Земли (4.32) с экспериментальными данными, Фурье установил следующие три закона.

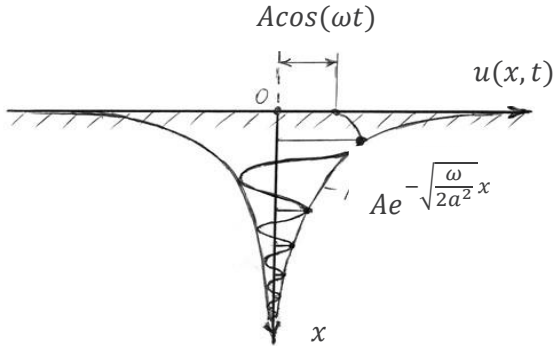


Рисунок 4.4 – Изменение температуры почвы с поверхности в глубину Земли

1. Первый закон Фурье. Амплитуда колебаний температуры в глубину Земли экспоненциально уменьшается с увеличением расстояния x :

$$A(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}.$$

Причем глубина x растет в арифметической прогрессии, а амплитуда колебания температуры $A(x)$ убывает экспоненциально – в геометрической прогрессии.

2. Второй закон Фурье. Температурные колебания в почве происходят со сдвигом фазы. Время запаздывания максимумов и минимумов температуры в глубину Земли $\delta(x)$ пропорционально x :

$$\delta(x) = \frac{x}{a\sqrt{2\omega}}.$$

3. Третий закон Фурье. Глубина проникновения тепла в глубину почвы x зависит от периода изменения температуры на поверхности Земли $T = 2\pi/\omega$. Относительное изменение температурной амплитуды равно:

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} = e^{-\sqrt{\frac{\pi}{Ta^2}}x}.$$

Из выражения видно, что чем меньше период колебания температуры на поверхности Земли, тем меньше температура проникает в глубину Земли:

$$T \rightarrow 0, A(x) = Ae^{-\infty} \rightarrow 0.$$

Для температурных колебаний с периодами одни сутки T_1 или один год T_2 расстояния в глубину Земли x_1 и x_2 , на которых происходит относительно одинаковое изменение температуры, связаны между собой соотношением:

$$x_2 = x_1\sqrt{T_2/T_1}.$$

Сравнение суточных ($T_1 = 1$ день) и годовых ($T_2 = 365$ дней) колебаний температуры почвы показывает, что

$$x_2 = x_1\sqrt{365} = 19,1 x_1.$$

Видно, что глубина проникновения годовых колебаний температуры в почву при одинаковой амплитуде колебания на поверхности Земли в 19,1 раза больше глубины проникновения суточных колебаний.

Примечание. В качестве примера в работе [1] приводятся результаты наблюдений за годовыми температурными колебаниями почвы на научной станции Гош в Приамурье (таблица 1).

Таблица 1 – Годовые температурные колебания почвы [1]

| Глубина, м | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------|------|------|-----|-----|-----|
| Амплитуда, °С | 19,5 | 11,5 | 6,8 | 4,2 | 2,6 |

Видно, что амплитуда годовых колебаний температуры на глубине 4 м уменьшается до 13,3 % от своего значения на поверхности Земли, а время запаздывания максимальной температуры достигает 4 месяцев.

Определим коэффициент a почвы в уравнении теплопроводности. Для этого рассмотрим относительное максимальное изменение амплитуды колебания температуры с удалением от поверхности Земли:

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}, \quad \ln\left(\frac{A(x)}{A}\right) = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x,$$

$$a^2 = \frac{\omega x^2}{2 \ln^2\left(\frac{A(x)}{A}\right)}, \quad a = \frac{x \sqrt{\omega}}{\sqrt{2} \ln\left(\frac{A(x)}{A}\right)}.$$

Например, для сухой почвы коэффициент a будет равен $0,06 \text{ см}/\sqrt{\text{сек}}$.

Примечание. Наличие влаги влияет на температурные изменения в почве, что отражается в коэффициентах уравнения. При замерзании происходит выделение скрытой теплоты, которую необходимо учитывать при выводе уравнения теплопроводности.

Практическое занятие № 4

Лекции 11–13

Глава 5. Уравнения эллиптического типа

Рассматриваются уравнения эллиптического типа, постановка краевых задач и методы решения

Уравнения эллиптического типа описывают стационарные и установившиеся физические процессы колебаний, переноса тепла и диффузии частиц. Наиболее простыми и распространенными уравнениями эллиптического типа являются уравнения Лапласа и Пуассона:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u = f.$$

Операторы Лапласа в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат имеют вид [12]:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right).$$

Аналитические решения уравнений эллиптического типа сводятся к гармоническим, цилиндрическим, сферическим и другим специальным функциям.

§ 5.1. Задачи, приводящиеся к уравнению эллиптического типа

1. Стационарное тепловое поле. Распределение температуры нестационарного теплового поля удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности в частных производных второго порядка:

$$u_t = a^2 \Delta u + f. \quad (5.1)$$

Если протекающие физические процессы установившиеся, стационарные, то распределение температуры $u = u(x, y, z)$ не меняется с течением времени, и уравнение (5.1) сводится к **уравнению Пуассона** при наличии источников или стоков тепла ($f \neq 0$) или к **уравнению Лапласа** при $f = 0$:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow 0, \quad \Delta u = -\frac{f}{a^2}, \quad \Delta u = 0. \quad (5.2)$$

2. Установившиеся колебания. Широкий класс задач, связанный с изучением механических, акустических, электромагнитных и других колебаний определяется из решения *волнового уравнения* гиперболического типа:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f. \quad (5.3)$$

При рассмотрении стационарных и установившихся колебаний, данные уравнения сводятся к уравнениям эллиптического типа – уравнениям Пуассона или Лапласа:

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow 0, \quad \Delta u = -\frac{f}{a^2}, \quad \Delta u = 0. \quad (5.4)$$

3. Колебание мембраны. Рассмотрим в качестве примера мембрану, совершающую колебания под действием заданных периодических сил:

$$F = F_0(x, y) \cos \omega t = F_0(x, y) \operatorname{Re}(Ae^{i\omega t}).$$

Уравнение (5.3) в этом случае запишется так:

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} - f_0(x,y)e^{i\omega t}, \quad f_0 = \frac{F_0}{\rho}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}.$$

Для установившихся гармонических колебаний, решение данного уравнения ищется в следующем виде:

$$u(x,y,z,t) = v(x,y,z)e^{i\omega t},$$

где амплитуда установившихся колебаний $v(x,y,z)$ определяется из решения следующего уравнения:

$$\Delta v + k^2 v = -f_0(x,y), \quad \left(k = \frac{\omega}{a}\right). \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) при $k = 0$ соответствует уравнению Пуассона, а при $k = 0$, $f_0(x,y) = 0$ – уравнению Лапласа. Для решения уравнения (5.5) задается граничное условие закрепления мембраны по её границе Σ :

$$v|_{\Sigma} = 0.$$

Если контур мембраны не закреплен, а совершает периодические колебания с частотой ω_0 , то функция v на границе контура Σ имеет следующее неоднородное граничное условие:

$$u(x,y,z,t)|_{\Sigma} = v_0(x,y,z)e^{i\omega_0 t}, \quad v|_{\Sigma} = v_0.$$

§ 5.2. Постановка краевых задач

Определим распределение температуры внутри какого-либо тела объемом V , ограниченного поверхностью Σ (рисунок 5.1) с учетом источников или стоков тепла $f(x,y,z)$.

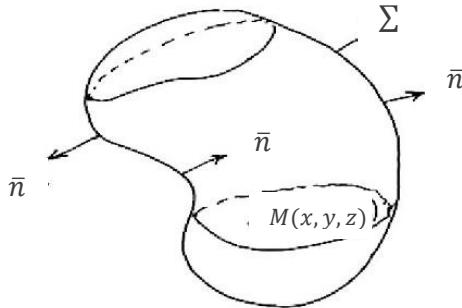


Рисунок 5.1 – Распределение температуры в точке $M(x, y, z)$ внутри тела, ограниченного поверхностью Σ ;
 n – нормаль к поверхности

Постановка задачи: найти непрерывную дифференцируемую функцию $u = u(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа или Пуассона и заданному граничному условию на поверхности Σ :

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u = -f(x, y, z),$$

В зависимости от рассматриваемых физических процессов, постановка краевых задач может быть представлена в одном из следующих видов:

I $u = f_1|_{\Sigma}$ (первая краевая задача);

II $\frac{du}{dn} = f_2|_{\Sigma}$ (вторая краевая задача);

III $(\frac{du}{dn} + h(u - f_3))|_{\Sigma} = 0$ (третья краевая задача),

где f_1, f_2, f_3 – заданные функции; $\frac{du}{dn}$ – производная по внешней нормали n к поверхности Σ . Первая краевая задача для уравнений Лапласа или Пуассона называется *задачей Дирихле*, а вторая краевая задача – *задачей Неймана*.

Если ищется решение во внутренней или внешней областях рассматриваемого объема V по отношению к поверхности Σ , то соответствующие задачи называются **внутренней** или **внешней** краевыми задачами.

§ 5.3. Фундаментальные решения уравнения Лапласа

Большой интерес в различных областях физики представляют собой решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией.

1. Сферическая симметрия. Решение уравнения Лапласа в пространстве, обладающее сферической симметрией $u(r)$, определяется из обыкновенного дифференциального уравнения, так как в силу симметрии, в операторе Лапласа производные по φ и θ равны нулю:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0.$$

Интегрируя дважды данное уравнение, находим распределение функции в сферическом пространстве:

$$r^2 \frac{du}{dr} = C_1, \quad u = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Полагая, например, $C_1 = -e$, $C_2 = 0$, запишем полученное решение в следующем виде:

$$u(r) = -\frac{e}{r}, \quad (5.6)$$

которое называется *фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве*. С точностью до множителя данное решение совпадает с потенциалом поля точечного

электрического или гравитационного зарядов e , помещенных в начале координат. Причем данная функция удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме начала координат $r = 0$, где она обращается в бесконечность. Поэтому, при определении физически реальных решений, нужно в области изменения аргумента ($r_0 \leq r < \infty$) учитывать размеры точечных электрических или гравитационного зарядов r_0 .

2. Цилиндрическая симметрия. Из уравнения Лапласа найдем решение на плоскости, обладающее цилиндрической или полярной симметрией относительно переменной $r = \rho$. В этом случае в операторе Лапласа производные от двух независимых переменных θ, z или от переменной θ равны нулю, и определение функции сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = 0, \quad \rho \frac{du}{d\rho} = C_1, \quad u(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2.$$

Выбираем постоянные интегрирования в виде $C_1 = -2e_1$ и $C_2 = 0$, запишем решение в таком виде:

$$u(\rho) = 2e_1 \ln \frac{1}{\rho}.$$

Функцию $u(\rho)$ называют *фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости*. Функция $u(\rho)$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки в начале координат $\rho = 0$, где она обращается в бесконечность. Функция $u(\rho)$ с точностью до множителя совпадает с потенциалом поля электрически заряженной линии с плотностью электрического заряд e_1 , рассчитанного на единицу длины. Поэтому при решении в области изменения аргумента ($r_0 \leq \rho < \infty$) нужно задавать размеры электрически заряженной проволоочки r_0 .

§ 5.4. Гармонические и аналитические функции

Определим связь между гармоническими функциями, которые являются решениями двумерного уравнения Лапласа и аналитической функцией комплексного переменного. Пусть аналитическая функция комплексного переменного ($z = x + iy$) равна:

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

где действительная часть $Re f(z) = u(x,y)$ и мнимая часть $Im f(z) = v(x,y)$ являются вещественными функциями действительных переменных x и y . Производную аналитической функции запишем в следующем виде:

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Приращение комплексной переменной $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, очевидно, может стремиться к нулю двумя путями по x , y или по u, v . Поскольку производная аналитической функции не зависит от выбора пути по x и y :

$$w_x = u_x + iv_x = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_x = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad w_y = u_y + iv_y = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_y = i \frac{\partial w}{\partial z},$$

то из равенства значений производных по x и y , имеем:

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Приравнявая действительную и мнимую части слагаемых, получим необходимые и достаточные условия существования аналитической функции, которые называются условиями Эйлера – Даламбера или Коши – Римана:

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (5.7)$$

В теории функций комплексного переменного доказано, что аналитическая функция в плоскости $z = x + iy$ имеет производные всех порядков и разлагается в степенной ряд. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют непрерывные производные 2-го порядка по x и y . Дифференцируя первое равенство (5.7) по x , а второе по y и складывая их, получим:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \Delta u = 0.$$

Подобным образом, меняя порядок дифференцирования функций в условиях Коши–Римана (5.7), находим:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \Delta v = 0.$$

Действительная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа и являются самосопряженными гармоническими функциями. Таким образом, для решения уравнения Лапласа можно применять теорию функции комплексного переменного.

Примечание. Следует отметить, что каждая аналитическая функции является гармонической, так как её действительная $Re f(z) = u(x, y)$ и мнимая $Im f(z) = v(x, y)$ части удовлетворяют уравнению Лапласа, но не всякая гармоническая функция является аналитической.

§ 5.5. Решение краевой задачи для круга

Решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа или Пуассона сводятся к степенным или специальным функциям, когда область изменения аргументов представляет собой сферу, цилиндр или другие геометрические конфигурации.

Проведем решение уравнения Лапласа на примере краевой задачи для круга.

1. Первая краевая задача Дирихле для круга: найти непрерывную дифференцируемую функцию $u(\rho, \varphi)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа внутри круга и заданному граничному условию.

В задачах для круга удобно пользоваться полярной системой координат ρ, φ с началом в центре круга и радиусом $\rho = a$, а общее решение уравнения Лапласа следует рассматривать для внутренней ($0 \leq \rho \leq a$) и внешней ($a \leq \rho < \infty$) задачи Дирихле.

Запишем уравнение Лапласа и граничное условие в полярных координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad u(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=a} = f(\varphi). \quad (5.8)$$

Полагаем, что заданная функция $f(\varphi)$ непрерывна и дифференцируема на границе круга.

2. Решение методом разделения переменных (метод Фурье). Представим функцию $u(\rho, \varphi)$ в виде произведения двух функций: $R(\rho)$ и $\Phi(\varphi)$:

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \neq 0.$$

Подставим данное решение в уравнение (5.8), и в результате математических преобразований получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right)}{\frac{R}{\rho}} = - \frac{\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}{\Phi} = \lambda = const.$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \lambda \Phi = 0, \quad \Phi \neq 0; \quad \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \lambda R = 0, \quad R \neq 0. \quad (5.9)$$

Решение первого уравнения для $\lambda > 0$ имеет следующий вид (см. § 3.6):

$$\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B \sin \sqrt{\lambda} \varphi.$$

Поскольку функция $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ является периодической функцией с периодом 2π , то при изменении угла φ , однозначная функция $u(\rho, \varphi)$ возвращается к исходному значению (условие периодичности):

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi).$$

Это возможно при значениях $\sqrt{\lambda} = n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ – целое число. Тогда частное решение запишется так:

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n \varphi + B_n \sin n \varphi.$$

Решение для функции $R(\rho)$ будем искать в виде степенной функции:

$$R(\rho) = \rho^\mu.$$

Подставляя данное выражение в уравнение (5.9) и сокращая на ρ^μ , получим:

$$n^2 = \mu^2, \quad \mu = \pm n, \quad (n > 0).$$

Следовательно, общее решение уравнения (5.9) запишется так:

$$R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n},$$

где C и D – постоянные интегрирования.

1. Для решения **внутренней задачи** ($0 \leq \rho \leq a$) необходимо положить значение $\mu = +n$, $D = 0$, иначе при $D \neq 0$ функция $u = R(\rho)\Phi(\varphi)$ обращается в бесконечность в начале координат ($\rho = 0$). Тогда решение будет иметь вид:

$$R(\rho) = C\rho^n.$$

2. Для решения **внешней задачи** ($a \leq \rho < \infty$) нужно взять $\mu = -n$, $C = 0$, иначе решение внешней задачи будет неограниченно возрастать при увеличении аргумента: $\rho \rightarrow \infty$, $u = R(\rho)\Phi(\varphi) \rightarrow \infty$:

$$R(\rho) = D\rho^{-n} = D\frac{1}{\rho^n}.$$

Таким образом, частные решения для внутренней и внешней задач будут равны:

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad 0 \leq \rho \leq a;$$

$$u_n(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad a \leq \rho < \infty.$$

Общее решение краевой задачи будет выражено в виде ряда:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) -$$

для внутренней задачи,

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) -$$

для внешней задачи.

Для определения коэффициентов ряда Фурье A_n и B_n воспользуемся граничным условием (5.8) при $\rho = a$:

$$u_n(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f, \quad (5.10)$$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f.$$

Считая, что f заданная функция угла φ , запишем ее разложение в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \quad (5.11)$$

Коэффициенты ряда Фурье будут равны:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi \quad (n = 1, 2, \dots, \infty).$$

Сравнивая выражения (5.10) и (5.11), получим значения коэффициентов ряда Фурье:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \quad A_0 = \frac{\beta_n}{a^n} \quad (\text{для внутренней задачи}),$$

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \alpha_n a^n, \quad B_n = a^n \beta_n \quad (\text{для внешней задачи}).$$

Таким образом, общее решение **внутренней и внешней** краевых задач для круга запишутся в виде следующих выражений:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \quad (5.12)$$

Данные решения задачи Дирихле для круга, полученные в виде двух рядов Фурье, можно представить в виде следующей обобщенной формулы:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) + \frac{\alpha_0}{2},$$

$$b = \begin{cases} \frac{\rho}{a} \leq 1, & \rho \leq a \quad (\text{внутренняя задача}), \\ \frac{a}{\rho} \leq 1, & \rho \geq a \quad (\text{внешняя задача}). \end{cases}$$

§ 5.6. Бигармоническое уравнение

Рассмотрим некоторые задачи, приводящиеся к бигармоническим уравнениям:

1. Дифференциальное уравнение, описывающее малые поперечные колебания стержня или балки, закрепленные

шарнирно и расположенные на упругом основании, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

2. Колебания тонкой пластинки, свободной от нагрузки и закрепленной по краям, приводится к решению бигармонического уравнения с заданным граничным и начальным условиями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \Delta \Delta u = 0.$$

3. Если на пластинку действует внешняя сила плотностью $f(x, y)$, то колебания закрепленной по краям пластинки будет определяться уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \Delta \Delta u = f.$$

В стационарном случае при $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, данные уравнения приводятся к следующим бигармоническим уравнениям:

$$\Delta \Delta u = 0, \quad \Delta \Delta u = f.$$

3. Постановка задачи: найти функцию $u = u(x, y, t)$, непрерывную в замкнутой области V , имеющую производные до 4-го порядка включительно, удовлетворяющую бигармоническому уравнению, заданным начальным и граничным условиям на поверхности Σ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \Delta \Delta u = 0; \tag{5.13}$$

$$u|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = 0 \quad (n = x, y); \quad t = 0: u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y).$$

Решение краевой задачи проводим методом разделения переменных. Для этого функцию $u = u(x, y, t)$ представим в виде произведения двух функций: $u(x, y, t) = v(x, y)T(t) \neq 0$. Подставим данное выражение в уравнение (5.13), разделим переменные и получим следующие два уравнения относительно неизвестных функций $v(x, y)$ и $T(t)$:

$$v \frac{d^2 T}{dt^2} + a^2 T \Delta \Delta v = 0, \quad - \frac{T''}{a^2 T} = \frac{\Delta \Delta v}{v} = \lambda,$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0, \quad \Delta \Delta v - \lambda v = 0.$$

Решаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $T(t)$ (см. методика § 3.6):

$$T(t) = e^{\kappa t}, \quad \kappa^2 + a^2 \lambda = 0, \quad \lambda > 0,$$

$$\kappa_{1,2} = \pm \sqrt{-a^2 \lambda} = \pm i \sqrt{a^2 \lambda} = \pm i \omega_n,$$

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t), \quad \omega_n = \sqrt{a^2 \lambda},$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные, определяемые из заданных начальных условий. Далее приходим к задаче на отыскание собственных значений бигармонического уравнения относительно функций $v(x, y)$ при заданных граничных условиях (5.13):

$$\Delta \Delta v - \lambda v = 0, \quad v|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Sigma} = 0.$$

Решение уравнения ищется в виде двойного ряда Фурье:

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right).$$

Область изменения V представляет собой прямоугольник со сторонами (a, b) изменения аргументов $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$; A_{nm} – коэффициенты ряда находятся из обратного

преобразования Фурье. Таким образом, решение нестационарной задачи бигармонического уравнения будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= v(x, y)T(t) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi my}{b}\right) \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\omega_n t) + \\
 &\quad + \sin(\omega_n t)).
 \end{aligned}$$

Практическое занятие № 5

Лекции 14–16

Глава 6. Специальные функции

Рассматриваются некоторые специальные функции, которые следуют из решения дифференциальных уравнений второго порядка для областей в виде прямой, круга, прямоугольника, шара или цилиндра

§ 6.1. Интеграл ошибок

Интеграл ошибок (функция ошибок Гаусса или интеграл вероятности) – функция, которая широко применяется в теории вероятности, статистике, теории дифференциальных уравнений, в математическом анализе, математической физике и теории обработки сигналов.

Примечание. Впервые интеграл от функции ошибок Гаусса использовался в 1729 г. Эйлером, затем Пуассоном и поэтому он еще называется интеграл Эйлера–Пуассона.

В качестве примера применения интеграла ошибок рассмотрим задачу о распределении температуры в неограниченном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью и заданным начальным условием (рисунок 6.1).

Решение. Располагаем стержень вдоль оси x . Коэффициент температуропроводности a определяется из справочника.

Постановка задачи: найти ограниченную функцию $u(x, t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области изменения аргументов ($-\infty < x < \infty, t \geq 0$), удовлетворяющую однородному уравнению теплопроводности и заданному начальному распределению температуры (рисунок 6.1):

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$t = 0: u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 = \text{const}, & x > 0, \\ T_2 = \text{const}, & x < 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

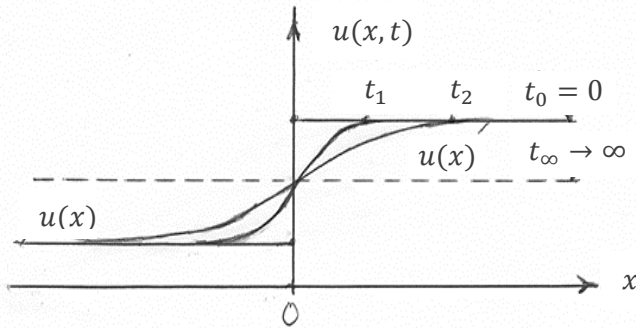


Рисунок 6.1 – Распределение температуры $u(x, t)$ вдоль оси x в неограниченном стержне в моменты времени: $t = 0, t = t_1, t = t_2, t \rightarrow \infty$

На основе формулы (4.28) определяется изменение температуры в бесконечном (неограниченном) стержне при заданном начальном условии (6.1):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Для упрощения вычисления данных интегралов вводятся новые переменные: $\alpha = (x - \xi)/2\sqrt{a^2 t}$, $z = x/2\sqrt{a^2 t}$. Путем преобразования интегральных выражений общее решение задачи запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\alpha^2} d\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha, \\ u(x,t) &= \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{T_1-T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{T_1-T_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha = \\ &= \frac{T_1+T_2}{2} \left(1 + \frac{T_1-T_2}{T_1+T_2} \Phi(z)\right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Профиль температуры (6.2) в заданный момент t и в любой точки x определяется функцией $\Phi(z)$, которая называется **интегралом ошибок** или специальной функцией ошибок, где переменная z представляет абсциссу точки, в которой определяется температура:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha = \operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-z^2} dz, \quad (6.3)$$

В специальной литературе существуют таблицы и графики интеграла ошибок (рисунок 6.2). Из решения уравнения (6.2) видно, что в точке $x = 0$ для моментов времени $t \rightarrow \infty$, переменная $z = 0$, а функция $\Phi(0) = 0$. Поэтому в этой точке температура постоянна и равна половине суммы T_1 и T_2 :

$$u(0,t) = (T_1 + T_2)/2.$$

При фиксированном моменте времени $t = t_0$ и на значительном удалении вдоль оси x ($x \rightarrow \infty$, $\Phi(x) \rightarrow 1$, $\Phi(\infty) = 1$) распределение температуры стремится к T_1 : $u(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow T_1$.

При $x \rightarrow -\infty$, $\Phi(x) \rightarrow -1$, $\Phi(-\infty) = -1$ температура стремится к T_2 : $u(x \rightarrow -\infty, t) \rightarrow T_2$. При $t \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow \pm\infty$ температура достигает половины суммы T_1 и T_2 :

$$u(t \rightarrow \infty, x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow (T_1 + T_2)/2.$$

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-z^2) dz$$

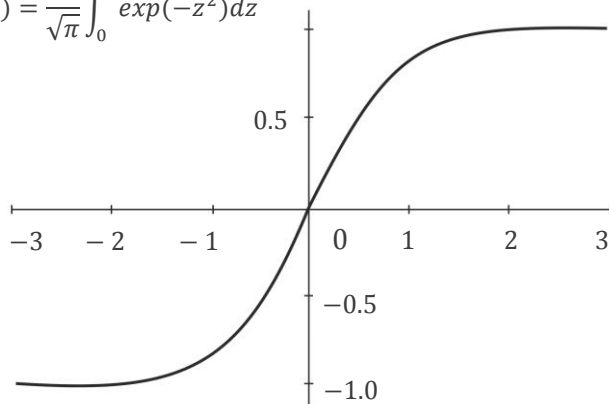


Рисунок 6.2 - График изменения функции ошибок
(рисунок из интернета)

§ 6.2. Распространение тепла в неограниченном пространстве

1. Определим распределение температуры в неограниченном пространстве с учетом непрерывно действующего сферически симметричного теплового источника. Например, это может быть сферическая вольфрамовая спираль, которая выделяет определенное количество тепла при прохождении электрического тока (закон Джоуля Ленца).

Постановка задачи: найти функцию $u = u(x, y, z, t)$ из решения однородного уравнения теплопроводности с учетом источника тепла и заданного начального условия:

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad t > 0,$$

$$t = 0: u(x, y, z, 0) = 0. \quad (6.4)$$

2. Решение уравнения теплопроводности (6.4) в неограниченном однородном и изотропном пространстве проводится в сферической системе координат. Непрерывно действующий заданный тепловой источник располагается в начале координат. Тогда, вследствие симметрии задачи распределение температуры будет определяться функцией: $u = u(r, t)$.

Запишем уравнение теплопроводности (6.4) в переменных r, t :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial (ru)}{\partial t}.$$

Наличие теплового источника при $r = 0$ приводит к тому, что в единицу времени через любую поверхность сферы Σ в окружающее пространство распространяется тепловой поток мощностью q . Производная по нормали для сферы будет равна производной по радиальной координате ($\partial u / \partial n = \partial u / \partial r$):

$$-k \frac{\partial u}{\partial r} 4\pi r^2 |_{\Sigma} = q, \quad -\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{q}{4\pi k r^2}, \quad u = \frac{q}{4\pi k r}.$$

Из данного выражения следует, что производная и функция $u = u(r, t)$ в начале координат ($r = 0$) имеет особенности типа $\sim 1/r^2$ и $\sim 1/r$. Для устранения данных особенностей введем функцию $v(r, t) = ru(r, t)$, которая ограничена в начале координат, удовлетворяет уравнению теплопроводности и заданным начальным и граничным условиям:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

$$t = 0, r \neq 0: u(r, 0) = 0, v(r, 0) = 0; \quad r = 0: v(0, t) = \frac{q}{4\pi k} = v_0.$$

Решение данного уравнения при постоянном значении q выражается через специальную функцию – **интеграл ошибок** (6.2):

$$v(r, t) = v_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{r}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right] = \frac{q}{4\pi k} \int_z^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

$$\alpha = \frac{r - \xi}{2\sqrt{a^2 t}}, \quad z = \frac{r}{2\sqrt{a^2 t}}.$$

Тогда распространение температуры в неограниченном пространстве ($r > 0$) от непрерывно действующего источника мощностью q , помещенного в начале координат, будет иметь вид:

$$u(r, t) = \frac{q}{2\pi k r \sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{q}{2\pi k r} \left[1 - \Phi \left(\frac{r}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right].$$

§ 6.3. Колебания круглой мембраны

Рассмотрим колебания круглой мембраны с жестко закрепленными краями (рисунок 6.3). Для решения задачи воспользуемся полярной системой координат r, θ .

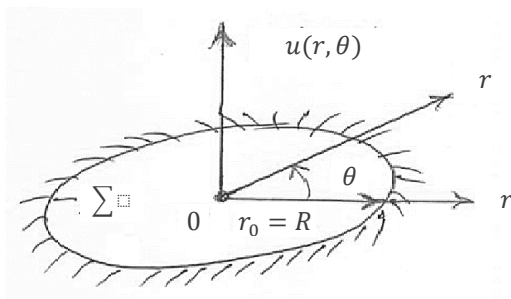


Рисунок 6.3 – Круглая мембрана радиуса $r_0 = R$ с закрепленными границами Σ

Постановка задачи: определить функцию $u = u(r, \theta, t)$ в рассматриваемой области ($t \geq 0$, $0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$), удовлетворяющую уравнению колебаний (5.3) и заданным начальным и граничным условиям:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$t = 0: \begin{cases} u(r, \theta, 0) = f_1(r, \theta), \\ u_t(r, \theta, 0) = f_2(r, \theta), \end{cases} \quad r = r_0: u(r_0, \theta, t) = 0. \quad (6.5)$$

Решение уравнения (6.5) находим методом разделения переменных (см. § 3.6). Для этого функцию $u(r, \theta, t)$ представим через произведение двух функций $v(r, \theta), T(t)$:

$$u(r, \theta, t) = v(r, \theta)T(t) \neq 0.$$

Подставим данную функцию в уравнение (6.5), возьмем производные по заданным переменным, разделим слагаемые на $v(r, \theta)T(t)$, и в результате преобразований получим:

$$\frac{1}{vr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{vr^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{1}{Ta^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\lambda = \text{const.}$$

Определение функции $T(t)$. Запишем решение задачи для значения параметра $\lambda > 0$:

$$T(t) = C_1 \cos \sqrt{a^2 \lambda} t + C_2 \sin \sqrt{a^2 \lambda} t.$$

Сделаем постановку **вспомогательной задачи**: найти однозначную, непрерывную и периодическую функцию $v(r, \theta)$, удовлетворяющую уравнению (6.5) и заданным граничным условиям:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \lambda v = 0, \quad (0 < r < r_0),$$

$$r = r_0: v(r_0, \theta) = 0, \quad |v(0, \theta)| < \infty,$$

$$v(r, \theta) = v(r, \theta + 2\pi n), \quad n = 1, 2, \dots, \infty.$$

Решение задачи находим методом разделения переменных относительно функции $v(r, \theta)$, которую представим в виде произведения двух функций $R(r)$, $\Theta(\theta)$:

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \neq 0.$$

Подставим данную функцию в дифференциальное уравнение и в результате математических преобразований получим:

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{d^2 \Theta}{\Theta} + \lambda r^2 = 0.$$

Определение функции $\Theta(\theta)$. Запишем уравнение и граничные условия относительно функции $\Theta(\theta)$ в таком виде:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \mu^2 \Theta = 0; \quad \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi), \quad \Theta'(\theta) = \Theta'(\theta + 2\pi).$$

Нетривиальные периодические решения для $\Theta(\theta)$ существуют лишь при значениях $\mu^2 = n^2$ ($\mu = \pm n$, где целое число $n = 1, 2, \dots, \infty$):

$$\Theta_n(\theta) = D_{1n} \cos n\theta + D_{2n} \sin n\theta.$$

Определяем функцию $R(r)$. Запишем уравнение и однородные граничные условия относительно функций $R(r)$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{r^2} \right) R = 0; \quad R(r_0) = 0, \quad |R(0)| < \infty,$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0.$$

Функцию $R(r)$ находим из решения задачи о собственных значениях. Условие ограниченности, налагаемое на функцию $R(r)$, связано с наличием особой точки в начале координат ($r = 0$). Введём новую переменную x и следующую функцию $y(x)$:

$$x = \sqrt{\lambda} r, \quad R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) = y(x).$$

В результате преобразований получим дифференциальное уравнение, которое в специальной литературе называется **уравнением Бесселя** n -го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0;$$

$$y(x_0) = 0, \quad x_0 = \sqrt{\lambda} r_0, \quad |y(0)| < \infty.$$

Общее решение уравнения Бесселя имеет следующий вид:

$$y(x) = d_1 J_n(x) + d_2 N_n(x),$$

где $J_n(x)$ – цилиндрические функции Бесселя n -го порядка 1 рода; $N_n(x)$ – цилиндрические функции Бесселя n -го 2-го рода или функция Неймана. Из условия ограниченности решения $|y(0)| < \infty$ следует, что постоянная $d_2 = 0$:

$$r = 0: J_0(0) = 1, \quad J_{n+1}(0) = 0; \quad N_n(0) = -\infty; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из граничного условия определим собственные значения параметра λ :

$$J_n(x_0) = J_n(\mu_n) = 0, \quad x_0 = \mu_n = \sqrt{\lambda} r_0, \quad \mu_0 = 2,405, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\mu_n}{r_0},$$

$$y(x) = d_1 J_n(x) = R(r) = d_1 J_n(\sqrt{\lambda} r) = d_1 J_n\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right).$$

Собственные колебания круглой мембраны будут определяться следующим выражением:

$$u(r, \theta, t) = v(r, \theta) T(t),$$

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \Theta(\theta) J_n\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right),$$

$$\Theta(\theta) = D_{1n} \cos n\theta + D_{2n} \sin n\theta, \quad \omega_n = a\sqrt{\lambda} = a \frac{\mu_n}{r_0}.$$

Постоянные $A_n = d_1 C_1$, $B_n = d_1 C_2$ находятся из начальных условий (6.5).

§ 6.4. Цилиндрические функции Бесселя

Большое число разнообразных задач, относящихся к важнейшим разделам математической физики, связаны с применением функций Бесселя*, например, при решении задач акустики, радиофизики, гидродинамики, атомной и ядерной физики, в теории теплопроводности и упругости. Это объясняется тем, что решение уравнений, содержащих оператор Лапласа, методом разделения переменных при изменении аргументов в области круга, шара или цилиндра, сводится к цилиндрическим функциям Бесселя.

Примечание. Цилиндрические функции названы по имени немецкого астронома Фридриха Бесселя, который при изучении движения планет вокруг Солнца в 1824 году вывел рекуррентные соотношения для данных функций, получил интегральное представление и составил таблицы этих функций.

Следует отметить, что впервые цилиндрическая функция нулевого порядка была получена в 1732 г. Даниилом Бернулли в работе, посвященной колебанию тяжелых цепей. Следующей работой, в которой встречаются цилиндрические функции в виде ряда, была работа Леонарда Эйлера 1738 г., при изучении колебаний круглой мембраны.

1. Уравнение Бесселя. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое называется уравнением цилиндрических функций n -го порядка или уравнением Бесселя:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (6.6)$$

При $n = 0$ имеем уравнение Бесселя нулевого порядка, которое соответствует задачам, обладающих осевой симметрией:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + y = 0.$$

2. Степенные ряды. Решение уравнения Бесселя (6.6) находится с помощью степенного ряда с учетом особой точки при $x = 0$:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\sigma} = x^\sigma (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots). \quad (6.7)$$

Ряд начинается с x^σ , где σ – характеристический показатель, подлежащий определению. Подставим (6.7) в уравнение (6.6), приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях: $x^\sigma, x^{\sigma+1}, \dots, x^{\sigma+k}$, получим систему уравнений для определения σ и коэффициентов $a_k, k = 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned} a_0(\sigma^2 - n^2) &= 0, \\ a_1[(\sigma + 1)^2 - n^2] &= 0, \\ a_2[(\sigma + 2)^2 - n^2] + a_0 &= 0, \\ &\dots \\ &\dots \\ a_k[(\sigma + 2)^2 - n^2] + a_{k-2} &= 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из первого уравнения при $a_0 \neq 0$ получим, что

$$\sigma^2 - n^2 = 0, \quad \sigma = \pm n. \quad (6.9)$$

Тогда из второго уравнения (6.8) следует: $a_1 = 0$. Из k -го уравнения (при $k > 1$) из (6.8) вытекает рекуррентная формула для определения коэффициента a_k через a_{k-2} :

$$(\sigma + k + n)(\sigma + k - n)a_k + a_{k-2} = 0,$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma + k + n)(\sigma + k - n)}. \quad (6.10)$$

Из выражения (6.10) следует, что при $a_1 = 0$ все нечетные коэффициенты равны нулю: $a_{2k-1} = 0$. Если число n вещественно, то при $\sigma = -n$ решение обращается в бесконечность в точке $x = 0$. Остановимся на случае $\sigma = n$. Из формулы (6.10) видно, что каждый четный коэффициент может быть выражен через предыдущий:

$$a_{2m} = -a_{2m-2} \frac{1}{2^{2m}(m+n)}.$$

Последовательное применение этой формулы позволяет найти выражение через произвольный коэффициент a_0 :

$$a_{2m} = (-1)^m \left(\frac{a_0}{2^{2m} m! (n+1)(n+2)\dots(n+m)} \right).$$

Воспользуемся свойством **гамма-функции $\Gamma(s)$** :

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = \dots = s(s-1)\dots(s-n)\Gamma(s-n).$$

Если s – целое число, то

$$\Gamma(s+1) = s!$$

Рассмотрим случаи:

1) При $\sigma = n$, $n > 0$ – целое число. Используя свойство гамма-функций, определим коэффициенты a_0 и a_{2k} :

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}, \quad a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+n} \Gamma(k+1) \Gamma(k+n+1)}.$$

Подставим данные коэффициенты в ряд (6.7) и получим значение *функции Бесселя первого рода n -го порядка* (рисунок 6.4):

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \quad (6.11)$$

2) При $\sigma = -n$, где $n > 0$, коэффициенты a_0 и a_{2k} будут равны:

$$a_0 = \frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}, \quad a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k-n}\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)}.$$

Ряд (6.7) с коэффициентами a_0 , a_{2k} представляет второе решение уравнения Бесселя, которое линейно независимо от функции $J_n(x)$ и называется *функцией Бесселя второго рода n -го порядка или функцией Неймана* (рисунок 6.5):

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = N_n(x). \quad (6.12)$$

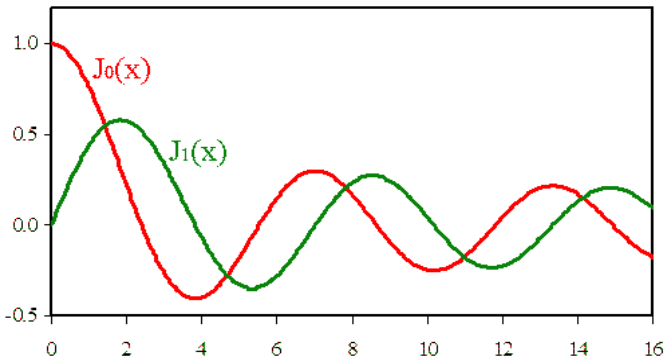


Рисунок 6.4 – Изменение функции Бесселя 1 рода нулевого порядка $n = 0$ (красный цвет); $n = 1$ первого порядка (зеленый цвет) от аргумента x (рисунок из интернета)

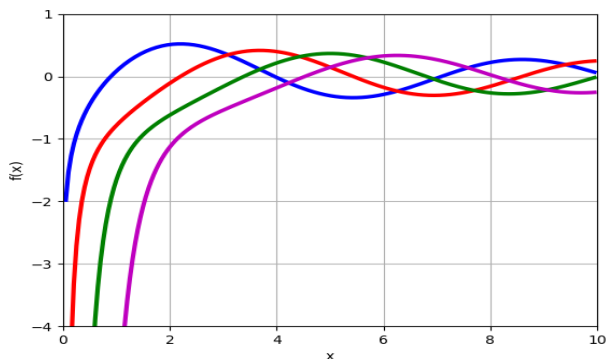


Рисунок 6.4 – Изменение функции Неймана (функция Бесселя 2-го рода) нулевого порядка: $n = 0$ (синий); $n = 1$ первого порядка (красный); $n = 2$ порядка (зеленый); $n = 3$ (фиолетовый цвет) от аргумента x (рисунок из интернета)

§ 6.5. Специальные цилиндрические и сферические функции

Метод разделения переменных при решении уравнений второго порядка с частными производными и граничными условиями первого рода, приводит к задаче Штурма–Лиувилля на отыскание собственных значений.

1. Постановка задачи Штурма–Лиувилля: найти собственные значения λ , при которых однородное уравнение

$$\Delta v + \lambda v = 0 \quad (6.13)$$

в области V с граничным условием $v|_{\Sigma} = 0$ на границе Σ имеет нетривиальные решения $v(P) \neq 0$.

а) если область V изменения аргументов представляет собой:

- 1) прямолинейный отрезок $0 \leq x \leq l$,

2) прямоугольник ($0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2$),

3) параллелепипед ($0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2, 0 \leq z \leq l_3$),

то функция $v(P)$ выражается **через тригонометрические периодические функции.**

б) если область V изменения аргументов представляет собой круг, цилиндр или шар, то для нахождения собственных функций сводится к определению специальных функций: цилиндрических или сферических.

2. Рассмотрим решение уравнения (6.13), когда область изменения аргументов имеет вид круга или шара:

2.1. Круг. Запишем для круга уравнение (6.13) и граничные условия в полярной системе координат (r, φ) :

$$\Delta_2 v + \lambda v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0, \quad 0 < r < r_0.$$

$$r = r_0: v|_{r=r_0} = 0, \quad v \neq 0.$$

Решение уравнения относительно функции $v(r, \varphi)$ находится в виде произведения двух функций: $v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \neq 0$. Подставим значение функции $v(r, \varphi)$ в данное уравнение, возьмем производные и разделим переменные:

$$\frac{r(rR)'' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu = const.$$

В результате получили два уравнения относительно r и φ . В силу однозначности решения уравнения

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0, \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

функция $\Phi(\varphi)$ является периодической $\Phi(\varphi + 2\pi n) = \Phi(\varphi)$. Поэтому постоянная $\mu = n^2$, где целое число $n = 1, 2, \dots, \infty$.

В результате замены $R(r) = y(\sqrt{\lambda}r)$, $x = \sqrt{\lambda}r$ приходим к дифференциальному уравнению Бесселя n -го порядка:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0. \quad (6.6)$$

Решение уравнения (6.6) выражается через цилиндрические функции (6.11), (6.12) [12]. К уравнению (6.6) приводятся задачи для уравнения Лапласа и волнового уравнения, когда областью изменения аргументов есть круговой цилиндр.

2.2. Шар. Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля для однородного шара. Запишем уравнение Лапласа и граничное условие в сферической системе координат:

$$\Delta v = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{dv}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} v,$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} v = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{dv}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}.$$

$$r = r_0: \quad 0 < r < r_0, \quad v|_{r=r_0} = 0.$$

Решение данного уравнения находится путем введения новых функций $v(r, \varphi) = R(r)w(\theta, \varphi)$, которые после подстановки в уравнение, разделения переменных приводятся к системе двух уравнений относительно $R(r)$ и $w(\theta, \varphi)$:

$$\frac{(r^2 R)'' + \lambda r^2 R}{R} = - \frac{(\Delta_{\theta, \varphi} w)}{w} = \mu,$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} w + \mu w = 0,$$

$$\frac{1}{r^2} (r^2 R)'' + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2} \right) R = 0, \quad R(r_0) = 0. \quad (6.14)$$

С помощью подстановки $x = \sqrt{\lambda} r$, $y = R/\sqrt{x}$ уравнение (6.14) сводится к уравнению Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0, \quad \nu^2 = \mu - \frac{1}{4}.$$

Относительно функции $w(\theta, \varphi)$ в (6.14) получаем уравнение, которое при собственных значениях $\mu = n(n+1)$

имеет ограниченное решение в виде сферических функций. В частном случае, когда функция $w(\theta, \varphi) = w(\theta)$ не зависит от аргумента φ , уравнение (6.14) принимает вид **уравнения Лежандра** [12]:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left((1 - s^2) \frac{dw}{ds} \right) + \mu w = 0, \quad s = \cos \theta, \quad -1 \leq s \leq 1. \quad (6.15)$$

Уравнение (6.15) имеет ограниченное решение в виде полиномов Лежандра [12]. Сферические функции выражаются через полиномы Лежандра и тригонометрические функции.

§ 6.6. Общее уравнение теории специальных функций

Дифференциальное уравнение, приводящее решение к простейшим специальным функциям, может быть записано в обобщенном виде так:

$$Ly + (\lambda \rho(x) - q(x))y = 0, \quad a < x < b, \quad \rho(x) > 0, \quad (6.16)$$

$$Ly = [k(x)y']' = \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dy}{dx} \right), \quad k(x) \geq 0, \quad q(x) \geq 0.$$

В зависимости от области изменения аргумента x , коэффициентов и функций, входящих в уравнение (6.16), решения данного уравнения приводятся к различным специальным функциям. В качестве примера рассмотрим некоторые из них:

6.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + \lambda y = 0$$

следует из уравнения (6.16), если коэффициенты и функции уравнения равны следующим значениям:

$$a = 0, b = l, q = 0, k = p = 1.$$

Решением данного уравнения при $\lambda > 0$ будут **тригонометрические функции** (см. § 3.6).

6.2. Уравнение Бесселя (6.6) вытекает из уравнения (6.16)

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0, \quad (6.17)$$

если коэффициенты и функции уравнения равны следующим значениям:

$$k(x) = x, \rho(x) = x, q(x) = \frac{n^2}{x}, a = 0, b = r_0,$$

Решение уравнения (6.17) находятся в виде функций Бесселя, если n целое число:

$$y(x) = d_1 J_n(x) + d_2 N_n(x).$$

6.3. Уравнение Лежандра следует из уравнения (6.16):

$$[(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad (6.18)$$

если коэффициенты и функции уравнения равны следующим значениям:

$$k(x) = 1 - x^2, \rho = 1, q = 0, a = -1, b = 1.$$

Решение уравнения (6.18) находятся в виде функций Лежандра [12].

6.4. Уравнение присоединенных функций Лежандра вытекает из уравнения (6.16):

$$[(1-x^2)y']' - \frac{m^2}{1-x^2}y + \lambda y = 0, \quad (6.19)$$

если коэффициенты и функции уравнения равны следующим значениям:

$$k(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = \frac{m^2}{1-x^2}, \quad \rho = 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Решение уравнения (6.19) находятся в виде присоединенных функций Лежандра [12].

6.5. Уравнение Чебышева-Эрмита следует из уравнения (6.16):

$$(e^{-x^2}y')' + \lambda e^{-x^2}y = 0, \quad y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad (6.20)$$

если коэффициенты и функции уравнения равны следующим значениям:

$$k(x) = e^{-x^2}, \quad q(x) = 0, \quad \rho(x) = e^{-x^2}, \quad a = -\infty, \quad b = \infty.$$

Решение уравнения (6.20) находятся в виде присоединенных функций Чебышева-Эрмита [12].

6.6. Уравнение Чебышева-Лягерра следует из уравнения (6.16):

$$(xe^{-x}y')' + \lambda e^{-x}y = 0, \quad y'' + (1-x)y' + \lambda y = 0, \quad (6.21)$$

если коэффициенты и функции уравнения равны следующим значениям:

$$k(x) = xe^{-x}, \quad q = 0, \quad \rho = e^{-x}, \quad a = 0, \quad b = \infty.$$

Решение уравнения (6.21) находятся в виде присоединенных функций Чебышева-Лягерра [12].

Характерной особенностью указанных уравнений является обращение в нуль коэффициента $k(x)$, по крайней мере, на одном из концов рассматриваемого интервала (a, b) . Это свойство $k(x)$ играет важную роль при постановке краевых задач для уравнения (6.16).

§ 6.7. Дельта функция

1. *Определение.* Дельта функция – это математическая модель интенсивного внешнего воздействия в пространстве и во времени определенных физических явлений, таких, как например, точечная масса или электрический заряд, сосредоточенный мгновенный удар, локальное интенсивное выделение тепла (энергия взрыва), короткий скачек (импульс) электрического тока или напряжения с бесконечно большой амплитудой и т. д. Для моделирования данных физических явлений Поль Дирак (английский физик-теоретик) впервые применил дельта функцию, которая противоречила классическому определению функции, но хорошо описана в классе обобщенных функций [1]. Дельта функция обладает следующими характерными свойствами:

1. $\delta(x - x_0) = 0, x \neq x_0; \delta(x - x_0) = \infty, x = x_0;$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0);$
3. $\delta(x) = \delta(-x);$
4. $\delta(x - x_0) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x_0\right);$
5. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = (-1)^{(n)} f(x_0).$

2. Рассмотрим некоторые примеры применения дельта функции Дирака.

1. Единичный электрический заряд, расположенный в пространстве в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$Q = \iiint_{-\infty}^{\infty} q(M) \delta(M - M_0) dx dy dz = q(M_0),$$

$$M = M_0; Q = 0, M \neq M_0.$$

2. Кратковременный импульс электрического тока силой I_0 в момент времени t_0 :

$$I(t) = I_0 \delta(t - t_0).$$

3. В металлическом проводнике в точке $x = x_0$ в момент времени $t = t_0$ мгновенно выделяется тепло мощностью Q :

$$Q(x, t) = Q \delta(x - x_0) \delta(t - t_0).$$

4. Струна в начальный момент времени возбуждается ударом жесткого острого молоточка, который сообщает ей в точке $x = x_0$ скорость v_0 :

$$v(x) = v_0 \delta(x - x_0).$$

Практическое занятие № 6

Лекции 17–18

Глава 7. Метод конечных разностей

Проводится решение дифференциального уравнения второго порядка в частных производных от двух независимых переменных методом конечных разностей (методом сеток)

§ 7.1. Основные понятия

Решения уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов трудно, а иногда и практически невозможно получить в виде аналитических функций, рядов или интегралов в двух- и трехмерных областях изменения аргументов и тем более, если коэффициенты уравнений сами являются нелинейными функциями. В этом случае применяются различные численные методы решения, одним из которых является метод конечных разностей или метод сеток.

1. Постановка задачи. Рассмотрим универсальный численный метод решения дифференциальных уравнений в частных производных – **метод конечных разностей** [1, 12] на примере решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности:

$$\rho(x, t)c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t). \quad (7.1)$$

Предполагается, что процесс распространения тепла происходит в однородном металлическом стержне длиной l

с теплоизолированной боковой поверхностью. Такая постановка исключает потери тепла в радиальном направлении и дает возможность определить распределение температуры по оси x для любых моментов времени t .

2. Математическая постановка задачи: найти функцию $u = u(x, t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области изменения аргументов $[0 \leq x \leq l, t \geq 0]$, удовлетворяющую уравнению (7.1).

Уравнение теплопроводности (7.1) является нелинейным уравнением второго порядка и для определения температуры $u = u(x, t)$ необходимо знать значения коэффициентов: $k(u) = k(x, t)$, $\rho(u) = \rho(x, t)$, $c(u) = c(x, t)$. В свою очередь, для определения данных коэффициентов нужно знать распределение температуры. Возникает сложная задача, с решением которой познакомимся в конце данной главы.

Для наглядного изложения метода конечных разностей упростим уравнение (7.1), полагая, что коэффициенты переноса и теплофизические параметры (k, ρ, c) заданы и постоянны. В этом случае уравнение теплопроводности (7.1) запишется в таком виде:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (0 < x < l, 0 < t \leq T),$$

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho}. \quad (7.2)$$

Для получения однозначного решения данного уравнения (7.2) задаются начальные и граничные условия:

$$t = 0: u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7.3)$$

$$x = 0: u(0, t) = \mu_1(t);$$

$$x = l: u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq t_k, \quad (7.4)$$

где $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – функции начального распределения температуры и изменения температуры на концах (границах) стержня; t_k – конечное время рассматриваемого процесса.

3. Метод конечных разностей (метод сеток) является универсальным методом решения дифференциальных уравнений и применяется для широкого класса задач математической физики. Методика решения уравнений методом конечных разностей состоит в реализации следующих этапов:

- 1) область непрерывного изменения аргументов x и t заменяется конечным (дискретным) множеством точек (узлов), называемая сеткой или сеточной областью;
- 2) вместо функции непрерывного значения аргументов, рассматривается функция дискретного аргумента, которая определяется в узлах сетки и называется сеточной функцией. В узлах разностной сетки вычисляются коэффициенты уравнения, источники или стоки тепла;
- 3) производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменяются (аппроксимируются) при помощи соответствующих разностных операторов, представляющих линейные комбинации значений сеточной функции в нескольких узлах сети;
- 4) дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением по явной или неявной схемам аппроксимации;
- 5) начальным и граничным условиям ставится в соответствие разностные краевые условия для искомой сеточной функции;
- 6) делается постановка разностной краевой задачи, и для данного уравнения выбираются явная, неявная или явно-неявная разностные схемы аппроксимации;

- 7) разностное уравнение приводится к системе алгебраических уравнений, которые решаются методом прогонки по всем узлам сетки с учетом разностных начальных и граничных условий;
- 8) в случае решения нелинейных или квазилинейных дифференциальных уравнений, кроме метода прогонки, дополнительно применяется метод итераций или метод последовательных приближений, когда численный расчет проводится многократно до выполнения условия сходимости результатов относительно искомой функции с требуемой точностью;
- 9) проводится тестирование разностного метода решения, с использованием известных аналитических решений и результатов эксперимента;
- 10) для контроля счета применяются интегральные уравнения балансов энергии, импульса, заряда и массы.

Естественно требовать, чтобы разностная краевая задача была устойчива и ее решение, при изменении числа N узлов сетки, приближалось (сходилось) к аналитическим тестовым результатам решения исходной задачи данного дифференциального уравнения.

§ 7.2. Разностная сетка

Рассматриваются простейшие примеры построения разностных сеток:

1. Равномерная сетка. Область непрерывного изменения аргумента x $0 \leq x \leq l$ на отрезке $[0, l]$ разбивается точками – узлами на N равных частей с шагом Δx :

$$\Delta x = (x_{i+1} - x_i) = h = l/N, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (7.5)$$

Множество точек x_i называется разностной сеткой на отрезке $0 \leq x \leq l$ и обозначается как

$$\omega_h \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = l\},$$

где число $h = \Delta x$ – расстояние между точками (узлами) сетки ω_h называется **шагом сетки** (рисунок 7.1).

Примечание. Выбор постоянного шага сетки $h = \Delta x$ определяется требуемой точностью вычислений, например, шаг сетки задается с точностью 2 %: $\Delta x = l/50 = 0,02 l$. При увеличении шага данной сетки точность проводимых расчетов может снижаться. То же самое следует при значительном уменьшении шага сетки, так как в этом случае нужно увеличивать точность округления используемых констант, коэффициентов уравнения и аппроксимации производных, иначе можно попасть в область погрешностей округления данных величин и возникнут неопределенности при вычислении (особенно производных) и нарушится сходимость разностного алгоритма решения уравнения.

2. Неравномерная сетка. Отрезок $[0, l]$ разбивается на N частей путем введения точек – узлов: $x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < l$. Шаг сетки $\Delta x_i = h_i = x_i - x_{i-1}$ зависит от номера i узла сетки x_i . Если шаги сетки хотя бы для одного i номера узла не равны между собой $h_i \neq h_{i+1}$, то такая сетка $\overline{\omega}_h$ называется неравномерной (рисунок 7.1):

$$\overline{\omega}_h \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = l\}.$$

Примечание. Для неравномерного шага сетки необходимо задавать оптимальное количество точек-узлов, в соответствии, например, с заданным градиентом изменения искомой функции, используя величину размера шага сетки: $\Delta u / \Delta x = const$.

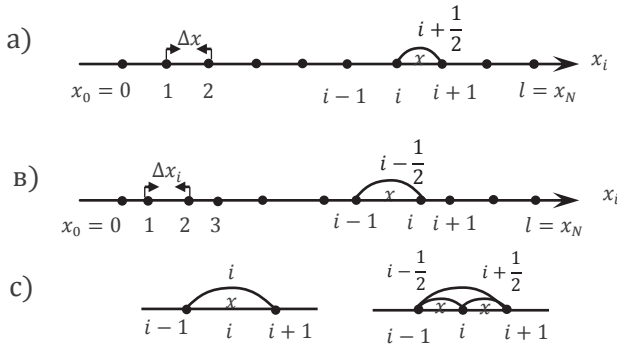


Рисунок 7.1 – Равномерная (а) и неравномерная (в) разностные сетки с фрагментами правой (а), левой (в) и центральной (с) аппроксимациями производных первого и второго порядков; l – длина стержня; Δx , Δx_i – равномерный и неравномерный шаги сетки; N – максимальное число узлов i сетки, звездочкой показаны значения производных на дробных (промежуточных) слоях сетки

3. Сеточная область. Рассмотрим функцию $y = y(x, t)$ от двух независимых переменных x, t . Областью изменения данной функции является прямоугольник $\bar{D}(0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T)$. Построим на оси x в области изменения аргумента $0 \leq x \leq l$ разностную сетку $\bar{\omega}_h\{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N\}$ с шагом $\Delta x = h = l/N$ и разностную сетку на отрезке $[0 \leq t \leq T]$ изменения по времени $\bar{\omega}_\tau\{t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, M\}$ с шагом $\Delta t = \tau = T/N_0$. Множество точек узлов (x_i, t_k) с координатой $x_i = ih$, и временем $t_k = k\tau$ образуют **сеточную область** (рисунок 7.2) в прямоугольнике \bar{D} , которая обозначается как

$$\bar{\omega}_{h\tau}\{(x_i = ih, t_k = k\tau), i = 0, 1, 2, \dots, N, k = 0, 1, \dots, M\}. \quad (7.6)$$

§ 7.3. Аппроксимация дифференциальных операторов

1. Сеточная функция. Функция $y = y(x)$ непрерывного изменения аргумента x , заменяется дискретной функцией $y_i = y(x_i)$ от дискретного значения аргумента x_i для всех точек – узлов разностной сетки $i = 1, 2, \dots, N$. Функция $y_i = y(x_i)$ называется **сеточной функцией**, определенной на разностной сетке $\overline{\omega}_h$ (рис. 7.3).

Если функция $u(x, t)$ зависит от двух аргументов x, t и задана в области \overline{D} , то значение сеточной функции обозначается в виде $u_i^k = u(x_i, t_k)$ в узлах x_i, t_k сеточной области $\overline{\omega}_{ht}$.

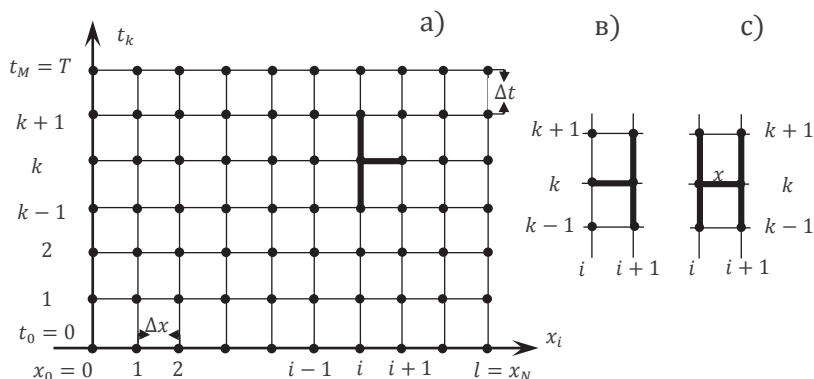


Рисунок 7.2 – Сеточная область (x_i, t_k) с равномерной разностной сеткой (а), с фрагментами аппроксимации уравнения теплопроводности по явной (а), неявной (в) и явно-неявной (с) разностным схемам; l – длина стержня; T – конечное время процесса; $\Delta x, \Delta t$ – шаги сетки; N, M – максимальное число i, k узлов, звездочкой показаны значения производных на дробных (промежуточных) слоях сетки

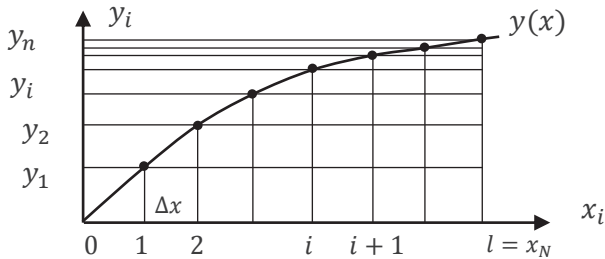


Рисунок 7.3 – Сеточная функция $y_i = y(x_i)$ изменения дискретного аргумента x_i , l – длина стержня, Δx шаг сетки и максимальное N число i узлов

2. Аппроксимация производных. Дифференциальный оператор L , заданный в классе функций непрерывного изменения аргумента, может быть приближенно заменен (аппроксимирован) разностным оператором L_h , заданным в узлах сеточной функции. Оператор $L_h v$, преобразующий сеточную функцию v_i , называется **сеточным** или **разностным оператором**. Каждая из производных заменяется разностным отношением (отсюда и название «разностный оператор»), содержащим значения сеточной функции в нескольких узлах сетки.

Рассмотрим, например, аппроксимацию первых и вторых производных функции одного переменного.

2.1. Первая производная. Рассмотрим на сетке $\bar{\omega}_h \{x_i = ih\}$ с шагом h аппроксимацию первой производной $Lv = v'$ функции $v(x)$ разностными выражениями следующим способом:

1) **левая разность**, которая называется левая разностная производная или левое разностное отношение (рисунок 7.1):

$$Lv = \frac{dv}{dx} = v' \sim \frac{v_i - v_{i-1}}{h} = L_h^- v_i; \quad (7.7)$$

2) **правая разность** или правая разностная производная (рисунок 7.1):

$$Lv = \frac{dv}{dx} = v' \sim \frac{v_{i+1} - v_i}{h} = L_h^+ v_i; \quad (7.8)$$

3) **центральная разность** или центральная разностная производная (рисунок 7.2):

$$Lv = \frac{dv}{dx} = v' \sim L_h^0 v_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}. \quad (7.9)$$

Здесь использовано обозначение $v_i = v(x_i)$. При замене дифференциального оператора $Lv = v'$ разностным выражением $L_h^+ v_i$, допускается погрешность ψ_i^h :

$$L_h^+ v_i - (Lv)_i = \psi_i^h \sim O(h),$$

которая называется погрешностью аппроксимации дифференциального оператора L разностным оператором L_h с первым порядком точности в соответствии с шагом разностной сетки.

Множество узлов сеточной функции, которые входят в выражение $L_h v_i$, называются **шаблоном оператора** L_h в точке x_i . Очевидно, что шаблон оператора L_h^- состоит из двух узлов x_i и x_{i-1} , а шаблон оператора L_h^+ – из следующих двух узлов x_i и x_{i+1} .

Запишем в общем виде трехточечный оператор, определенный на шаблоне x_{i-1} , x_i и x_{i+1} :

$$L_h^{(\sigma)} v_i = \sigma L_h^+ v_i + (1 - \sigma) L_h^- v_i = \frac{\sigma v_{i+1} + (1 - 2\sigma)v_i - (1 - \sigma)v_{i-1}}{h}.$$

Если число $\sigma = 0$, то следует левая разность. При $\sigma = 1$ имеем правую разность, а при $\sigma = 0,5$ получаем центральную разность, которая аппроксимирует производную функции $v(x)$ со вторым порядком точности.

2.2. Вторая производная. Рассмотрим аппроксимацию второй производной функции $v(x)$ ($L_h v = v''$).

Для этого выбирается трехточечный шаблон, состоящий из узлов: x_{i-1} , x_i , x_{i+1} (рисунок 7.2) для разностного оператора:

$$\begin{aligned} L_{hh}v_i &= \frac{d^2v}{dx^2} = v'' \sim \frac{L_h^+ v_i - L_h^- v_i}{h} = \frac{\frac{v_{i+1} - v_i}{h} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h}}{h} = \\ &= \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

§ 7.4. Схемы аппроксимации

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор в уравнении теплопроводности (7.2):

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u = u(x, t)$ – функция двух аргументов x, t , меняющихся в заданной области $\bar{D}(0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T)$.

Введем сетку:

$$\overline{\omega_{ht}} \{ (x_i = ih, t_k = k\tau), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots, M \}$$

со следующими шагами по x и t : $\Delta x = h = l/N$ и $\Delta t = \tau = T/M$.

1. Явная разностная схема. Произведем замену в уравнении (7.2) дифференциальных операторов разностными, которые определены на шаблоне, состоящем из четырех точек: (x_i, t_{k+1}) , (x_i, t_k) , (x_{i+1}, t_k) , (x_{i-1}, t_k) . Рассмотрим случай, когда на неизвестном временном слое $(k+1)$ берется одно значение функции, а на известном слое (k) – четыре значения функции (рисунок 7.2):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{k+1} \sim \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau}, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^k \sim \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}.$$

В результате получили разностное уравнение, аппроксимированное по явной разностной схеме:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + f_i^k. \quad (7.11)$$

2. Неявная разностная схема. Произведем замену в уравнении (7.2) дифференциальных операторов разностными на следующем шаблоне, состоящем из четырех точек: $(x_i, t_{k+1}), (x_i, t_k), (x_{i+1}, t_{k+1}), (x_{i-1}, t_{k+1})$. Видно, что на неизвестном временном $(k + 1)$ слое определяются три значения функции, а на известном слое (k) – одно значение функции (рисунок 7.2):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{k+1} \sim \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau}, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{k+1} \sim \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2}.$$

В результате получили разностное уравнение, аппроксимированное по неявной разностной схеме:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2} + f_i^k. \quad (7.12)$$

Таким образом, уравнение теплопроводности аппроксимировано по явной (7.11) и неявной (7.12) разностным схемам, определенным в сеточной области $\omega_{h\tau}$ во внутренних узлах сетки $(i = 1, 2, \dots, N - 1, k = 1, \dots, M)$. В узлах сетки $(i = 0, N, k = 0)$ должны быть заданы разностные граничные и начальные условия.

§ 7.5. Постановка разностных краевых задач

1. Разностные краевые условия. Для решения разностных уравнений теплопроводности (7.11) и (7.12) необходимо задать разностные краевые (начальные (7.3) и граничные (7.4)) условия:

$$t_0 = 0: u(x_i, 0) = u_i^0 = \varphi(x_i) = \varphi_b, \\ x_0 = 0 \leq x_i \leq x_N = l, \quad (7.13)$$

$$x_0 = 0: u(0, t_\kappa) = u_0^K = \mu_1(t_\kappa) = \mu_{1\kappa}; \\ x_N = l: u(l, t_\kappa) = u_N^K = \mu_2(t_\kappa) = \mu_{2\kappa}; \quad t_0 = 0 \leq t_\kappa \leq t_M = T, \quad (7.14)$$

где $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $\mu_{1\kappa} = \mu_1(t_\kappa)$ и $\mu_{2\kappa} = \mu_2(t_\kappa)$ – заданные разностные функции начального распределения температуры и изменения температуры на концах (границах) стержня, $t_M = T$ – конечное время рассматриваемого процесса.

2. Постановка разностной краевой задачи: определить значение сеточной функции $u_i^K = u(x_i, t_\kappa)$ во всех узлах (x_i, t_κ) сеточной области $\overline{\omega_{h\tau}}$, удовлетворяющей разностному уравнению (7.11), аппроксимированному по явной разностной схеме:

$$\frac{u_i^{K+1} - u_i^K}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1}^K - 2u_i^K + u_{i-1}^K}{h^2} + f_i^K,$$

и заданным разностным краевым условиям:

$$t_0 = 0: u(x_i, 0) = u_i^0 = \varphi(x_i) = \varphi_b \quad x_0 = 0 \leq x_i \leq x_N = l, \\ x_0 = 0: u(0, t_\kappa) = u_0^K = \mu_1(t_\kappa) = \mu_{1\kappa}; \\ x_N = l: u(l, t_\kappa) = u_N^K = \mu_2(t_\kappa) = \mu_{2\kappa}; \quad t_0 = 0 \leq t_\kappa \leq t_M = T.$$

Аналогично ставится разностная краевая задача для решения разностного уравнения (7.12), аппроксимированного по неявной разностной схеме.

§ 7.6. Решение разностных краевых задач

В зависимости от аппроксимации уравнения по явной или неявной разностных схеме в области $\bar{D}(0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T)$ разностной сетки $\overline{\omega_{h\tau}}\{x_i = ih, t_k = k\tau\}$, выбирается определенный метод решения.

1. Решение по явной разностной схеме. В этом случае уравнение (7.11) приводится к алгебраическому уравнению относительно неизвестной функции u_i^{k+1} в точке $(k+1)$ узла разностной сетки по известным значениям функции u_i^k на предыдущем (k) слое, состоящем из трех точек (x_i, t_k) , (x_{i+1}, t_k) , (x_{i-1}, t_k) .

$$u_i^{k+1} = F(u_i^k) + \tau f_i^k = u_i^k + \tau a^2 \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + \tau f_i^k. \quad (7.15)$$

Решение алгебраического уравнения (7.15) относительно искомой разностной функции u_i^{k+1} сводится к **простой прогонке** на неизвестном $(k+1)$ временном слое при изменении индекса $i = 1, 2, \dots, N-1$ по известным значениям функции $F(u_i^k)$ на (k) слое. На начальном слое $(k=0)$ значения функции $F(u_i^0)$ определяются по заданному начальному условию (7.13) и с использованием граничных (7.14) условий. После этого делается переход к следующему неизвестному временному слою при последовательном изменении значения индекса $k = 1, 2, \dots, M$.

Сходимость метода решения по явной разностной схеме контролируется заданием минимального шага разностной сетки [1].

2. Решение по неявной разностной схеме. В этом случае применяется **метод двойной прогонки**, который устойчив в рекуррентном счете коэффициентов прогонки

и искомой функции. Для этого уравнение (7.12) приводится к алгебраическому уравнению относительно неизвестной функции u_i^{k+1} на временном слое $(k+1)$, состоящем из трех узлов (x_i, t_{k+1}) , (x_{i+1}, t_{k+1}) , (x_{i-1}, t_{k+1}) по известному значению функции u_i^k на предыдущем (k) слое:

$$Au_{i+1}^{k+1} - Bu_i^{k+1} + Cu_{i-1}^{k+1} + D_i^k = 0, \quad (7.16)$$

$$A = a^2 \frac{\tau}{h^2}, B = a^2 \frac{2\tau+1}{h^2}, C = a^2 \frac{\tau}{h^2}, D_i^k = u_i^k + \tau f_i^k.$$

На начальном слое $(k=0)$ используются значения функции $F(u_i^0)$ из заданного разностного начального условия (7.13). Решение алгебраического уравнения (7.16) ищется в виде:

$$u_{i+1}^{k+1} = X_i^k u_i^{k+1} + Y_i^k, \quad (7.17)$$

где коэффициенты прогонки X_i^k, Y_i^k определяются из уравнений (7.16) и (7.17) при изменении индекса i , и находятся из следующих выражений:

$$X_i^k = \frac{C}{B - AX_{i+1}^k}, Y_i^k = \frac{AY_i^{k+1} + D_i^k}{B - AX_{i+1}^k}, B - AX_{i+1}^k \neq 0.$$

Вычисления коэффициентов прогонки X_i^k, Y_i^k на $(k+1)$ временном слое проводится обратной прогонкой от граничного условия на одном конце стержня для всех значений индекса $i = N-1, N-2, \dots, 2, 1, 0$:

$$i = N, x_N = l: u(l, t_k) = \mu_2(t_k) = \mu_{2k} = Y_N^k; X_N^k = 0.$$

Далее по формуле (7.17) прямой прогонкой вычисляется искомая функция u_{i+1}^{k+1} при $i=0, 1, 2, \dots, N-1$ с учетом заданного граничного условия: $x_0 = 0: u_0^{k+1} = u(0, t_k) = \mu_1(t_k)$. После этого делается переход к следующему временному слою при изменении значения индекса $k = 1, 2, \dots, M$.

3. Решение по явной-неявной разностной схеме. Метод решения дифференциального уравнения по неявной разностной схеме абсолютно устойчив по сравнению с явной схемой аппроксимации, где для достижения сходимости решения необходимо контролировать величину шага сетки [1]. Несмотря на то, что по неявной разностной схеме приходится дважды осуществлять обратную (для определения коэффициентов) и прямую (при вычислении искомого функции) прогонку, тем не менее, времена расчета практически совпадают.

Поскольку при решении задачи по явной разностной схеме происходит накопление погрешностей вычисления, а при решении по неявной разностной схеме не реализуется запас устойчивости, то лучше применять **явно-неявную** разностную схему (рисунок 7.2). Для этого при аппроксимации вторых производных в уравнении теплопроводности (7.2) вводится коэффициент β , изменяющийся в пределах области $[0, 1]$:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \beta a^2 \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + (1 - \beta) a^2 \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2} + f_i^k. \quad (7.18)$$

При $\beta = 0$ данное уравнение аппроксимируется по неявной разностной схеме, при $\beta = 1$ реализуется явная разностная схема.

Примечание. Как показали результаты численного решения уравнения теплопроводности, хорошее совпадение с данными тестирования отмечалось при использовании явно-неявных разностных схем с коэффициентом $\beta = 0,25$.

4. Решение нелинейных уравнений. При рассмотрении определенных физических явлений приходится сталкиваться с решением нелинейных задач, например, в уравнении теплопроводности коэффициенты теплопроводности, плотности, теплоемкости и функция источников или стоков тепла зависят от температуры. В этом случае возникает замкнутый круг, характерный для всех нелинейных задач: *чтобы найти температуру из решения уравнения теплопроводности, нужно знать коэффициенты уравнения, а для определения коэффициентов – нужно решить уравнение и найти температуру.*

Поэтому для решения нелинейных задач применяется метод последовательных приближений или метод итераций. Для этого, в первом приближении, задается функция на $(k + 1)$ слое $u_i^{k+1, n=1}$ достаточно произвольно, но желательно ближе к истинному значению и определяются коэффициенты уравнения. Далее решается разностное уравнение, находится второе приближение искомой функции $u_i^{k+1, n=2}$ и проверяется условие сходимости решения:

$$|u_i^{k, n+1} - u_i^{k, n}| \leq \varepsilon > 0. \quad (7.19)$$

Если условие выполняется, то расчет заканчивается. Если условие не выполняется, то расчет проводится повторно при изменении числа итераций (приближений) $n = 1, 2, 3, \dots$ до выполнения условия сходимости (7.19) с требуемой точностью вычисления для всех точек i, k расчетной области, например, $\varepsilon \leq 0,01^*$.

При решении нелинейных разностных уравнений коэффициенты переноса, теплофизические параметры и источники тепла задаются в промежуточных или дробных узлах сетки по значениям в узлах основной сетки. Для примера запишем данные значения коэффициентов для дифференциального уравнения (7.1), аппроксимированного по явной разностной схеме:

$$\rho_i^{k+1/2} c_i^{k+1/2} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \frac{k_{i+1/2}^k u_{i+1}^k - k_i^k u_i^k + k_{i-1/2}^k u_{i-1}^k}{h^2} + F_i^{k+1/2},$$

$$\rho_i^{k+\frac{1}{2}} c_i^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\rho_i^{k+1} c_i^{k+1} + \rho_i^k c_i^k), \quad F_i^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_i^{k+1} + F_i^k),$$

$$k_{i+1/2}^k = \frac{1}{2}(k_{i+1}^k + k_i^k), \quad k_{i-1/2}^k = \frac{1}{2}(k_{i-1}^k + k_i^k).$$

Значения функции источника тепла и коэффициентов уравнения на неизвестном временном ($k+1$) слое находятся методом последовательных приближений: задаются по предыдущему временному (k) слою и уточняются при каждом приближении.

Точно также определяются значения коэффициентов и функция источников тепла в дифференциальном уравнении (7.1) при аппроксимации по неявной разностной схеме.

Примечание. Очень маленькое значение условия сходимости ε в (7.19) нужно задавать с осторожностью, так как на сходимость решения могут оказывать влияние погрешности округления производных, констант и функций, входящих в уравнение.

Условие сходимости (7.19) довольно жёсткое и затратное по времени счета. Причем в ряде случаев это условие приводит к появлению колебания функции и сходимости решения для четных или нечетных значений числа итераций. Поэтому для окончания счета пользуются усредненными значениями сходимости функции или какими-либо другим интегральным условием.

5. Контроль счета на каждом временном слое (k) уравнения теплопроводности осуществляется проверкой интегрального баланса энергии в рассматриваемой области пространства $[0, l]$. Выделяемая мощность источников тепла идет на нагрев самого стержня, и отводится потоками тепла (теплопроводностью) через оба торца стержня:

$$Q_f = Q_t + Q_q, \quad (7.20)$$

$$Q_f = \int_0^t \int_0^l F(x, t) dx dt,$$

$$Q_t = \int_0^l \rho(x, t) c(x, t) (u(x, t_2) - u(x, t_1)) dx,$$

$$Q_q = \int_0^t \left(-k \frac{du}{dx}(l, t) + k \frac{du}{dx}(0, t) \right) dt.$$

6. Тестирование результатов. При численном исследовании физических процессов, например, переноса тепла или определения температуры в стержне на основе уравнения теплопроводности, необходимо предварительно провести тестирование полученных результатов расчета. Тестирование обычно проводится двумя способами: математическим и физическим.

6.1. Математическое тестирование. Для того чтобы убедиться в правильном построении и аппроксимации разностных схем, отсутствии в рассогласовании слагаемых в уравнении баланса энергии, необходимо провести тестирование полученных результатов расчета. Для этого, например, можно использовать аналитическое решение уравнения теплопроводности при постоянных коэффициентах и отсутствии источников тепла, и сравнить с полученными результатами вычислений. Если при тестировании полученные результаты искомой функции методом конечных разностей находятся в пределах погрешностей вычислений с расчетами аналитической функции, то реализованная методика и алгоритм вычислений проведены правильно. Только после этого можно доверять результатам расчета, проводить численные эксперименты и исследовать данные физические процессы.

Таким способом отрабатывается алгоритм вычислений, устанавливается оптимальный шаг разностной сетки, условие сходимости решения, выбираются неизвестные коэффициенты явно-неявных разностных схем и т. д.

6.2. Физическое тестирование устанавливает адекватность физических процессов и результатов решения, например, уравнения теплопроводности, полученных на основе разработанной математической модели. Это достигается при сравнении результатов численного расчета и данных экспериментальных измерений.

Если результаты в какой-либо области отличаются от опытных данных, то необходимо провести анализ данной математической модели, полноту уравнения теплопроводности, корректность задания краевых условий, коэффициентов переноса и теплофизических параметров. Возможно, для объяснения данных физических явлений необходимо привлекать дополнительные механизмы переноса энергии, способы задания граничных условий или достоверность табличных коэффициентов уравнения.

Если результаты численных расчетов совпадают с экспериментальными данными в пределах погрешностей измерений, то разработанная математическая модель правильно отражает протекающие физические процессы. В этом случае, в отличие от эксперимента, на основе численных расчетов можно достаточно подробно исследовать различные физические закономерности протекающих явлений, установить в широком интервале влияние внешних факторов и других условий на изменения протекающих физических процессов, оценить возможность применения результатов расчета для различных практических целей и рекомендовать их для внедрения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнение Шредингера

Применение дифференциального уравнения второго порядка (уравнение Шредингера) для описания вероятности нахождения электрона в атоме привело к открытию квантовой механики

В 1925 году немецкий физик Эрвин Шредингер впервые предложил уравнение для описания движения электрона в электрическом поле атомного ядра с учетом волновых и квантовых свойств, которое объяснило вероятность нахождения электрона в атоме, теорию спектров излучения атома водорода и водородоподобных химических элементов*.

Рассмотрим решение уравнения Шредингера, как пример исследования состояния электрона в атоме и применения специальных функций [1]: Бесселя, Лежандра, Чебышева-Лягерра.

1. Уравнение Шредингера. Состояние электрона, находящегося в положительном электрическом поле атомного ядра, математически можно описать с помощью следующего дифференциального уравнения:

$$i\hbar \frac{\partial \psi^0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \psi^0 + U \psi^0, \quad (1)$$

где $\hbar = h/2\pi$, $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ эрг•сек – постоянная Планка; $U = U(x, y, z, t)$ – потенциальная энергия в электрическом поле ядра атома; m_e – масса электрона; ψ^0 – волновая функция.

По интерпретации Макса Борна, физический смысл в уравнении (1) имеет не сама функция ψ^0 , а квадрат модуля волновой функции $|\psi^0|^2$, которая определяет плотность вероятности нахождения электрона внутри элементарного объема атома. Для этого вводится нормировка волновой функции, показывающей, что если частица находится в какой-либо точке пространства с координатами x, y, z , то статистическая вероятность найти её в данном объеме равна единице:

$$\iiint |\psi^0|^2 dx dy dz = 1.$$

Стационарное уравнение Шредингера. Если потенциальная энергия не зависит от времени $U = U(x, y, z)$, то стационарное состояние нахождения электрона в электрическом поле атомного ядра с определенной энергией E устанавливается с помощью волновой функции $\psi(x, y, z)$:

$$\psi^0 = \psi^0(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-\frac{iE}{\hbar}t}. \quad (2)$$

Подставим выражение (2) в уравнение (1) и получим стационарное уравнение Шредингера:

$$\Delta\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0. \quad (3)$$

Полная энергия частицы E в уравнении (2) играет роль собственных значений и подлежит определению. При отсутствии потенциального силового поля $U(x, y, z) = 0$ уравнение Шредингера (3) сводится к волновому уравнению:

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2m_e E}{\hbar^2}. \quad (4)$$

Данная математическая форма (4) соответствует волновому уравнению классической физики, где $k = \omega/c$ – волновое число; ω – круговая частота волны; c – скорость света.

В качестве примера рассмотрим некоторые простейшие случаи решения стационарного уравнения Шредингера.

2. Гармонический осциллятор. Запишем уравнение (3) для одномерного гармонического осциллятора (электрона), совершающего колебания с собственной частотой ω_0 в электрическом поле атомного ядра с потенциальной энергией:

$$U(x) = m_e \omega_0^2 x^2 / 2.$$

Определим собственные значения энергии E и соответствующие значения волновой функций ψ из решения уравнения Шредингера с учетом условия нормировки:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E - \frac{m_e \omega_0^2}{2} x^2 \right) \psi = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1. \quad (5)$$

Для решения задачи упростим математическую форму уравнения (5) путем введения следующих переменных:

$$\lambda = 2E/\hbar\omega_0, \quad \xi = x/x_0, \quad x_0 = \sqrt{\hbar/m_e\omega_0}.$$

После некоторых преобразований уравнения (5), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно волновой функции $\psi = \psi(\xi)$ и условие нормировки в следующем виде:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi = 0, \quad x_0 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\xi)|^2 d\xi = 1. \quad (6)$$

Решением данного уравнения будут функции, соответствующие собственным значениям параметра $\lambda_n = 2n + 1$:

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}},$$

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

С точки зрения квантовой механики, энергия осциллятора (электрона) E_n (7) принимает дискретный квантовый ряд значений в зависимости от числа n (рисунок 1). Это качественно отличается от представления в классической физике, где полная энергия осциллятора имеет непрерывный ряд значений. Число n определяет номер квантового уровня и называется главным квантовым числом, которое определяет значение энергии осциллятора E_n .

Определим плотность вероятности $|\psi|^2$ нахождения электрона в потенциальном электрическом поле ядра атома (рисунок 1), который совершает колебания относительно минимума потенциальной энергии $U(0) = 0$. Из решения (7) видно, что в зависимости от числа n , электрон может находиться на различных расстояниях от ядра атома водорода. С наибольшей вероятностью при $n = 0$ в области $U(0) = 0$ его можно обнаружить на расстоянии первой (боровской) орбиты. Вероятность нахождения электрона в области минимума потенциальной энергии при $n = 1$ практически равна нулю (рисунок 1, отмечено синим кружком), и это состояние повторяется для всех нечетных значениях n . Причем с ростом n область вероятности нахождения электрона в атоме распадается на подобласти кратные n и не ясно, в какой из них реально находится электрон.

Примечание. В результате решения уравнения Шредингера определена вероятность нахождения электрона в атоме, что было подтверждено экспериментально. Дискретное число $n = 0, 1, 2, \dots$, установленное математически из решения дифференциального уравнения, получило физическую интерпретацию, как главное квантовое число.

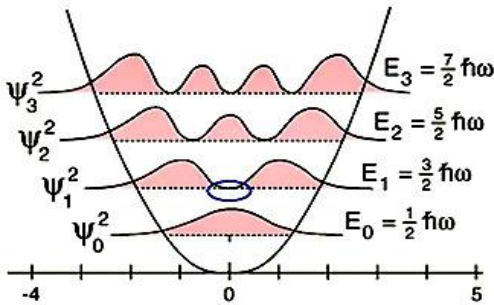


Рисунок 1 – Плотность вероятности нахождения электрона $|\psi|^2$ в атоме в зависимости от значения главного квантового числа n

3. Ротатор. Рассмотрим движение электрона относительно неподвижного ядра атома, предполагая, как это следует из теории ротатора, что он совершает сферические вращения на одном и том же расстоянии вокруг данного неподвижного центра. В этом случае потенциальная энергия электрона в атоме не меняется во всех его положениях, и её можно положить равной нулю $U(r) = 0$.

Для решения уравнения Шредингера воспользуемся сферической системой координат r, θ, φ с началом в неподвижном центре. Тогда уравнение (3) будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} E \psi = 0.$$

Учитывая момент инерции электрона $I = m_e r^2$ и постоянное значение длины оси ротатора ($\partial \psi / \partial r = 0$), запишем данное уравнение так:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \lambda \psi = 0, \quad \lambda = \frac{2I}{\hbar^2} E. \quad (8)$$

Собственные значения функции ψ определяются из решения дифференциального уравнения (8) с учетом граничных условий, ограниченности решения в точках $\theta = 0$, $\theta = \pi$ и условия нормировки:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\psi|^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi = 1.$$

Уравнение решается методом разделения переменных (см. § 6.5, 6.6). В результате решения получим нормированные сферические функции и присоединенные функции Лежандра, соответствующие собственным значениям параметра $\lambda = l(l + 1)$:

$$\psi_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\varepsilon_m \pi(l+m)}} Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)$$

$$\left(\varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m = 0 \\ 1 & \text{при } m \neq 0 \end{cases} \right), \quad (9)$$

$$Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = P_l^{(m)}(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}, \quad (m = 0, 1, \dots, l).$$

Учитывая выражение для постоянной λ из формулы (8), находятся собственные квантованные значения энергии электрона (ротатора) в атоме:

$$\lambda = l(l + 1) = \frac{2l}{\hbar^2} E, \quad E_{lm} = l(l + 1) \frac{\hbar^2}{2I}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

4. Движение электрона в атоме. Рассмотрим движение электрона в атоме водорода (рисунок 2) массой m_e под действием силы \mathbf{F} электрического положительного поля ядра (протона). Фундаментальное решение уравнения Лапласа (§ 5.3) для потенциальной энергии имеет следующий вид:

$$U(r) = -e^2/r.$$

Запишем уравнение Шредингера с учетом данного выражения для потенциальной энергии:

$$\Delta\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0, \quad (11)$$

здесь координата r – расстояние электрона от ядра; e – отрицательный заряд электрона, равный заряду ядра (протона).

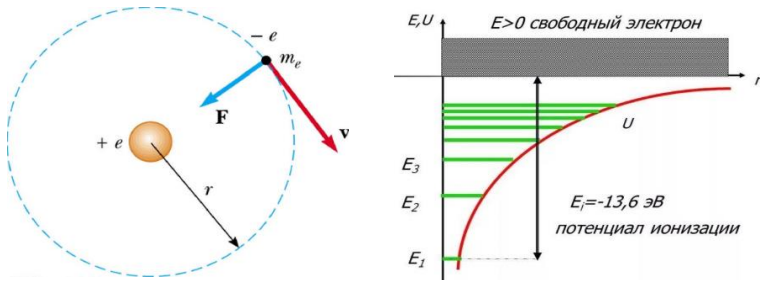


Рисунок 2 – Движение электрона в атоме водорода и распределение потенциальной энергии электрического поля ядра протона с учетом квантовых значений энергии E_n

Для решения задачи введем сферическую систему координат с началом в ядре атома:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} \psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0. \quad (12)$$

Определим собственные значения E во всем пространстве изменения аргумента, для которых уравнение (12) допускает непрерывное решение, удовлетворяющее условию нормировки:

$$\int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |\psi(r, \varphi, \theta)|^2 \sin \theta d\theta = 1.$$

Решение уравнения (12) находится методом разделения переменных, полагая $\psi(r, \theta, \varphi)$ в виде произведения двух функций:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = X(r) Y_l^{(m)}(\theta, \varphi). \quad (13)$$

Подставим данное решение в уравнение (12), и в результате преобразований получим два уравнения относительно функций $X(r)$ и сферической функции Лежандра $Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dX}{dr} + \left[\frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] X = 0, \\ \Delta \theta_{\theta, \varphi} Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) + l(l+1) Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение относительно функции $X(r)$ упрощается с учетом введения новых величин, соответствующих единицам измерения длины и энергии:

$$\begin{aligned} X = \frac{1}{\sqrt{\rho}} y, \quad a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}, \quad E_0 = \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = \frac{e^2}{a}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad \varepsilon = \frac{E}{E_0} \quad (\varepsilon < 0), \\ \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dy}{d\rho} + \left(2\varepsilon + \frac{2}{\rho} - \frac{s^2}{4\rho^2} \right) y = 0, \quad s = 2l + 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим в качестве независимой переменной величину $x = \rho \sqrt{-8\varepsilon}$ и получим следующее уравнение:

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - \frac{1}{4} \left(x + \frac{s^2}{x} \right) y + \lambda y = 0, \quad (16)$$

Из решения данного уравнения (16) собственные значения λ и собственные значения функции определяются с точностью до постоянного множителя, и выражаются через обобщенные полиномы Чебышева–Лягерра $L_{n_r}^s(x)$:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}}, \quad \lambda = n_r + \frac{s+1}{2}, \quad y_{n_r}(x) = x^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_r}^s(x). \quad (17)$$

Учитывая, что $s = 2l + 1$, получаем значения: $\lambda = n_r + l + 1 = n$, где $n = 1, 2, \dots$. Целое число n называется главным квантовым числом; n_r – радиальным квантовым числом; l – азимутальным квантовым числом. Согласно (17), заменяя λ его выражением, получим квантованные значения энергии, зависящие от главного квантового числа n :

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2}.$$

С учетом энергии кванта $E = \hbar\omega = h\nu$, получим значения частот спектральных линий и известную в спектроскопии постоянную Ридберга:

$$\nu = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2 h} = \frac{R}{n^2}, \quad R = \frac{m_e e^4}{4\pi\hbar^3}.$$

Наблюдаемые в экспериментах спектральные линии частотой ν_{nn_1} соответствуют переходу электрона из состояния с энергией E_n в состояние с энергией E_{n_1} . Частота ν_{nn_1} кванта, излучаемого при данном квантовом переходе электрона, равна:

$$\nu_{nn_1} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Из данного выражения следуют экспериментальные серии спектральных линий: Лаймана ($n_1 = 1$), Бальмера ($n_1 = 2$), Пашена ($n_1 = 3$), Брекета ($n_1 = 4$) и Пфунда ($n_1 = 5$) (рисунок 3).

Найденный дискретный спектр отрицательных собственных значений энергии E_n электрона состоит из бесконечного множества чисел с точкой сгущения теоретически до нуля (рисунок 2), а практически до размеров, соизмеримых с радиусом ядра атома.

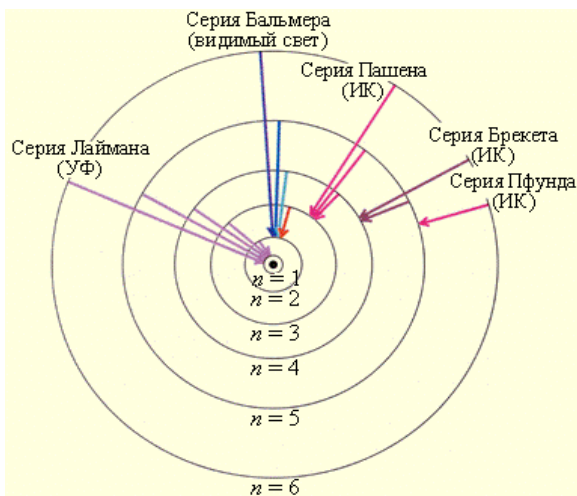


Рисунок 3 – Серии спектральных линий излучения атома водорода: n – главное квантовое число

Наличие непрерывного спектра положительных собственных значений E на рисунке 2 отражает тот факт, что электрон уже не связан с ядром, но все еще находится в его электрическом поле (аналог ионизованного атома водорода).

Определим собственные функции атома водорода $\psi(r, \theta, \varphi)$. Для этого из выражений (13) и (17) найдем радиальную функцию $X(\rho)$:

$$X_{nl}(\rho) = A_n \left(\frac{2\rho}{n}\right)^l e^{-\frac{\rho}{n}} L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2\rho}{n}\right),$$

где A_n – нормировочный множитель определяется из условия нормировки:

$$\int_0^{\infty} \rho^2 X_{nl}^2(\rho) d\rho = 1.$$

Вычисляем значение A_n и получаем следующее выражение для нормированных радиальных функций:

$$X_{nl}(\rho) = \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2g(n+l)!}} \left(\frac{2\rho}{n}\right)^l e^{-\frac{\rho}{n}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2\rho}{n}\right). \quad (18)$$

В силу формул (13), (9) и (18), нормированные собственные волновые функции имеют следующий вид:

$$\psi_{mnl}(\rho, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\varepsilon_m \pi(1+m)!}} Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) X_{nl}(\rho).$$

5. Квантовые числа. Состояние электрона в атоме определяется из решения уравнения Шредингера волновой функцией и дискретными квантовыми числами n , l , m . Экспериментально установлено, что состояние электрона зависит и от четвертого спинового квантового числа s .

Главное квантовое число n устанавливает номер квантового уровня и энергию электрона (17) в любом квантовом состоянии.

Орбитальное квантовое число l характеризует форму круговых и эллиптических орбит электрона путем квантования орбитального момента импульса и орбитального магнитного момента. Орбитальное число принимает значения $l = 0, 1, \dots, n - 1$, и каждому значению l соответствует $2l + 1$ значений m .

Магнитное квантовое число m определяет пространственное расположение орбит электрона и квантовые проекции орбитального, спинового и суммарного моментов на выделенное в пространстве направление. Магнитное число принимает следующие значения: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.

Спиновое квантовое число s отражает направление магнитного момента, возникающего при вращении электрона вокруг собственной оси, которое принимает следующие значения: $s = \pm 1/2$.

Примечание. При значении $n = n_r + l + 1$ ($n_r = 0, 1, 2, \dots$), квантовое число l не может быть больше $n - 1$. Отсюда следует, что заданному значению n и энергии E_n соответствуют n^2 различных собственных функций:

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Принцип Паули. В 1925 году швейцарский физик-теоретик Вольфганг Паули установил квантовый механический принцип (принцип запрета Паули): **в атоме не может быть двух электронов с одинаковыми квантовыми числами.** Принцип устанавливает максимальное число электронов N_n на n квантовом уровне атома: $N_n = 2n^2$. Учитывая свойство квантовых чисел, на каждом электронном слое атома все электроны распределены по оболочкам: на первом могут находиться 2 электрона, на втором 8 на третьем 18 и т. д.

*Краткая история квантовой механики

1. *Излучение спектральных линий.* При нагревании химических элементов до высоких температур происходит излучение электромагнитных волн с характерными для данного вещества спектральными линиями. В результате спектроскопических наблюдений за излучением Солнца немецким физиком Йозефом Фраунгофером в 1814 г. было обнаружено свыше 570 спектральных линий излучения различных химических элементов. Среди данных линий солнечного спектра в 1862 г. шведский физик Андерс Ангстрем выделил четыре линии атома водорода. Для объяснения закономерности излучения спектральных линий водорода в видимой области спектра, в 1885 г. Иоганн Бальмер (швейцарский учитель математики) предложил определенную математическую закономерность изменения длины волны (формула Бальмера). Шведский ученый физик Йогансен Ридберг не смог объяснить физический

смысл изменения частоты излучения спектральных линий, и в 1888 г. привел формулу Бальмера к следующему виду:

$$\nu_{nn_1} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ Гц.}$$

Правильность данной формулы была подтверждена последующими экспериментальными открытиями спектральных линий в ультрафиолетовом и инфракрасном электромагнитном диапазонах излучения атома водорода (рисунок 3), которые названы в честь открывших их ученых сериями Лаймана (1906 г.), Пашена (1908 г.), Брекета (1922 г.), Пфунда (1924 г.), Хемпфри (1953 г., $n_1 = 6$), Стронг-Хансена (1972 г., $n_1 = 7$). Швейцарский физик и математик Вальтер Ритц в 1908 г. для объяснения механизма образования спектральных серий предположил, что электроны в атоме совершают колебания как постоянные магниты, и потому излучают спектральные линии.

2. *Кванты излучения.* Впервые революционную гипотезу о квантовых свойствах материи сделал в 1900 г. Макс Планк при объяснении излучения абсолютно черного тела, полагая, что излучение происходит не непрерывным потоком, как это следует из классической электродинамики, а порциями – квантами с энергией $E = h\nu$.

3. *Строение атома.* В 1897 г. английский физик Джозеф Джон Томсон в результате опытов с катодными лучами, открыл первую элементарную частицу – электрон и предложил модель атома, как некоторое положительно заряженное тело с заключёнными внутри него электронами (булочка с изюмом).

В 1904 г. японский физик Хантаро Нагаока, по аналогии с планетой Сатурн, выдвинул гипотезу, что атом представляет собой положительное ядро с вращающимися электронными кольцами.

Данные модели не подтвердили проводимые с 1909 по 1911 г. эксперименты Эрнеста Резерфорда и его сотрудников Ханса Гейгера и Эрнеста Марсдена, по рассеиванию альфа-частиц на золотой фольге. Предложенная Резерфордом планетарная модель атома представляла собой подобие Солнечной системы, в которой электроны вращаются по орбитам вокруг расположенного в центре тяжёлого положительно заряженного ядра. Данная модель противоречила классической электродинамике, так как при вращении вокруг ядра атома электрон должен излучать электромагнитные волны, терять энергию и в итоге упасть на ядро, что в реальности не происходит. Все попытки объяснить движение электрона в электрическом поле атомного ядра на основе классической механики были неудачными.

4. *Постулаты Бора.* В 1913 г. Нильс Бор обратил внимание на квантовый смысл излучения спектральных линий в формуле Ридберга и предложил два постулата для объяснения стабильности движения электрона в планетарной модели атома Резерфорда:

- электроны в атоме находятся в особом энергетическом состоянии, при котором не излучают электромагнитные волны;
- излучение кванта энергии происходит при переходе электрона из одного состояния с большей энергией E_k , в другое состояние с меньшей E_n , и определяется выражением: $E_k - E_n = h\nu$.

Постулаты Бора спасли планетарную модель атома, объяснили закономерности спектров излучения атома водорода, определили через мировые константы постоянную Ридберга $R = m_e e^4 / 4\pi\hbar^3$ и заложили основу будущего развития физики – квантовую механику.

5. *Волновые и корпускулярные свойства электрона.* В 1923 г. французский физик Луи де Бройль выдвинул гипотезу, что электрон, подобно кванту света, обладает волновыми и корпускулярными свойствами. Поэтому, при движении электрона вокруг ядра атома со скоростью v , на каждой круговой орбите должно укладываться целое число стоячих длин волн, равных $\lambda = h/mv$ (рисунок 4).

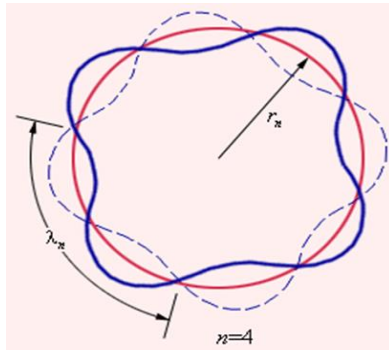


Рисунок 4 – Иллюстрация стоячей длины волны де Бройля электрона в атоме λ_n (синий цвет – сплошная и пунктирная линии) на круговой орбите радиуса r_n (красная линия) для главного квантового числа $n = 4$ (рисунок из интернета)

Опытное подтверждение теории де Бройля было сделано в 1927 г. американскими физиками Клинтон Дэйвиссоном и Лестером Джермером, наблюдавшими дифракционную картину рассеивания электронов на монокристалле никеля.

6. *Уравнении Шредингера.* В 1925 г. австрийский физик-теоретик Эрвин Шредингер, по аналогии с волновым уравнением классической электродинамики и с учетом волновых и квантовых свойств движения электрона в поле атомного ядра, предложил дифференциальное уравнение

(1), определяющее вероятность нахождения электрона в атоме (интерпретация Макса Борна). Как следует из решения уравнения Шредингера, например, в основном состоянии $1s$ электрон может находиться на различных расстояниях от ядра атома водорода (рисунок 5), но с наибольшей вероятностью он будет на расстоянии, равном *первой боровской орбите*

$$r_1 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = 0,528 \cdot 10^{-8}\text{см.}$$

В состоянии $2s$ ($n = 2$) максимальная вероятность обнаружения электрона наблюдается на расстоянии $r = 4r_1$ от ядра (рисунок 5). Поэтому атом водорода можно теоретически представить в виде сферически симметричного электронного облака, в центре которого находится ядро.

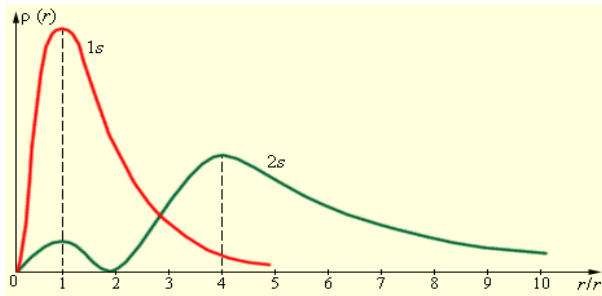


Рисунок 5 – Распределения вероятности нахождения электрона в атоме водорода на разных расстояниях от ядра в состояниях $1s$ и $2s$ (рисунок из интернета)

Уравнение Шредингера открыло новое направление физики в изучении движения электрона в электрическом поле атомного ядра – **квантовую механику**. Уравнение играет такую же важную роль в атомной физике, как второй закон Ньютона при рассмотрении движения электрона

со скоростями, намного меньше скорости света или в электродинамике, как уравнения Максвелла.

Отметим, что квантовый механический принцип Паули теоретически объяснил повторяемость физических и химических свойств атомов в загадочной Периодической системе элементов Дмитрия Ивановича Менделеева в 1869 г., которая определяется фактически поведением внешних валентных электронов.

При определении вероятности нахождения электрона в атоме для случая релятивистских скоростей или учета спина, применяются обобщенные уравнения Клейна–Гордона, Паули, Дирака.

7. *Примечание.* В какой точке области вероятности в атоме находится электрон (рисунок 5) и с какой скоростью он движется или остается неподвижным? Как отметил Макс Борн (немецкий математик и физик), движение электрона в атоме следует вероятностному закону, который определяется уравнением Шредингера, но сама вероятность должна устанавливаться в соответствии с законом причинности. В *классической механике* можно проследить за траекторией движения электрона в любой момент времени. В *квантовой механике* понятие траектории движения вообще отсутствует, так как волновая функция описывает состояние, определяющее только вероятность нахождения электрона в той или иной точке пространства.

Поскольку в настоящее время нет ответов на данные фундаментальные вопросы, то необходимо развитие *новой теории*, включающей в определение вероятности нахождения электрона в поле атомного ядра и траекторию движения электрона.

II. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Практические занятия в объеме **18 часов** составлены на основе Краткого курса лекций «Линейные и нелинейные уравнения физики» и распределены по содержанию материала лекций следующим образом:

2 часа – обыкновенные дифференциальные уравнения;

4 часа – классификация дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, приведение к каноническому виду;

4 часа – уравнения гиперболического типа;

4 часа – уравнения параболического типа;

2 часа – уравнения эллиптического типа;

2 часа – специальные функции.

Кроме того, дополнительно отводится **18 часов** на проведение контрольных работ, самостоятельной работы, подготовки и сдачи реферата.

Отчетность студента: тетрадь с практическими задачами, результаты контрольных работ и оценка защиты реферата.

Основная цель практических занятий – закрепить материал, изложенный на лекциях, дать студентам самостоятельно освоить элементарные технические навыки решения задач по основным разделам дисциплины «Линейные и нелинейные уравнения физики».

При проведении практических занятий широко используются задачи и методы их решения, изложенные в классических учебниках, учебных пособиях и монографиях [1–11]. Кроме методики решения задач, большое внимание уделяется физическому анализу и интерпретации

полученных результатов. Необходимо показать студентам, как с помощью теоретических моделей и математических уравнений открываются большие возможности в изучении различных физических явлений, их понимания и дальнейшего применения для определенных практических целей. В качестве примеров приведены задачи с подробными решениями и анализом полученных результатов.

Занятие 1

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Практические занятия по Краткому курсу «Линейные и нелинейные уравнения физики» начинаются с повторения некоторых методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков. Для этого из курса математического анализа необходимо вспомнить, что собой представляют функция, производная, интеграл, обыкновенные дифференциальные уравнения и методы их решения:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = f(x), \quad dy = f(x) dx, \quad y(x) = \int f(x) dx + C,$$

где $y(x)$ – функция; x – аргумент; y' – производная функции; $f(x)$ – заданная функциональная зависимость; C – постоянная интегрирования.

В качестве примера рассматриваются простые методические методы решения задач из некоторых разделов теоретической механики, гидродинамики, физики плазмы и атомной физики. Большое внимание уделяется постановке задачи, методике решения и физической интерпретации полученных результатов.

Механика, кинематика

Пример 1.1. Автомобиль движется прямолинейно с постоянным ускорением $W_0 = \text{const}$. Определить скорость и уравнение движения автомобиля. В начальный момент времени автомобиль находился в покое.

Решение. Направим ось x по направлению движения автомобиля и предполагаем, что в начальный момент времени он находился в покое в начале координат: $t = 0, x = 0, V_x = 0$.

Скорость и уравнение движения автомобиля определяются из решения дифференциальных уравнений механики [6, 7], которые устанавливают связь между ускорением, скоростью и уравнением движения:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= W_0, \quad dV_x = W_0 dt, \quad V_x = \int W_0 dt = W_0 t + C_1, \quad V_x = \frac{dx}{dt}, \\ dx &= \int V_x dt = (W_0 t + C_1) dt, \quad x(t) = \\ &= \int (W_0 t + C_1) dt = \frac{1}{2} W_0 t^2 + C_1 t + C_2, \end{aligned}$$

где постоянные интегрирования C_1, C_2 находятся из задания начальных условий: $C_1 = 0, C_2 = 0$. Окончательные выражения для скорости и уравнения движения автомобиля запишутся в следующем виде:

$$V_x = W_0 t, \quad x(t) = W_0 t^2 / 2.$$

Из данных формул видно, что при прямолинейном движении автомобиля с постоянным ускорением, его скорость изменяется пропорционально времени, а движется автомобиль прямолинейно вдоль оси x пропорционально квадрату времени.

Примечание. Впервые зависимости скорости и пройденного пути материального тела от времени в поле тяготения Земли установил Галилей, бросая различные тела с Пизанской башни. Галилео Галилей – итальянский астроном, философ, математик, основатель экспериментальной физики, сделавший ряд выдающихся открытий.

Механика, динамика

Пример 1.2. *Снаряд вылетает из ствола орудия со скоростью 700 м/с под углом 45° к горизонту. Определить траекторию движения, скорость, высоту, время и дальность полета снаряда.*

Решение. Для определения движения снаряда под действием внешних сил, воспользуемся вторым законом механики Ньютона [6, 7]. Начало прямоугольной системы координат x, y располагается на конце ствола орудия. Проводится условная траектория движения снаряда в поле тяготения Земли, и распределяются действующие на снаряд силы (рисунок 1.1). Поскольку влияние силы сопротивления воздуха не учитывается, то траектория движение снаряда определяется начальной скоростью, под каким углом к горизонту был выпущен снаряд и силой тяготения Земли, которая направлена вдоль оси y вертикально вниз: $F_x = 0, F_y = -P = -mg$.

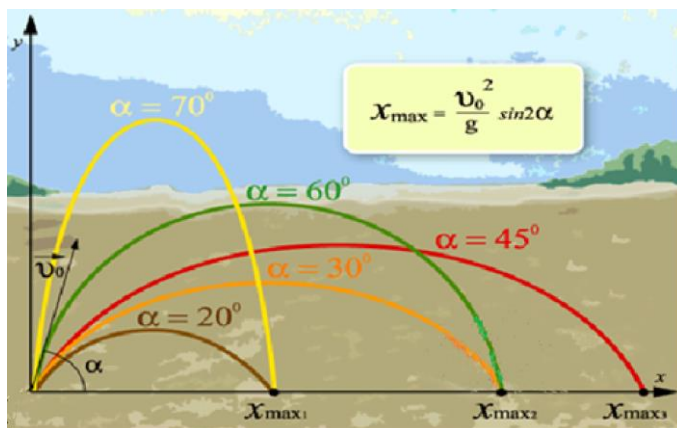


Рисунок 1.1 – Траектории движения снаряда в поле тяготения Земли (рисунок из интернета)

Дифференциальные уравнения движения снаряда массой m в проекциях на оси координат запишутся так:

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -mg; \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Для однозначного решения дифференциальных уравнений задаются два начальных условия (начальное положение снаряда и начальная скорость) в проекции на оси координат:

$$t = 0: \quad x_0 = 0, \quad v_{x0} = v_0 \cos \alpha; \quad y_0 = 0, \quad v_{y0} = v_0 \sin \alpha.$$

Из решения дифференциальных уравнений, с учетом начальных условий, определяются скорости и уравнения движения снаряда $x(t), y(t)$:

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = 0, \quad v_x = v_{x0}, \quad \frac{dx}{dt} = v_{x0},$$

$$dx = v_{x0} dt, \quad \int_0^x dx = \int_0^t v_{x0} dt, \quad x(t) = v_0 t \cos \alpha;$$

$$dv_y = -g dt, \quad \int_{v_{y0}}^{v_y} dv_y = -\int_0^t g dt,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_{y0} - gt, \quad dy = (v_{y0} - gt) dt,$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t (v_{y0} - gt) dt, \quad y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Для определения траектории движения снаряда из одного уравнения находится время, ставится в другое, и устанавливается функциональная зависимость между уравнениями движения:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}, \quad y(x) = x \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \alpha)^2} = x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{2(v_0 \cos \alpha)^2} \right).$$

Как следует из полученного решения, снаряд движется по параболической траектории $y(x)$. Для определения времени (t_{max}) и дальности ($x_{max} = x(t_{max})$) полета снаряда используются следующие физические условия: в момент падения снаряда на Землю уравнение движения по координате $y(t_{max}) = 0$. Из данного условия определим, что

$$x_{max} \left(tg\alpha - \frac{g x_{max}}{2(v_0 \cos\alpha)^2} \right) = 0, \quad v_0(t_{max} \sin\alpha - \frac{g t_{max}^2}{2}) = 0;$$

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad t_{max} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Для определения высоты полета снаряда y_{max} предполагается, что вследствие симметрии траектории движения снаряда, максимальное значение координаты $y(x)$ достигается на расстоянии, равном половине длины полета снаряда $x_{max}/2$, что соответствует времени $t_{max}/2$. Подставим данные значения в уравнение движения и получим:

$$y_{max} = v_0 t_{max} \sin\alpha - \frac{g t_{max}^2}{2} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}.$$

В зависимости от начального угла наклона ствола орудия α , в результате решения задачи устанавливается траектория движения снаряда, максимальная длина, высота и время полета (рисунок 1.1). В качестве примера проводится расчет данных характеристик для значений угла $\alpha = 45^\circ$ и 90° , а ускорение свободного падения полагается равным $g = 9,8 \text{ м/с}^2$:

$$1) \alpha = 45^\circ, \quad x_{max} = \frac{v_0^2}{g} = 49 \text{ км},$$

$$t_{max} = \frac{\sqrt{2}v_0}{g} = 99,4 \text{ с}, \quad y_{max} = \frac{v_0^2}{4g} = 12,25 \text{ км};$$

$$2) \alpha = 90^\circ, \quad x_{max} = 0,$$

$$t_{max} = \frac{2v_0}{g} = 140 \text{ с}, \quad y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 24,5 \text{ км}.$$

Из результатов расчета видно, что максимальная дальность и время полета снаряда достигается при расположении ствола орудия под углом, равным $\alpha = 45^\circ$. Максимальная высота полета снаряда будет при $\alpha = 90^\circ$, но в этом случае снаряд упадет обратно в ствол орудия, если не учитывать влияние сил Кориолиса и бокового ветра. Дальность полета снаряда x_{max} зависит от действия сил инерции и гравитации, которые определяются заданными значениями g , α , v_0 . Если в момент выстрела углы наклона ствола орудия равны, например, $\alpha = 20^\circ$ и 70° или $\alpha = 30^\circ$ и 60° , то дальности полета снаряда совпадают (рисунок 1.1). Отметим, что в этом случае не учитываются силы сопротивления воздуха и влияние ветра.

Примечание. Для определения высоты полета снаряда можно подойти другим способом: в точке $x = x_{max}/2$ (рисунок 1.1) уравнения траектории движения $y = y(x)$ реализуется экстремум $dy/dx = 0$. Необходимо определить производную и подставить в полученное выражение значение $x_{max}/2$.

Гидродинамика

Пример 1.3. *Определить скорость изотермического установившегося течения жидкости в длинном цилиндрическом канале, если заданы радиус канала R и расход жидкости G .*

Решение. Для решения задачи воспользуемся цилиндрической системой координат r , φ , z и предполагаем, что при установившемся осесимметричном течении жидкости в длинном цилиндрическом канале, компоненты и производные скорости потока соответственно будут равны:

$$V_r = 0, V_\varphi = 0, V = V_z, \partial V / \partial t = 0, \partial V / \partial \varphi = 0, \partial V / \partial z = 0.$$

Тогда уравнения движения Навье–Стокса (1.3) запишутся в таком виде [8, 9]:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r\eta \frac{dV}{dr} \right) = \frac{dP}{dz}, \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial r} = 0.$$

Из данных выражений следует, что давление в канале не изменяется в радиальном и азимутальном направлениях, а является функцией только аксиальной координаты z : $P = P(z)$. Поэтому градиент давления в аксиальном направлении не зависит от координат r , φ , и в уравнении Навье–Стокса входит как полная производная от z : $\partial P / \partial z = dP / dz$.

Для определения скорости течения жидкости задаются граничные условия, предполагая, что на оси выполняется условие симметрии, а на стенках канала, вследствие вязкости течения, наблюдается прилипание жидкости к стенкам канала, и её скорость равна нулю:

$$r = 0: dV/dr = 0, \quad r = R: V_R = 0.$$

Поскольку для изотермического течения вязкость и плотность жидкости, постоянны ($\eta, \rho = const$), то решение уравнения движения Навье–Стокса с учетом граничных условий будет равно:

$$d \left(r\eta \frac{dV}{dr} \right) = \frac{dP}{dz} r dr, \quad \int_0^{dV} d \left(r\eta \frac{dV}{dr} \right) = \int_0^r \left(\frac{dP}{dz} r dr \right), \quad r\eta \frac{dV}{dr} = \frac{dP}{dz} \frac{r^2}{2},$$

$$dV = \frac{1}{2\eta} \frac{dP}{dz} r dr, \quad \int_V^0 dV = \frac{1}{2\eta} \frac{dP}{dz} \int_r^R r dr,$$

$$V = -\frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dz} (R^2 - r^2), \quad V = -\frac{R^2}{4\eta} \frac{dP}{dz} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Видно, что при течении жидкости в протяженном цилиндрическом канале, реализуется параболический

профиль скорости (течение Пуазейля). Скорость на оси цилиндра ($r = 0$: $V = V_0$) и градиент давления определяются из условия заданного расхода жидкости:

$$r = 0: V = V_0 = -\frac{R^2}{4\eta} \frac{dP}{dz}, \quad V = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right);$$

$$G = 2\pi \int_0^R \rho V r dr = 2\pi \rho V_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr =$$

$$= \pi \rho V_0 \left(R^2 - \frac{R^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \pi R^2 \rho V_0;$$

$$V_0 = -\frac{R^2}{4\eta} \frac{dP}{dz} = \frac{2G}{\rho \pi R^2}, \quad \frac{dP}{dz} = -\frac{8\pi \eta G}{\rho (\pi R^2)^2}.$$

Из полученных выражений следует, что на оси канала достигается максимальное значение скорости, которое пропорционально расходу жидкости и обратно пропорционально плотности и площади сечения. Градиент давления пропорционален вязкости и расходу жидкости, и обратно пропорционален плотности и квадрату площади сечения.

Примечание. Впервые данную зависимость скорости и градиента давления экспериментально установил в 1841 г. Жан Луи Мари Пуазейль – французский врач, который занимался вопросами течения крови в сосудах животных и людей.

Физика плазмы

Пример 1.4. *Определить давление и напряженность магнитного поля в протяженном цилиндрическом канале плазмотрона, если заданы радиус канала R , электрический ток I и давление у стенок канала равно атмосферному.*

Решение. Для решения воспользуемся цилиндрической системой координат r, φ, z и предполагаем, что

в протяженном канале электрический ток $\mathbf{j}(j_r, j_\varphi, j_z)$ направлен вдоль оси z , а напряженность магнитного поля $\mathbf{H}(H_r, H_\varphi, H_z)$ имеет азимутальную составляющую:

$$j_r = 0, j_\varphi = 0, j = j_z; H_r = 0, H = H_\varphi, H_z = 0.$$

Тогда из закона Ома [9, 10], учитывая, что электропроводность σ является скалярной функцией, компоненты напряженности электрического поля будут равны:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, E_r = 0, E_\varphi = 0, E = E_z.$$

Из уравнения Фарадея $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ следует, что производная $\partial E / \partial r = 0$, а напряженность электрического поля постоянна по сечению канала и является функцией координаты z : $E = E(z)$. Определим значение напряженности электрического поля из закона Ома и выражения для полного электрического тока [9]:

$$I = 2\pi \int_0^R j r dr = 2\pi \int_0^R \sigma E r dr = 2\pi E \int_0^R \sigma r dr, E = I / 2\pi \int_0^R \sigma r dr.$$

Для определения напряженности магнитного поля и давления в протяженном цилиндрическом канале, воспользуемся уравнением Максвелла и условием равновесия сил, действующих на плазму в поперечном сечении канала плазмотрона, где электромагнитные силы, сжимающие столб плазмы, уравновешиваются градиентом газостатического давления:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r H_\varphi) = j_z, \mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla P, \mu j_z H_\varphi = -\frac{\partial P}{\partial r}.$$

Граничные условия на оси симметрии и стенках канала относительно напряженности магнитного поля и давления соответственно будут равны:

$$r = 0: H_\varphi = 0; r = R: P = P_R.$$

Проинтегрируем уравнения с учетом данных граничных условий:

$$d(rH_\varphi) = j_z r dr, \quad \int_0^{H_\varphi} d(rH_\varphi) = \int_0^r j r dr, \quad H_\varphi = \frac{1}{r} \int_0^r j r dr;$$

$$dP = -\mu j_z H_\varphi dr, \quad \int_{P_R}^P dP = -\mu \int_R^r j H_\varphi dr,$$

$$P = P_R + \mu \int_r^R j \left(\frac{1}{r} \int_0^r j x dx \right) dr.$$

Путем подстановки значения плотности электрического тока, из закона Ома выражения для H_φ и P будут соответственно равны:

$$H_\varphi = \frac{E}{r} \int_0^r \sigma r dr, \quad P = P_R + \mu E^2 \int_r^R \left(\frac{\sigma}{r} \int_0^r \sigma x dx \right) dr.$$

Для **оценки** изменения напряженности магнитного поля и давления по сечению цилиндрического канала ($0 \leq r \leq R$), предполагается, что *электропроводность плазмы постоянна* по всему сечению канала ($\sigma = const$). Тогда значения H_φ , P и E приводятся к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{1}{2} \sigma E r, \quad P = P_R + \mu \sigma^2 E^2 \int_r^R \frac{r}{2} dr = P_R + \mu \sigma^2 E^2 \frac{(R^2 - r^2)}{4} = \\ &= P_R + \mu \frac{\sigma^2 E^2 R^2}{4} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = P_R + (P_O - P_R) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad E = \frac{I}{\sigma \pi R^2}. \end{aligned}$$

Подставим полученное выше значение напряженности электрического поля в выражения для определения H_φ , P :

$$H_\varphi = \frac{1}{2} \sigma \frac{I}{\sigma \pi R^2} r = \frac{I}{2\pi R^2} r = \frac{I}{2\pi R} \frac{r}{R} = H_R \frac{r}{R}, \quad H_R = \frac{I}{2\pi R};$$

$$P = P_R + (P_O - P_R) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

$$P_O = P_R + \mu \frac{\sigma^2 E^2 R^2}{4} = P_R + \mu \left(\frac{I}{2\pi R} \right)^2 = P_R + \mu H_R^2.$$

Из данных выражений видно, что напряженность магнитного поля увеличивается линейно от оси симметрии к стенкам канала плазмотрона, где достигает максимального значения. Магнитное давление μH_φ^2 равно нулю на оси симметрии, возрастает параболически по сечению канала и достигает максимального значения вблизи стенок плазмотрона μH_R^2 . Газостатическое давление в плазме максимально на оси плазмотрона, изменяется пропорционально квадрату по отношению силы тока к радиусу канала. Вследствие действия электромагнитных сил, газостатическое давление по сечению плазмотрона уменьшается по параболе к стенкам канала, где становится равным атмосферному давлению P_R .

Атомная физика

Пример 1.5. *В исследуемом образце определить изменение скорости радиоактивного распада в зависимости от начального веса P_0 и постоянной радиоактивного распада λ . Оценить среднее время «жизни» и период полураспада радиоактивных элементов, приведенных в таблице.*

Решение. Воспользуемся дифференциальным уравнением закона радиоактивного распада и его решением, определяющим изменение числа атомов $N(t)$ в зависимости от постоянного радиоактивного распада [11]:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad t = 0: N(0) = N_0; \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Выразим данное решение через массу $m(t)$ и вес $P(t)$, учитывая массу атома исследуемого радиоактивного вещества m_a и ускорение свободного падения g :

$$m(t) = N(t)m_a = m_0 e^{-\lambda t}, \quad m_0 = N_0 m_a,$$

$$P(t) = m(t)g = P_0 e^{-\lambda t}, \quad P_0 = m_0 g,$$

где m_0, P_0 – массы и вес радиоактивного вещества в начальный момент времени ($t = 0$). Из данных выражений следует, что с течением времени масса радиоактивного вещества, так же как вес и число атомов, уменьшаются по экспоненциальному закону, и для больших моментов времени они стремятся к нулю:

$$t \rightarrow \infty: m \rightarrow 0, P \rightarrow 0, N \rightarrow 0.$$

Скорость распада радиоактивного вещества определяется путем дифференцирования выражения, определяющего зависимость числа атомов от времени:

$$\begin{aligned} I(t) &= -\frac{dN}{dt} = -\frac{d}{dt}(N_0 e^{-\lambda t}) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \\ &= I_0 e^{-\lambda t}, I_0 = \lambda N_0 = P_0 \lambda / g m_a. \end{aligned}$$

Как следует из решения, изменение скорости радиоактивного распада происходит по экспоненциальному закону и определяется фактически постоянной радиоактивного распада.

Среднее время «жизни» (распада) вещества определяется из закона радиоактивного распада. Число атомов, претерпевших распад в момент времени t , равно dN , а время их «жизни» $t dN$. Среднее время «жизни» τ получается интегрированием по всему промежутку времени радиоактивного распада:

$$\tau = -\frac{1}{N_0} \int_0^{N_0} t dN = \frac{1}{N_0} \int_0^0 t N_0 e^{-\lambda t} (-\lambda) dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Видно, что среднее время «жизни» обратно пропорционально постоянной радиоактивного распада. Подставляя эту величину в экспоненциальные временные зависимости для $N(t)$, видно, что за время τ число радиоактивных атомов (количество распадов в секунду) уменьшаются в e раз.

Период полураспада. На практике большое распространение получила другая временная характеристика – период полураспада $T_{1/2}$, равная времени, в течение которого начальное число радиоактивных атомов (масса или вес) вещества уменьшаются в два раза. Связь этой величины, с постоянной радиоактивного распада, выводится из следующего соотношения:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T},$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T}, \quad \lambda T = \ln 2, \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} = 0,693\tau.$$

Примечание. Примеры расчета характеристик радиоактивного распада. Существующие в природе радионуклиды, возникающие в сложных цепочках распада урана или тория (таблица 1.1), имеют периоды полураспада в очень широкой области изменения значений от $3 \cdot 10^{-7}$ секунды (^{212}Po , полоний) до $1,4 \cdot 10^{10}$ лет (^{232}Th , торий). Само существование многих естественных радиоактивных элементов, несмотря на то, что с момента большего взрыва до синтеза нуклонов прошло более 4,5 млрд лет, является следствием очень больших периодов полураспада урана ^{238}U .

Таблица 1.1 – Характеристики распада некоторых веществ

| Вещество | ^{238}U , уран | ^{235}U , уран | ^{210}Bi , вис- мут | ^{210}Tl , таллий | ^{226}Ra , радий |
|---|----------------------------|----------------------------|---------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| Период полураспада | $4,59 \cdot 10^9$ лет | $7,13 \cdot 10^8$ лет | 4,97 дней | 1,32 минут | 1622, лет |
| Постоянная распада λ, c^{-1} | $4,84 \cdot 10^{-18}$ | $3,9 \cdot 10^{-17}$ | $1,61 \cdot 10^{-6}$ | $8,75 \cdot 10^{-3}$ | $4,36 \cdot 10^{-4}$ |

Задание для самостоятельной работы

Пример 1. Автомобиль движется прямолинейно с постоянной скоростью. Определить уравнение движения автомобиля, если известно, что в начальный момент времени он находился в покое. Ответ: $x(t) = V_0 t$.

Пример 2. Груз массой m сбрасывают с вертолета без начальной скорости. Определить уравнение движения груза без учета и с учетом силы сопротивления воздуха, которая пропорциональна скорости $F = -\lambda V$.

Ответ: $x(t) = \frac{gt^2}{2}$, $x(t) = \frac{mg}{\lambda} \left(t + \frac{m}{\lambda} \left(e^{-\frac{\lambda}{m}t} - 1 \right) \right)$.

Пример 3. Определить период полураспада радия, если его начальный вес был равен P_0 . Ответ: $T = \ln 2 / \lambda$.

Пример 4. Вещество массой m_0 вступает в химическую реакцию. Определить количество вещества, образовавшегося в результате реакции за время t_0 , если известно, что скорость химической реакции пропорциональна массе с константой реакции λ . Ответ: $m = m_0 e^{-\lambda t_0}$.

Занятия 2, 3

2. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными. Приведение уравнений к каноническому виду

Практические занятия начинаются с изучения методики решения дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными от двух независимых переменных [1]:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x,y) = 0. \quad (1)$$

В процессе решения рассматриваются уравнения с постоянными и переменными коэффициентами, проводится классификация уравнения, определяется тип уравнения, приведение уравнения к каноническому виду и упрощение математической формы записи уравнения.

Для классификации дифференциального уравнения (1) и приведения его к каноническому виду применяется следующая методика:

1. Классификация дифференциального уравнения:

- 1.1. Записать условие задачи.
- 1.2. По виду уравнения дать его характеристику.

2. Определение типа уравнения:

- 2.1. Установить коэффициенты при старших производных.
- 2.2. Вычислить дискриминант уравнения.
- 2.3. Определить тип уравнения.

3. Приведение уравнения к каноническому виду:

- 3.1. Составить характеристическое уравнение.
- 3.2. Решить (проинтегрировать) данное уравнение.
- 3.3. Определить канонические переменные.
- 3.4. Преобразовать производные к новым каноническим переменным.
- 3.5. Привести дифференциальное уравнение к каноническому виду.

4. Упрощение линейных дифференциальных уравнений:

- 4.1. Ввести новую функцию и преобразовать производные уравнения.
- 4.2. Подставить в дифференциальное уравнение и собрать слагаемые при одинаковых производных.
- 4.3. Определить неизвестные коэффициенты и упростить уравнение.
- 4.4. Сделать анализ, из сравнения полученного и исходного уравнений.

Пример 2.1. Дать характеристику дифференциального уравнения второго порядка в частных производных относительно функции $u(x, y)$ от двух независимых переменных x, y :

$$u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y + u = 0.$$

Установить тип уравнения, привести уравнение к каноническому виду, упростить полученное каноническое уравнение путем введения новой неизвестной функции $\vartheta(\xi, \eta)$ от двух канонических переменных ξ, η в виде:

$$u(\xi, \eta) = \vartheta(\xi, \eta) \exp(\alpha\xi + \beta\eta),$$

где α, β – постоянные, подлежащие определению (см. лекцию, гл. 2).

Решение. Данное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных относительно функции $u(x, y)$ от двух независимых переменных x, y является однородным ($f(x, y) = 0$) линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

Для определения типа уравнения найдем коэффициенты при старших производных данного уравнения и сравним их с коэффициентами уравнения (1): $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -1$. Вычислим дискриминант характеристического уравнения:

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -(-1) = 1 > 0.$$

Так как дискриминант положительный $D > 0$, то данное уравнение является уравнением **гиперболического типа**.

Для приведения уравнения к каноническому виду, составим характеристические уравнения:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{1,2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{\pm \sqrt{-1(-1)}}{1} = \pm 1.$$

Получили два обыкновенных дифференциальных уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Решаем данные уравнения относительно функции $y(x)$:

$$y|_1 = x + C_1, \quad y|_2 = -x + C_2.$$

Из данных решений находим постоянные C_1, C_2 и через их значения определяем канонические переменные:

$$\xi = C_1 = y - x, \quad \eta = C_2 = y + x.$$

Преобразуем дифференциальное уравнение к новым каноническим переменным ξ, η . Для этого выразим производные функции $u(x, y)$ в данных канонических переменных:

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -1, \quad \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1, \quad \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \quad \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1:$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi (-1) + u_\eta = u_\eta - u_\xi, \quad u_y = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} (-1) + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) +$$

$$+ u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} = u_{\xi\xi} (-1) + u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Подставим значения производных в исходное уравнение, и, путем математических преобразований, приведем его к каноническому виду:

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi + u_\xi + u_\eta + u = \\ = -4u_{\xi\eta} + 2u_\eta + u = 0, \end{aligned}$$

Получилось достаточно простое однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в канонических переменных ξ, η :

$$u_{\xi\eta} - \frac{u_\eta}{2} - \frac{u}{4} = 0.$$

Упростим данное уравнение путем введения новой неизвестной функции $\vartheta(\xi, \eta)$ с помощью следующей подстановки:

$$u(\xi, \eta) = \vartheta(\xi, \eta) \exp(\alpha\xi + \beta\eta).$$

Преобразуем первые и вторые производные относительно новой функции:

$$\begin{aligned} u_\xi = \vartheta_\xi \exp(\alpha\xi + \beta\eta) + \vartheta \alpha \exp(\alpha\xi + \beta\eta), \quad u_\eta = \vartheta_\eta \exp(\alpha\xi + \beta\eta) + \\ + \vartheta \beta \exp(\alpha\xi + \beta\eta), \quad u_{\xi\eta} = \vartheta_{\xi\eta} \exp(\alpha\xi + \beta\eta) + \vartheta_\xi \beta \exp(\alpha\xi + \beta\eta) + \\ + \vartheta_\eta \alpha \exp(\alpha\xi + \beta\eta) + \vartheta \alpha \beta \exp(\alpha\xi + \beta\eta). \end{aligned}$$

Подставим полученные значения в дифференциальное уравнение с новыми каноническими переменными, вынесем $\exp(\alpha\xi + \beta\eta)$ за скобки, соберем слагаемые при одинаковых производных, и после некоторых преобразований получим следующее выражение:

$$\vartheta_{\xi\eta} + \beta\vartheta_{\xi} + \vartheta_{\eta}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \vartheta\left(\alpha\beta - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Выбираем неизвестные коэффициенты α и β так, чтобы упростить данное уравнение: $\beta = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$. В этом случае исключаются первые производные из дифференциального уравнения, которое в окончательной форме приводится к достаточно простому виду:

$$\vartheta_{\xi\eta} - \frac{1}{4}\vartheta = 0.$$

Примечание. Можно сделать переход к искомой функции $u(x, y)$, учитывая математическую связь переменных x, y с новыми каноническими переменными ξ, η :

$$u(x, y) = \vartheta(x, y) \exp\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

Задание для самостоятельной работы [2] (глава 1, задачи № 3, 12, 16, 21)

В следующих задачах выполнить:

1. Классификацию дифференциального уравнения.
2. Определить тип уравнения.
3. Привести уравнение к каноническому виду:

1. $u_{xx} - u_{yy} = 0$,

2. $u_{xx} - 4u_{yy} = 0$,

3. $u_{xx} + 4u_{yy} = 0$,

$$4. u_{xx} + 2u_{yy} + u_{yy} = 0,$$

$$5. u_{xx} - u_{xy} + u = 0,$$

$$6. u_{xx} + 2u_{yy} + u_{yy} + u = 0,$$

$$7. x^2 u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

$$8. x^2 u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

В задачах провести:

1. Классификацию дифференциального уравнения.
2. Определить тип уравнения.
3. Упростить линейное уравнение с постоянными коэффициентами, следующей заменой функции:

$$u(x,y) = \vartheta(x,y) \exp(\alpha x + \beta y):$$

$$9. u_{xx} - u_{yy} + u_y + u = 0,$$

$$10. u_{xx} + 2u_{yy} + u_{yy} + u_y + u = 0.$$

Занятие 4

3. Уравнения гиперболического типа

Рассмотрим некоторые методы решения дифференциального уравнения второго порядка в частных производных от двух независимых переменных гиперболического типа на примере уравнения колебания струны [1]:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, \quad (3)$$

где функция $u(x,t)$ представляет собой профиль струны; $a = \sqrt{T/\rho}$ – скорость распространяющихся волн; T – коэффициент натяжения струны; ρ – плотность материала струны; $f(x,t) = F(x,t)/\rho$ – плотность действующих внешних сил $F(x,t)$.

Методика решения дифференциальных уравнений гиперболического типа (3):

1. **Сформулировать** постановку физической задачи.
2. **Провести математическое моделирование задачи:**
 - 2.1. Выбрать систему координат.
 - 2.2. Провести необходимые предположения и упрощения.
 - 2.3. Сделать постановку краевой задачи: записать дифференциальное уравнение, задать начальные и граничные условия.
 - 2.4. Определить коэффициенты уравнения.
3. **Выбрать** аналитический или численный метод решения уравнения.

4. **Решить** краевую задачу.
5. **Провести анализ** физического явления, на основе полученного решения, и сделать вывод.

Метод распространяющихся волн (формула Даламбера)

Пример 3.1. *Определить собственные свободные колебания неограниченной стальной струны, учитывая, что в начальный момент времени она возбуждается локальным начальным отклонением (рисунок 3.1). Построить положение струны для моментов времени: $t_k = kc/4a$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.*

Примечание. Профиль струны (функция $u(x,t)$) в вершине треугольника и на границах ($x = \pm c$) задан несколько идеализировано, так как для гибкой упругой стальной струны он должен быть ближе к параболической форме. Это сделано для теоретического построения начального профиля струны в виде прямых линий, чтобы наглядно продемонстрировать методику решения задачи. Причем размеры данных участков струны достаточно маленькие и не оказывают заметного влияния на общую картину волнового процесса колебания струны.

Решение. Струна располагается вдоль оси (рисунок 3.1), и областью изменения аргумента x является вся ось координат ($-\infty < x < \infty$). Условие неограниченности струны указывает на то, что граничные условия не оказывают влияния на процесс колебания в рассматриваемой области. Начальный профиль струны $u(x, 0) = \varphi(x, 0)$ задан (рисунок 3.1), начальная скорость отсутствует $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$, нет внешних действующих сил $f(x,t) = 0$, плотность и коэффициент натяжения стальной струны заданы и определяются из справочника.

Постановка краевой задачи: найти функцию $u(x,t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области $[-\infty < x < +\infty, t \geq 0]$, удовлетворяющую уравнению (2) и заданным начальным условиям:

$$t = 0: \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Примечание. Для неограниченной струны не рассматривается влияние колебаний границ струны и граничные условия при $x \rightarrow \pm \infty$ предполагают $u(x, t) \rightarrow 0$.

Формула Даламбера. Определение колебания струны на неограниченной прямой, вызванное заданием начального профиля струны и начальной скорости, проводится на основе формулы Даламбера (см. лекцию, гл. 3, § 3.5):

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (3.1)$$

Поскольку в условии задачи начальная скорость струны равна нулю, то формула Даламбера (3.1) запишется в таком виде:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} = f_1(x+at) + f_2(x-at). \quad (3.2)$$

Данное выражение представляет собой процесс распространения начального отклонения (профиля) струны от положения равновесия вдоль оси x . Функция $f_2(x-at)$ является полуволной $u(x,t) = \varphi(x-at)/2$, которая распространяется в положительном направлении оси x (вправо) со скоростью $u_t = \vartheta = \partial x / \partial t = a$. Функция $f_1(x+at)$ представляет профиль струны или полуволну $u(x,t) = \varphi(x+at)/2$, которая распространяется в отрицательном направлении оси x (влево) со скоростью $u_t = \vartheta = \partial x / \partial t = -a$. Общее решение задачи есть суперпозиция двух полуволн, распространяющихся вправо и влево со скоростью $\vartheta = \pm a$.

Графическое решение. Построим профиль струны для моментов времени: $t_k = kc/4a$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Выберем соответствующие масштабы изменения аргумента x и искомой функции $u(x,t)$ по заданному начальному профилю струны $\varphi(x)$ (рисунок 3.1). Для этого разделим, например, на 8 частей (делений) изменение начального ($t = 0$) положения струны вдоль оси x ,

$$x_2 - x_1 = \Delta x = 2c, [-c \leq x \leq c] \quad (x_2 = -c, x_1 = c).$$

То же самое масштабное разбиение на 8 частей сделаем относительно максимального начального ($t = 0$) отклонения (высоты) струны $u(0,0) = h$. Определим размеры двух полувольт $f_1(x), f_2(x)$ в начальный момент времени:

$$t = 0 \quad (k = 0): \quad u(x, 0) = \varphi(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Для этого начальный профиль струны разделим пополам, и данные полуволны будут равны:

$$f_1(x) = f_2(x) = \varphi(x)/2 = h/2,$$

что соответствует четырем делениям в выбранных масштабах (рисунок 3.1).

При каждом значении времени: $t = t_k = kc/4a$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ происходит смещение полувольт $f_1(x + at_k)$ и $f_2(x - at_k)$ по оси x влево и вправо на одно деление $\Delta x/8 = c/4$. Например, при $k = 1$, $t = t_1 = c/4a$ график прямой полувольты переместится без деформации вправо, а график обратной полувольты – влево на расстоянии at_1 . Складывая арифметически значения полученных прямой и обратной полувольт $f_1(x + at_k)$, $f_2(x - at_k)$ для моментов времени $t_k = kc/4a$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$), получим динамическую картину изменения профиля струны (рисунок 3.1).

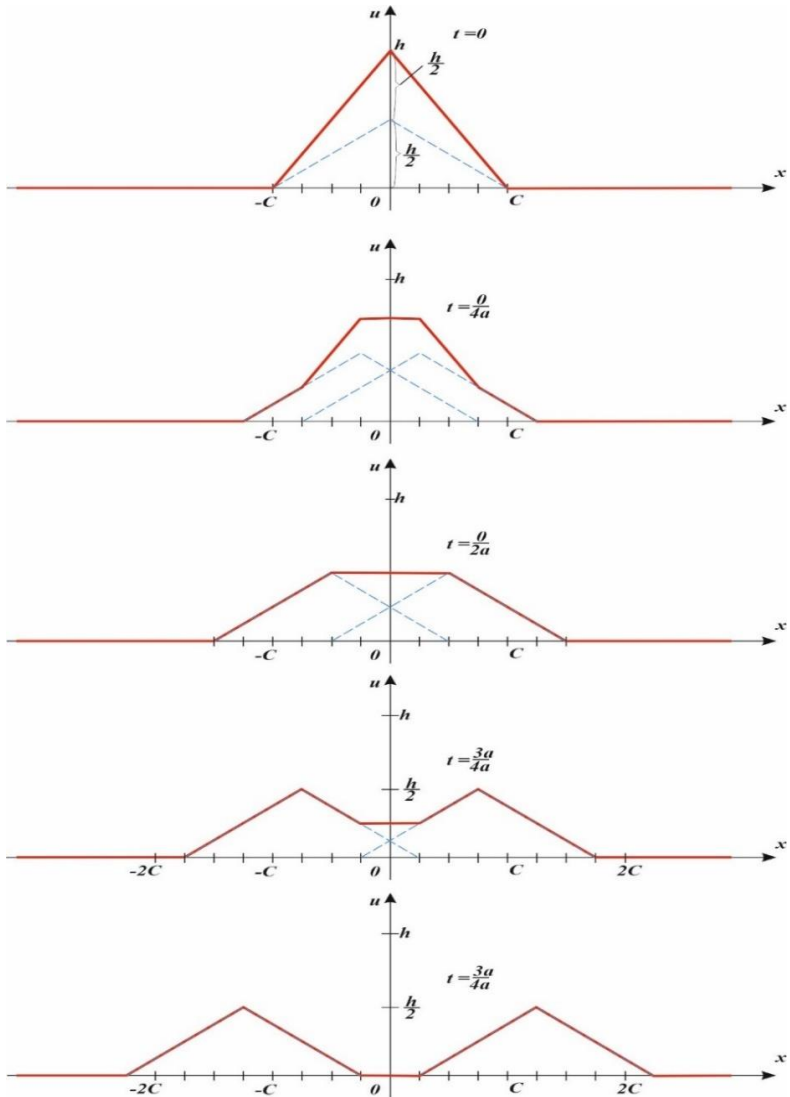


Рисунок 3.1 – Изменение вдоль оси x профиля струны $u(x,t)$ зависимости от времени

При каждом значении времени: $t = t_k = kc/4a$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ происходит смещение полуволн $f_1(x + at_k)$ и $f_2(x - at_k)$ по оси x влево и вправо на одно деление $\Delta x/8 = c/4$. Например, при $k = 1$, $t = t_1 = c/4a$ график прямой полуволны переместится без деформации вправо, а график обратной полуволны – влево на расстоянии at_1 . Складывая арифметически значения полученных прямой и обратной полуволн $f_1(x + at_k)$, $f_2(x - at_k)$ для моментов времени $t_k = kc/4a$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$), получим динамическую картину изменение профиля струны (рисунок 3.1).

Фазовая плоскость. На рисунке 3.1 видно, что в начальный момент времени профиль струны $u(x,0) = f_1(x) + f_2(x)$ отличен от нуля в интервале $[x_1 = -c, x_2 = c]$, и равен нулю вне этого отрезка.

Рассмотрим процесс распространения волн в *плоскости состояния* (x, t) или в *фазовой плоскости*. Проведем из точек $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ следующие характеристики уравнения (3):

$$x - at = x_1 = -c, \quad x + at = x_2 = c.$$

Данные характеристики разбивают полуплоскость $(x, t > 0)$ на три характерные области: I, II, III (рисунок 3.3, лекция § 3.5). Функция $f_2(x - at)$ сохраняет постоянное значение вдоль характеристики $x - at = const$ и отлична от нуля в области II ($x_1 < x - at < x_2$). Характеристики $x - at = x_1$ и $x + at = x_2$ представляют собой передний и задний фронт колебаний, распространяющейся полуволны $f_2(x - at)$ вправо. То же самое можно отметить и относительно полуволны $f_1(x + at)$, распространяющейся влево.

Проведем характеристики $x - at$, $x + at$ через точку (x_0, t_0) : $x - at = x_0 - at_0$, $x + at = x_0 + at_0$. При $t = 0$ данные характеристики пересекут ось x в точках $x_1 = x_0 - at_0$ и $x_2 = x_0 + at_0$. Поэтому значение искомой функции

$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$ в точке (x_0, t_0) будет равно $u(x_0, t_0) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, и определяется значениями в точках $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$. Получился характеристический треугольник точки (x_0, t_0) (рисунок 3.3, лекция § 3.5), образованный двумя характеристиками и осью x с вершинами $M(x_0, t_0)$, $P(x_0 - at_0, 0)$, $Q(x_0 + at_0, 0)$. Движение точки струны $u(x_0, t_0)$ в момент t_0 зависит от начального отклонения в вершинах $P(x_0 - at_0, 0)$, $Q(x_0 + at_0, 0)$ характеристического треугольника MPQ и от значения начальной скорости (сторона PQ).

Задание для самостоятельного решения [2] (глава 2, задачи № 53, 54)

Пример 1. Неограниченная струна возбуждена локальным начальным отклонением (рисунок 3.2). Найти: построить (начертить) положение струны для других моментов времени: $t_k = kl/4a$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

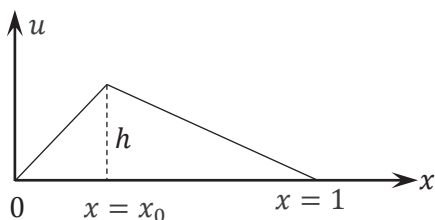


Рисунок 3.2 – Начальный профиль струны
 на отрезке $0 \leq x \leq l$, h – максимальное отклонение (высота)
 струны в точке $x = x_0$

Пример 2. В момент $t = 0$ неограниченная струна возбуждена начальным отклонением, имеющим форму, показанную на рисунке 3.3. В какой точке x и в какой момент времени $t > 0$ отклонение струны будет максимальным? Какова величина этого отклонения?

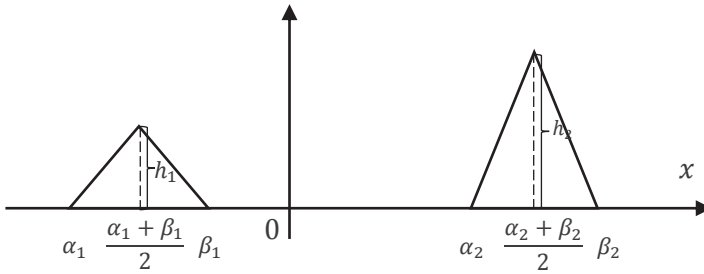


Рисунок 3.3 – Начальный профиль струны: h_1, h_2 – максимальное отклонение (высота) струны в точках $x = (\alpha_1 + \beta_1)/2$ и $(\alpha_2 + \beta_2)/2$

Пример 3. Неограниченной струне сообщена на отрезке $-c \leq x \leq c$ начальная скорость $v_0 = \text{const}$, а вне этого отрезка начальная скорость равна нулю. Найти закон движения точек струны при $t > 0$, построить положения струны для моментов времени: $t_k = kc/4a$, ($k = 0, 2, 4, 6$).

Занятие 5

Метод разделения переменных

Рассмотрим методику решения однородного дифференциального уравнения колебания струны методом разделения переменных.

Пример 3.2. *Найти собственные колебания струны с жестко закрепленными концами, вызванные начальным отклонением (рисунок 3.2), и вычислить энергию отдельных гармоник. Начальная скорость равна нулю.*

Решение. Предполагается, что собственные колебания струны происходят при отсутствии внешних сил $f(x,t) = 0$, коэффициент, входящий в уравнение a , определяется через плотность и натяжение струны из справочника, начальная скорость струны отсутствует $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$.

Струна располагается на оси x , концы при $x = 0$ и $x = l$ жестко закреплены, начальное отклонение струны приведено на рисунке 3.2. Для определения начального профиля струны $u(x, 0) = \varphi(x, 0)$ воспользуемся из аналитической геометрии общей формулой уравнения прямой, проходящей через две заданные точки:

$$(u - u_0)/(u_1 - u_0) = (x - x_0)/(x_1 - x_0).$$

Значения точек, через которые проходят заданные прямые (рисунок 3.2), будут равны:

- 1) $u_0 = 0, u_1 = h, x_0 = 0, x_1 = x_0$;
- 2) $u_0 = h, u_1 = 0, x_0 = x_0, x_1 = l$.

Тогда начальный профиль струны определяется следующими выражениями:

$$0 \leq x \leq x_0: \varphi(x, 0) = h \frac{x}{x_0}, \quad x_0 \leq x \leq l: \varphi(x, 0) = h \frac{x-l}{x_0-l}.$$

Постановка краевой задачи: найти функцию $u(x, t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области изменения аргументов $[0 \leq x \leq l, t \geq 0]$, удовлетворяющую уравнению (3), заданным краевым (граничным и начальным) условиям:

$$x = 0: u(0, t) = 0, \quad x = l: u(l, t) = 0, \quad t > 0;$$

$$t = 0: \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad 0 < x < l,$$

Решение уравнения (3) находится в виде ряда Фурье (см. лекцию, гл. 3, § 3.6):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad (3.3)$$

где постоянные A_n и B_n определяются из начальных условий обратным преобразованием Фурье:

$$t = 0: u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = 0,$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi = \frac{2}{l} \left(\int_0^{x_0} h \frac{\xi}{x_0} \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^l h \frac{\xi-l}{x_0-l} \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \right) = \frac{2hl^2}{x_0 \pi^2 (l-x_0) n^2} \sin\left(\frac{\pi n x_0}{l}\right),$$

$$B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi = 0.$$

Тогда общее решение задачи запишется в таком виде:

$$u(x,t) = \frac{2hl^2}{x_0 \pi^2 (l-x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{\pi n x_0}{l}\right) \cos(\omega_n t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Если в данном выражении при суммировании $n = 1, 2, 3, \dots$, исчезают слагаемые, для которых $\sin(\pi n x_0 / l) = 0$, то это указывает на отсутствие обертонов в точках (узлах) $x = x_0$. Амплитуда колебания струны:

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = A_n$$

фактически зависит от задания начального профиля струны. Частота колебания струны определяется основным тоном $\omega_1 = \pi a / l$, и следующими обертонами: $\omega_n = \pi n a / l$, $n = 2, 3, \dots$. Сдвиг фазы колебания струны находится из выражения:

$$\operatorname{tg} \delta_n = \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_n}{0} = \infty, \delta_n = \frac{\pi}{2}.$$

Запишем решение задачи через амплитуду, частоту и сдвиг фазы колебаний:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\omega_n t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В точке $x_0 = l/2$ амплитуда колебания струны и решение задачи будут иметь следующий вид:

$$\alpha_n = \frac{8h}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = -\frac{8h}{\pi^2 (2n-1)^2} (-1)^{2n-1}.$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)^2} \cos(\omega_n t) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{l} x\right), \quad \omega_n = \\ &= \frac{\pi(2n-1)}{l} a. \end{aligned}$$

Поскольку слагаемые ряда быстро уменьшаются с увеличением n обратно пропорционально $(2n - 1)^2$, то с точностью до нескольких процентов можно в выражении (3.4) положить $n = 1$. Тогда решение задачи, определяющее профиль струны, будет равно:

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \cos(\omega_1 t) \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) = \frac{8h}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{l} at\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right).$$

Определим энергию n -й гармоники колебания струны с учетом распределения масса струны ($M = l\rho$) по её длине и выражения (3.4):

$$E_n = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \frac{\rho a_n^2 \omega_n^2}{4} l = \omega_n^2 M \frac{A_n^2}{4}. \quad (3.5)$$

Из формулы (3.5) видно, что полная энергия n -й гармоники колебания струны, равная сумме кинетической и потенциальной энергии, пропорциональна массе струны M , квадратам частоты ω_n и амплитуды a_n колебаний струны.

Пример 3.3. По струне фортепиано с жестко закрепленными концами и длиной l ударяет молоточек и сообщает ей в точке x_0 скорость v_0 . Найти собственные колебания струны, если её начальное отклонение равно нулю.

Решение. Предполагается, что струна располагается на оси x , внешних сил нет $f(x, t) = 0$, концы струны при $x = 0$ и $x = l$ жестко закреплены, коэффициент a , входящий в уравнение, определяется плотностью и натяжением струны из справочника. В начальный момент времени профиль струны $u(x, 0) = \varphi(x) = 0$, а в точке $x = x_0$ струна возбуждается ударом молоточка, который сообщает ей начальную скорость $\psi(x) = u_t(x_0, 0) = v_0$. Для задания начального распределения скорости на отрезке $0 \leq x \leq l$ вводится дельта функция Дирака: $u_t(x, 0) = v_0 \delta(x - x_0)$, которая при $x = x_0$ равна $u_t(x_0, 0) = v_0$, а при $x \neq x_0$, $u_t(x_0, 0) = 0$.

Постановка краевой задачи: найти функцию $u(x,t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области изменения $[0 \leq x \leq l, t \geq 0]$, удовлетворяющую уравнению (3), заданным граничным и начальным условиями:

$$x = 0: u(0, t) = 0, \quad x = l: u(l, t) = 0, \quad t > 0;$$

$$t = 0: \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = v_0 \delta(x - x_0). \end{cases} \quad 0 < x < l,$$

Преобразованием Фурье. Решение уравнения (3) находится в виде ряда Фурье (см. лекцию, гл. 3, § 3.6):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

где постоянные A_n и B_n определяются из заданных начальных условий обратным преобразованием Фурье:

$$t = 0: u(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = v_0 \delta(x - x_0),$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l 0 \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi = 0, \quad B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi = \\ &= \frac{2}{\pi n a} \int_0^l v_0 \delta(x - x_0) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi = \frac{2lv_0}{\pi n a \pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x_0\right). \end{aligned}$$

Амплитуда колебания струны $a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = B_n$ пропорциональна $1/n^2$ и быстро убывает с ростом числа n . Запишем выражение для круговой частоты колебания струны $\omega_n = \sin(\pi n a / l)$, и определим сдвиг фазы:

$$tg \delta_n = \frac{A_n}{B_n} = \frac{0}{B_n} = 0, \quad \delta_n = 0.$$

Видно, что основной тон струны равен $\omega_1 = \pi a/l$, а обертоны $\omega_n = n\pi a/l$, где $n = 2, 3, \dots$. Тогда решение задачи, выраженное через амплитуду, частоту и сдвиг фазы колебаний, будет равно:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\omega_n t + \delta_n) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\ = \frac{2lv_0}{a\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x_0\right) \sin(\omega_n t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Частный случай. Если молоточек ударяет по струне в точке $x_0 = l/2$, то амплитуда, частота колебаний и решение задачи имеют вид:

$$a_n = \frac{2lv_0}{a\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = -\frac{2lv_0}{a\pi^2 (2n-1)^2} (-1)^{2n-1}. \\ u(x,t) = \frac{2lv_0}{a\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)^2} \sin(\omega_n t) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{l} x\right), \\ \omega_n = \frac{\pi(2n-1)}{l} a.$$

Из данного выражения видно, что слагаемые ряда с ростом n уменьшаются обратно пропорционально $(2n-1)^2$ и с точностью до нескольких процентов при суммировании можно положить $n = 1$. Тогда решение задачи, определяющее профиль струны, запишется так:

$$u(x,t) = \frac{2lv_0}{a\pi^2} \sin(\omega_1 t) \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) = \frac{2lv_0}{a\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{l} at\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right).$$

Метод решения неоднородного уравнения

Рассмотрим решение неоднородного уравнения на примере колебания струны под действием внешних сил.

Пример 3.4. *Найти поперечные колебания струны с жестко закрепленными концами в поле тяготения Земли. Начальная скорость равна нулю, а начальное отклонение приведено на рисунке 3.2.*

Решение. Сделаем следующие предположения: внешние силы, действующие на струну, постоянны и равны ускорению свободного падения на единицу плотности ($f(x,t) = g$), задан коэффициент a через плотность и натяжение струны, нет начальной скорости струны $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$, струна, с жестко закрепленными концами, располагается вдоль оси x .

Для определения начального отклонения $u(x, 0) = \varphi(x, 0)$ или профиля струны, воспользуемся методикой, изложенной в предыдущей задаче 3.2:

$$0 \leq x \leq x_0: \varphi(x, 0) = h \frac{x}{x_0}, \quad x_0 \leq x \leq l: \varphi(x, 0) = h \frac{x-l}{x_0-l}.$$

Постановка краевой задачи: найти функцию $u(x,t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области изменения аргументов $[0 \leq x \leq l, t \geq 0]$, удовлетворяющую уравнению (3) и заданным краевым (граничным и начальным) условиям:

$$x = 0: u(0, t) = 0, \quad x = l: u(l, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$t = 0: \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad 0 < x < l,$$

Разложение функции в ряд Фурье. Для решения уравнения (3) воспользуемся разложением функции $u(x,t)$ по аргументу x в ряд Фурье, рассматривая время t как параметр (см. лекцию, гл. 3, § 3.7). Тогда общее решение задачи запишется в таком виде:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \left(\int_0^t \sin \omega_n (t - \tau) f_n(\tau) d\tau \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad \omega_n = \frac{\pi n}{l} a. \quad (3.6)$$

Первое слагаемое ряда (3.6) определяет влияние вынужденных колебаний струны под действием внешней силы при нулевых граничных условиях, а второе слагаемое представляет свободные колебания струны при заданных начальных условиях.

Во втором слагаемом определить коэффициенты A_n и B_n из заданных начальных условий (см. решение задачи 3.2):

$$B_n = 0, \quad A_n = \frac{2hl^2}{x_0 \pi^2 (l-x_0)n^2} \sin\left(\frac{\pi n x_0}{l}\right).$$

Для вычисления первого слагаемого в (3.6) найдем значение функции $f_n(\tau)$ из следующего выражения [2]:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi = \frac{2}{l} \int_0^l g \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi = \\ &= -\frac{2g}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \Big|_0^l = \frac{2g}{\pi n} (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

Видно, что функция $f_n(t)$ постоянна и равна нулю $f_n(t) = 0$ для четных значений $n = 2, 4, 6, \dots$, а для нечетных $n = 1, 3, 5, \dots$, $f_n(t) = 4g/\pi n$. Подставим данное выражение в формулу (3.6) и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin \omega_n (t - \tau) f_n(\tau) d\tau &= \frac{1}{\omega_n} \cos(t - \tau) \frac{2g}{\pi n} (1 - (-1)^n) \Big|_0^t = \\ &= \frac{2g}{\pi n \omega_n} (1 - \cos t) (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

Тогда общее решение задачи (3.6) запишется в таком виде:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2hl^2}{x_0 \pi^2 (l-x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{\pi n x_0}{l}\right) \cos(\omega_n t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \\ &+ \frac{2g}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \omega_n^2} (1 - \cos t) (1 - (-1)^n) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое представляет свободные колебания струны при заданном начальном отклонении. Второе слагаемое ряда определяет влияние колебания струны под действием гравитационной силы при нулевых граничных условиях.

Упростим решение второго слагаемого, учитывая свойство функции для четных и нечетных значений n :

$$\begin{aligned} & \frac{2g}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n^2} (1 - \cos t) (1 - (-1)^n) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\ & = \frac{4g}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\omega_n^2} (1 - \cos t) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{l} x\right), \quad \omega_n = \frac{\pi(2n-1)}{l} a. \end{aligned}$$

Примечание. Можно решить задачу другим способом и представить решение неоднородного уравнения через действие единичного сосредоточенного импульса $G(x, \xi, t - \tau)$ под действием непрерывно распределенной силы $f(x, t)$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^l \int_0^t G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \\ G(x, \xi, t - \tau) &= \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \omega_n (t - \tau) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right). \end{aligned}$$

Задание для самостоятельного решения [2] (гл. 2, задачи № 99, 103)

Пример 1. Струна длиной l с жестко закрепленными концами находится под действием поперечной силы $F = F_0 = \text{const}$ в точке x_0 . В начальный момент времени действие силы прекращается. Найти колебания струны.

Пример 2. Концы струны закреплены жестко, а начальное отклонение имеет форму квадратичной параболы, симметричной относительно середины струны длиной l . Найти колебания струны, если начальные скорости равны нулю.

Занятие 6

4. Уравнения параболического типа

Запишем дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка от двух независимых переменных параболического типа (**уравнение теплопроводности**) для однородного стержня [1]:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho}. \quad (4)$$

Функция $u(x,t)$ представляет собой распределение температуры стержня вдоль оси x ; a – коэффициент температуропроводности; k – коэффициент теплопроводности; c – удельная теплоемкость; ρ – плотность; $f(x,t)$ – плотность источников или стоков тепла.

Методика решения дифференциальных уравнений параболического типа (4) математически остается практически такой же, как и для уравнений гиперболического типа (3), за исключением того, что при решении уравнения (4) задается одно начальное условие. По физическому содержанию уравнения (3) и (4) описывают качественно различные явления: уравнения (3) – колебательные процессы, а (4) – процессы распространения тепла и массопереноса.

Метод разделения переменных (метод Фурье)

Пример 4.1. *Найти распределение температуры в однородном медном стержне длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура на его концах*

поддерживается равной нулю, а начальная температура постоянна и равна T_0 .

Решение. Располагаем стержень вдоль оси x . По условию задачи нет источников или стоков тепла $f(x,t) = 0$. Из справочника определяем значения коэффициентов теплопроводности, теплоемкости и плотности меди: $\kappa = 395 \text{ Вт/м.град}$, $\rho = 8933 \text{ кг/м}^3$, $c = 381 \text{ Дж/кг.град}$. Вычисляем коэффициент температуропроводности: $a^2 = \kappa/c\rho = 1,16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$.

Постановка краевой задачи. Найти функцию $u = u(x,t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, удовлетворяющую однородному уравнению теплопроводности (4) и заданным краевым (начальным и граничным) условиям:

$$t = 0: u(x,0) = \varphi(x) = T_0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.1)$$

$$x = 0: u(0,t) = \mu_1(t) = 0; \quad x = l: u(l,t) = \mu_2(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Метод Фурье. Для решения задачи воспользуемся методом разделения переменных или методом Фурье (см. лекцию, гл. 4, § 4.4). Общее решение однородного дифференциального уравнения (4) с нулевыми граничными условиями, выражается в виде ряда Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(\frac{\pi n}{l}a)^2 t} \sin(\frac{\pi n}{l}x). \quad (4.2)$$

Коэффициент C_n ряда Фурье (4.2) определяется из заданного начального условия:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin(\frac{\pi n}{l}\xi) d\xi = \frac{2}{l} \int_0^l T_0 \sin(\frac{\pi n}{l}\xi) d\xi = \\ &= -\frac{2T_0}{\pi n} \cos(\frac{\pi n \xi}{l}) \Big|_0^l = \frac{2T_0}{\pi n} (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

Из данного выражения следует, что коэффициент $C_n = 0$ для четных значений $n = 2, 4, 6, \dots$, а для нечетных значений $n = 1, 3, 5, \dots$, $C_n = 4T_0/\pi n$. Подставим данное выражение в ряд Фурье (4.2) и запишем решение задачи:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\ &= \frac{2T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - (-1)^n) e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \end{aligned}$$

Упростим данную формулу, учитывая свойство функций для четных и нечетных значений n :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\ &= \frac{2T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - (-1)^n) e^{-\omega_n^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\ &= \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{l} x\right). \end{aligned}$$

Видно, что температура изменяется по гармоническому закону с максимумом в середине отрезка $x = l/2$. Причем, слагаемые ряда положительны для нечетных значений n ($n = 1, 3, 5, \dots$, $\sin(\pi(2n-1)/2) = 1$) и отрицательны для четных $n = 2, 4, 6, \dots$, $\sin(\pi(2n-1)/2) = -1$. С течением времени температура в стержне экспоненциально уменьшается и для больших моментов времени ($t \rightarrow \infty$) температура стремится к нулю $u(x,t) \rightarrow 0$.

Частный случай. Запишем решение задачи учитывая, что распределение температуры вдоль стержня и её изменение от времени, с точностью до $\sim 1\%$ определяется первым слагаемым ряда Фурье:

$$u(x,t) = \frac{4T_0}{\pi} e^{-\left(\frac{\pi}{l}a\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) = \frac{4T_0}{\pi} e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{k}{c\rho} t} \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right).$$

Из данной формулы видно, что чем больше коэффициент теплопроводности, тем быстрее происходит уменьшение температуры в стержне. То же самое явление происходит при уменьшении плотности и теплоемкости стержня.

Метод решения общей первой краевой задачи

В случаях, когда на границах стержня температура постоянна и не равна нулю или изменяется по заданному временному закону:

$$x = 0: u(0, t) = \mu_1(t); \quad x = l: u(l, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0,$$

то применяется методика решения общей первой краевой задачи (см. лекции: гл. 4, § 4.5).

Примечание. Данный метод широко применяется при решении уравнений *гиперболического типа* при задании на границах определенных колебательных процессов.

Пример 4.2. *Определить распределение температуры в медном стержне длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью, концы которого поддерживаются при постоянных температурах u_2 и u_1 , а начальная температура равна u_0 .*

Решение. Для решения задачи стержень располагается вдоль оси x . Поскольку в стержне нет источников или стоков тепла, то $f(x, t) = 0$. Из справочника определяются значения коэффициентов теплопроводности, теплоемкости и плотности меди (см. предыдущую задачу 4.1) и вычисляется коэффициент температуропроводности: $a^2 = \kappa/c\rho = 1,16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$.

Постановка задачи: найти функцию $u(x,t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области изменения аргументов $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющую однородному уравнению теплопроводности (4) и заданным краевым (начальным и граничным) условиям:

$$t = 0: u(x,0) = \varphi(x) = u_0;$$

$$x = 0: u(0,t) = u_2, \quad x = l: u(l,t) = u_1.$$

Вспомогательная задача. Для того чтобы применить метод разделения переменных, вводится новая неизвестная функция $v(x,t)$ и вспомогательная заданная функция: $U(x,t)$ (см. лекцию, гл. 4, § 4.5):

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t). \quad (4.3)$$

Причем функция $U(x,t)$ определяется таким образом, чтобы на границах у функции $v(x,t)$ были нулевые граничные условия, например:

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] = u_2 + \frac{x}{l}(u_1 - u_2) = U(x).$$

Метод Фурье. Поскольку в данной задаче на границах стержня температура постоянна, то функция $U(x,t)$ не зависит от времени. Тогда, функция $v(x,t)$ определяется методом Фурье из решения однородного уравнения с заданными начальными условиями:

$$v_t = a^2 v_{xx} - [U_t - a^2 U_{xx}], \quad v_t = a^2 v_{xx}. \quad (4.4)$$

$$t = 0: v(x, 0) = \varphi(x) - U(x, 0) = u_0 - u_2 - \frac{x}{l}(u_1 - u_2) = \bar{\varphi}(x);$$

$$x = 0: v(0,t) = 0, \quad x = l: v(l,t) = 0.$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Определим коэффициенты ряда Фурье C_n , используя начальные условия и выражение для $\bar{\varphi}(x)$, и находим функцию $v(x,t)$ из решения (4.4):

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \bar{\varphi}(\xi) \sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) d\xi = \frac{2}{l} \\ &\int_0^l (u_0 - u_2 - \frac{\xi}{l}(u_1 - u_2))_0 \sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) d\xi = \\ &= 2 \left(\frac{u_0 - u_2}{\pi n} \right) (1 - (-1)^n) - \frac{2(u_1 - u_2)}{\pi n} (-1)^n ; \\ v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \left(\frac{u_0 - u_2}{\pi n} \right) (1 - (-1)^n) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(u_1 - u_2)}{\pi n} (-1)^n e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 t} \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(u_0 - \frac{u_1 + u_2}{2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} \right) e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)}{l} a\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{l} x\right). \end{aligned}$$

Искомая функции $u(x,t)$ из (4.3) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= U(x,t) + v(x,t) = u_2 + \frac{x}{l}(u_1 - u_2) + \\ &+ \frac{4}{\pi} \left(u_0 - \frac{u_1 + u_2}{2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} \right) e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)}{l} a\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{l} x\right). \quad (4.5) \end{aligned}$$

Частный случай. С точностью до нескольких процентов можно определить распределение температуры вдоль стержня и изменение температуры от времени, учитывая основной вклад первого слагаемого

$$(n = 1):$$

$$u(x,t) = u_2 + \frac{x}{l}(u_1 - u_2) + \frac{4}{\pi} \left(u_0 - \frac{u_1 + u_2}{2} \right) e^{-\left(\frac{\pi}{l} a\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right).$$

Видно, что температура стержня возрастает линейно с наложением гармонического закона с максимумом в середине стержня (при $x = l/2$, $\sin(\pi/2) = 1$). С течением времени температура экспоненциально уменьшается,

и при $t \rightarrow \infty$ температура в стержне стремится к стационарному значению, соответствующему линейному изменению от x вспомогательной функции $U(x,t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = U(x,t) = u_2 + \frac{x}{l}(u_1 - u_2),$$

которое в итоге определяется заданными значениями температуры на границах стержня.

Задание для самостоятельного решения [2] (глава 3, задачи № 22, 23)

Пример 1. Найти распределение температуры в стержне длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура стержня изменяется пропорционально времени $\varphi(x) = T_0 t/t_0$, где T_0 и t_0 заданные постоянные значения.

Пример 2. Начальная температура стержня длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью увеличивается пропорционально x : $u(x,0) = U_0 x/l$, где $U_0 = \text{const}$. На концах стержня поддерживается постоянная температура $u(0,t) = U_1 = \text{const}$, $u(l,t) = U_2 = \text{const}$. Найти изменение температуры стержня и его предельное стационарное значение $\bar{u}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t)$.

Пример 3. Найти температуру стержня длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью, если один конец ($x = 0$) поддерживается при заданной фиксированной температуре U_1 , а на другой конец ($x = l$) задается тепловой поток q_0 . Начальная температура стержня постоянна и равна $U_0 = \text{const}$.

Занятие 7

Решение неоднородного уравнения

При определении температуры $u(x,t)$ в стержне длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью с учетом действия внутренних источников или стоков тепла $f(x,t) \neq 0$, задача сводится к решению неоднородного уравнения теплопроводности.

Пример 4.3. *Найти распределение температуры в однородном медном стержне длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура на его концах поддерживается равной нулю, начальная температура постоянна $\varphi(x) = T_0$, а по всей длине стержня выделяется постоянное количество тепла $f(x,t) = f_0$.*

Решение. Стержень располагается вдоль оси x . Коэффициент $a^2 = k/c\rho$ для медного стержня, вычисляется из справочника (см. пример 4.1).

Постановка краевой задачи: найти функцию $u = u(x,t)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области изменения аргументов

($0 \leq x \leq l, t \geq 0$), удовлетворяющую уравнению теплопроводности (4) и заданным краевым (начальным и граничным) условиям:

$$t = 0: u(x,0) = \varphi(x) = T_0;$$

$$x = 0: u(0,t) = \mu_1(t) = 0; \quad x = l: u(l,t) = \mu_2(t) = 0.$$

Метод решения. Решение общей первой краевой задачи находится в виде суммы двух функций, одна из которых представляет решение однородного уравнения (4)

с произвольными граничными условиями (см. лекцию, гл. 4, § 4.6), а другая – частное решение неоднородного уравнения (4):

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t), \quad (4.6)$$

$$\text{где } u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi,$$

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$f_n(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Вычисляем константу ряда Фурье C_n , используя начальное условие:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l T_0 \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi = -\frac{2T_0}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) \Big|_0^l = \frac{2T_0}{\pi n} (1 - (-1)^n).$$

Видно, что $C_n = 0$ для четных значений $n = 2, 4, 6, \dots$, а для нечетных значений $n = 1, 3, 5, \dots$ коэффициенты равны $C_n = 4T_0/\pi n$. Подставим данное выражение в ряд Фурье и определим функцию $u_1(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \frac{2T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - (-1)^n) e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \\ &= \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)}{l}a\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{l}x\right). \end{aligned}$$

Для определения функции $u_2(x,t)$ находятся коэффициенты $f_n(\tau)$ ряда Фурье с учетом действия источника тепла $f(x,t) = f_0$:

$$f_n(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l f_0 \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} f_0 \cos\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) \Big|_0^l = \frac{2}{\pi n} f_0 (1 - (-1)^n).$$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 (t-\tau)} \frac{2}{\pi n} f_0 (1 - (-1)^n) d\tau \right] \sin \frac{\pi n}{l} x =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\pi} f_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right] \sin \frac{\pi n}{l} x = \\
 &= -\frac{2}{\pi} f_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n} \left(\frac{l}{\pi n a}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 (t-\tau)} \Big|_0^t \sin \frac{\pi n}{l} x = \\
 &= -\frac{2}{\pi} f_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n} \left(\frac{l}{\pi n a}\right)^2 (1 - e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 t}) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 f_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n^3} (e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 t} - 1) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\
 &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 f_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} (e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)}{l} a\right)^2 t} - 1) \sin \frac{\pi(2n-1)}{l} x.
 \end{aligned}$$

Тогда распределение температуры в стержне (4.6) будет равно:

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= u_1(x,t) + u_2(x,t) = \frac{4T_0}{\pi} \\
 &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)}{l} a\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{l} x\right) + \\
 &+ \frac{4}{\pi} \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 f_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} (e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)}{l} a\right)^2 t} - 1) \sin \frac{\pi(2n-1)}{l} x, \quad \omega_n = \\
 &= \frac{\pi(2n-1)}{l} a.
 \end{aligned}$$

Частный случай. С точностью до 1 % на основе учета основного вклада первого слагаемого ряда Фурье ($n = 1$), запишем распределение температуры в стержне и изменение температуры от времени:

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{4T_0}{\pi} e^{-\left(\frac{\pi}{l} a\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) + \frac{4}{\pi} \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 f_0 (1 - e^{-\left(\frac{\pi}{l} a\right)^2 t}) \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) = \\
 &= \frac{4}{\pi} (T_0 e^{-\left(\frac{\pi}{l} a\right)^2 t} + \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 f_0 (1 - e^{-\left(\frac{\pi}{l} a\right)^2 t}) \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right)) = \\
 &= \frac{4}{\pi} \left((T_0 - \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 f_0) e^{-\left(\frac{\pi}{l} a\right)^2 t} + \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 f_0 \right) \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right).
 \end{aligned}$$

Видно, что под действием источника тепла температура по длине стержня изменяется по гармоническому закону с максимумом в середине стержня $x = l/2$. С течением времени температура экспоненциально уменьшается и при $t \rightarrow \infty$, температура стремится к постоянному значению:

$$u_1(x, \infty) \rightarrow 0, \quad u(x, \infty) = u_2(x, \infty) = \\ = \frac{4}{\pi} \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 f_0 \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) = \frac{(2l)^2}{\pi^3} \frac{c\rho}{k} f_0 \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right).$$

Примечание. Можно решить задачу, используя для определения $u_2(x, t)$ функцию источника $G(x, \xi, t)$, которая представляет распределение температуры в стержне в момент времени t в точке $x = \xi$, где выделяется или поглощается некоторое количество тепла:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \\ G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi.$$

Задание для самостоятельного решения [2] (глава 3, задачи № 33, 34)

Пример 1. Найти распределение температуры в стержне длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, начальная температура постоянна $\varphi(x) = T_0$, а по всей длине стержня выделяется тепло, пропорционально времени нагрева: $f(x, t) = f_0 t / t_0$. Постоянные значения T_0 , f_0 и t_0 заданы.

Занятие 8

Решение уравнения на бесконечной прямой

При определении температуры на бесконечной прямой или в неограниченном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, предполагается, что граничные условия на концах стержня не оказывают влияния на распределение температуры в рассматриваемой области. Неограниченный стержень располагается на оси координаты x .

Пример 4.4. *Найти распределение температуры в однородном неограниченном медном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, если известно, что в начальный момент времени температура в стержне была постоянной и равной (см. рисунок 4.1).*

Решение. Располагаем стержень вдоль оси x . Коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и плотность меди определяются из справочника и вычисляется коэффициент температуропроводности a (см. пример 4.1).

Постановка задачи: найти функцию $u(x, t)$, определенную, ограниченную и непрерывную в рассматриваемой области $(-\infty < x < \infty, t \geq 0)$, удовлетворяющую однородному уравнению теплопроводности (4) и заданному начальному распределению температуры (рисунок 4.1):

$$u(x, 0) = \varphi(x) = T_1 = \text{const}, x > 0, T_2 = \text{const}, x < 0.$$

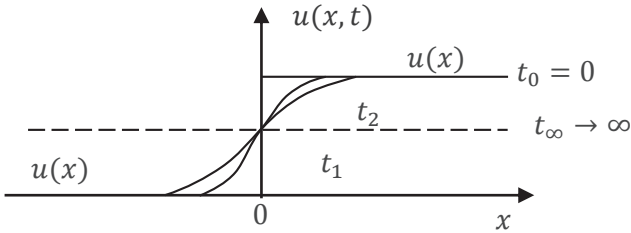


Рисунок 4.1 – Изменение температуры $u(x, t)$ вдоль оси x в неограниченном стержне для моментов времени: $t_0 = 0, t = t_1, t = t_2, t_\infty \rightarrow \infty, \varphi(x)$ – начальное распределение температуры

Для определения температуры в неограниченном стержне воспользуемся следующей формулой (см. лекцию, гл. 4, § 4.7):

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi) d\xi. \quad (4.7)$$

Подставим в выражение (4.7) заданное начальное условие:

$$u(x, t) = \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Для вычисления интегралов сделаем замену переменных и определим пределы интегрирования:

$$\alpha = \frac{x-\xi}{\sqrt{4a^2t}}, \quad d\alpha = -\frac{d\xi}{\sqrt{4a^2t}}; \text{ при } \xi = 0,$$

$$z = \frac{x}{2\sqrt{a^2t}}, \text{ при } \xi = \pm\infty, \quad \alpha = \mp\infty.$$

Тогда в результате интегрирования получим следующее выражение:

$$u(x, t) = -\frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{-\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha =$$

$$= \frac{T_1}{2} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{T_1}{2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha \right) = \frac{T_1}{2} (1 + \Phi(z)),$$

где $\Phi(z)$ – интеграл ошибок или функция ошибок Гаусса:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Подставим значения переменной z и постоянной a в функцию $u(x,t)$, и получим изменение температуры в неограниченном стержне:

$$u(x,t) = \frac{T_1}{2} \left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right) = \frac{T_1}{2} \left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{kt/c\rho}}\right) \right).$$

Видно, что в точке $x = 0$ температура стержня постоянна и равна половине суммы начальных значений $u(x,t) = T_1/2$ справа и слева от данной точки, так как $\Phi(0) = 0$. При $x \rightarrow \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x,t) \rightarrow T_1$ температура выходит на постоянное значение ($\Phi(\infty) = 1$). При $x \rightarrow -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x,t) \rightarrow 0$ температура стремится к нулю, так как $\Phi(-\infty) = -1$. При увеличении времени $t = t_1$, $t = t_2$ одна левая половина стержня прогревается (область $x < 0$), вторая правая половина (при $x > 0$) – остывает (рисунок 3). В итоге для больших моментов времени температура стержня стремится к постоянному среднему значению: $t \rightarrow \infty$, $\Phi(0) \rightarrow 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t) \rightarrow T_1/2$.

Примечание. Можно найти решение задачи через функцию источника $G(x, \xi, t)$, которая представляет собой температуру в точке x в момент времени t , если в начальный момент времени в точке ξ выделяется определенное количество тепла [1]:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}.$$

Задание для самостоятельного решения [2] (глава 3, задача № 72)

Пример 1. Найти распределение температуры в однородном неограниченном медном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, если известно, что в начальный момент времени температура в стержне была равна:

$$u(x,0) = \varphi(x) = T_1 = \text{const},$$

$$x > 0; u(x,0) = \varphi(x) = T_2 = \text{const}, x < 0; T_1 > T_2.$$

Решение уравнения без начальных условий

Рассмотрим процесс распространения тепла, достаточно удаленный от начального условия, который практически не сказывается на распределении температуры в данный момент времени, или находящийся под действием длительного периодического влияния граничных условий.

Пример 4.5. Определить распределение температуры в полубесконечном стержне из стекловолокна с теплоизолированной боковой поверхностью, если один его конец находится под действием периодически меняющейся температуры $u(0,t) = A \cos \omega t$ с заданной амплитудой A и частотой ω , $\omega = \text{const}$.

Решение. Располагаем стержень вдоль оси x . Коэффициенты стекловолокна определяются из справочника: теплопроводность $k = 0,756 \text{ Вт/м.град}$, теплоемкость $c = 670 \text{ Дж/кг.град}$, плотность $\rho = 250 \text{ кг/м}^3$. Вычисляется коэффициент температуропроводности $a^2 = k/c\rho = 4,53 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Постановка краевой задачи: найти непрерывное ограниченное решение однородного уравнения теплопроводности (4) в области $t > 0$ удовлетворяющее заданному граничному условию:

$$x = 0: u(0, t) = \mu(t) = A \cos \omega t = \operatorname{Re}(Ae^{i\omega t}).$$

Решение задачи находится в виде следующего выражения (см. лекцию, гл. 4, § 4.8):

$$u(x, t) = Ae^{\alpha x + \beta t},$$

где коэффициенты α и β определяются при подстановке функции $u(x, t)$ в заданное граничное условие и в уравнение (4):

$$x = 0: u(0, t) = Ae^{i\omega t} = Ae^{\beta t}, \quad \beta = i\omega.$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{1}{a^2}\beta; \quad a_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\sqrt{i} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = \pm \left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \right]. \end{aligned}$$

Затем выделяется действительная часть из полученного выражения и решение уравнения записывается в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + i\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right)} = \\ &= Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Температурные волны. Как следует из формулы (4.8), от конца стержня $x = 0$ периодически меняющейся температурой, в глубину стержня $x > 0$ распространяется тепловая волна с такой же частотой ω и периодом колебания T .

В глубину стержня амплитуда колебания температуры уменьшается экспоненциально с увеличением расстояния x :

$$A(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega c\rho}{2k}}x}.$$

Причем, если координата x растет в арифметической прогрессии, то амплитуда колебания температуры в глубину стержня $A(x)$ убывает в геометрической прогрессии (*первый закон Фурье*). Чем больше теплоемкость и плотность стекловолокна, тем быстрее происходит затухание амплитуды колебания температуры в глубину стержня. То же самое происходит с уменьшением коэффициента теплопроводности. Поэтому, подбирая соответствующие материалы стекловолокна и частоту ω , можно изменять амплитуду колебания температуры в глубину стержня.

Температурные колебания в стержне происходят со сдвигом фазы. Время запаздывания максимумов или минимумов температуры от соответствующих моментов времени на конце стержня пропорционально глубине x (*второй закон Фурье*):

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}}x = \frac{x}{a\sqrt{2\omega}} = \frac{x}{\sqrt{2\omega k/c\rho}}.$$

Видно, что материал стекловолокна и частота ω изменяют фазу колебания температуры в глубину стержня.

Глубина проникновения тепла в глубину стержня x зависит от периода колебания температуры $T = 2\pi/\omega$ на границе стержня (*третий закон Фурье*). Относительное изменение температурной амплитуды определяется следующим выражением:

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} = e^{-\sqrt{\frac{\pi}{Ta^2}}x}.$$

Из данной формулы видно, что чем меньше период изменения, тем меньше глубина проникновения температуры в глубину стержня, например, в предельном случае при $T \rightarrow 0$, $A(x) \rightarrow 0$. Для температурных колебаний с периодами T_1 или T_2 расстояния проникновения в глубину стержня x_1 и x_2 , на которых происходит относительно одинаковое изменение температуры, связаны между собой соотношением:

$$x_2 = \sqrt{T_2/T_1} x_1 = \sqrt{\omega_1/\omega_2} x_1.$$

Например, при сравнении колебаний температуры на границе стержня с частотами $\omega_1 = 1 \text{ Гц}$ и $\omega_2 = 1 \text{ МГц} = 10^6 \text{ Гц}$ видно, что проникновение мегагерцовых колебаний температуры в глубину стержня в тысячу раз больше глубины проникновения герцевых колебаний: $x_2 = \sqrt{10^{-6}} x_1 = 0,001 x_1$.

Задание для самостоятельного решения [2] (глава 3, задача № 93)

Пример 1. *Определить распределение температуры в глубину Земли, если на поверхности температура в течение месяца изменялась по закону $u(0,t) = A \cos \omega t$ с амплитудой $A = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Для сухой почвы коэффициент $a = 0,06 \text{ см}^2/\text{сек}$.*

Занятие 9

5. Уравнения эллиптического типа

При рассмотрении стационарных и установившихся физических процессов, таких как колебания, теплопроводность, диффузия, уравнения гиперболического и параболического типов приводятся к уравнениям **эллиптического типа**, из которых наиболее распространенными являются дифференциальные уравнения *Лапласа и Пуассона* [1]:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u = f, \quad (5)$$

где оператор Лапласа в прямоугольной, цилиндрической и сферической системе координат имеет следующий вид:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right).$$

Решение уравнений эллиптического типа проводится в заданном объеме T , ограниченный поверхностью Σ . Если решение находится во внутренней или во внешней областях объема T по отношению к поверхности Σ , то соответствующие задачи называют **внутренняя** или **внешняя краевые задачи**.

Методика решения задач уравнений эллиптического типа практически такая же, как для уравнений гиперболического и параболического типа.

Фундаментальные решения уравнения Лапласа

Пример 5.1. *Определить распределение потенциала электрического поля единичного заряда электрона e .*

Решение. Располагаем электрон в начале сферической системы координат r, φ, θ .

Постановка краевой задачи: найти функцию $u(r)$, определенную и непрерывную в рассматриваемой области $0 \leq r < \infty$, удовлетворяющую уравнению Лапласа (5) и заданному граничному условию $r \rightarrow \infty: u(r) \rightarrow 0$.

Данная задача обладает сферической симметрией и поэтому производные по θ, φ равны нулю. Решение уравнения Лапласа $u(r)$ находится из обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0.$$

Интегрируя дважды данное уравнение, находим распределение функции в сферическом пространстве:

$$r^2 \frac{du}{dr} = C_1, \quad u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Полагая $C_2 = 0$, в соответствии с граничным условием ($r \rightarrow \infty: u(r) \rightarrow 0$), и $C_1 = -e$ функция $u(r)$ будет иметь следующий вид:

$$u(r) = \frac{e}{r}.$$

Данное решение называется *фундаментальным решением уравнения Лапласа* в пространстве. Причем функция $u(r)$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки в начале координат $r = 0$, где она обращается в бесконечность. С физической точки зрения, решение данной задачи

необходимо начинать от некоторой условной границы поверхности электрона или электронного облака: $r_e \cong 1$ ферми $= 10^{-13}$ см.

Задание для самостоятельного решения [2] **(глава 4, задачи № 13, 14)**

Пример 1. Найти стационарное распределение температуры внутри круга радиуса R , если температура на границе поверхности круга постоянна: $u(r) = u_0$. Источники тепла отсутствуют.

Пример 2. Найти стационарное распределение температуры внутри круга радиуса R , если на поверхности круга задано граничное условие в виде: $du/dn = A = \text{const}$. Источники тепла отсутствуют.

Пример 3. Найти объемный потенциал шара при постоянной плотности заряда $\rho = \rho_0$.

Пример 4. Определить потенциал электростатического поля в цилиндрическом конденсаторе, на обкладках которого потенциалы соответственно равны: $u|_{r=a} = U_1, u|_{r=b} = U_2$.

Метод разделения переменных

Рассматривается методика решения уравнения Лапласа методом разделения переменных на примере задачи Дирихле для круга. При решении задачи воспользуемся полярной системой координат ρ, φ с началом в центре круга.

Пример 5.2. Определить распределение температуры внутри и вне круга радиуса $\rho = R$, если на границе круга температура изменяется по закону $u(R, \varphi) = A \sin \varphi$, где $A = \text{const}$.

Постановка краевой задачи Дирихле: найти непрерывную функцию $u(\rho, \varphi)$, удовлетворяющую уравнению

Лапласа (5), заданному граничному условию на границе круга и условию периодичности:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

$$u(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=R} = f(\varphi) = A \sin \varphi, \quad u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi).$$

Решение задачи проводится методом разделения переменных (см. лекцию, гл. 5, § 5.4). Для *внутренней* ($0 \leq \rho \leq R$) и *внешней* ($R \leq \rho < \infty$) краевых задач решения уравнения Лапласа будет иметь следующий вид (см. лекцию, гл. 5, § 5.5):

$$u(\rho, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

$$u(\rho, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

где коэффициенты ряда Фурье определяются из заданных граничных условий:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi.$$

Определим для *внутренней краевой задачи* ($0 \leq \rho \leq R$) коэффициенты ряда Фурье, путем подстановки граничного условия:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin \psi d\psi = \frac{1}{2\pi} A \cos \psi \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin \psi \cos n\psi d\psi =$$

$$= -\frac{\cos(1+n)x}{2\pi(1+n)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\cos(1-n)x}{2\pi(1-n)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin \psi \sin n\psi d\psi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{\pi} \left(-\frac{\sin(1+n)x}{2(1+n)} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(1-n)x}{2(1-n)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \\
&= \frac{A}{\pi} \left(-\frac{\sin \pi(1+n)}{1+n} + \frac{\sin \pi(1-n)}{1-n} \right).
\end{aligned}$$

Тогда распределение температуры *внутри круга* будет определяться следующим выражением:

$$\begin{aligned}
u(\rho, \varphi) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n B_n \sin n\varphi = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{A}{\pi} \left(-\frac{\sin \pi(1+n)}{1+n} + \frac{\sin \pi(1-n)}{1-n} \right) \sin n\varphi = A \frac{\rho}{\pi R} \sin \varphi.
\end{aligned}$$

Здесь при раскрытии ряда Фурье $n = 1, 2, 3, \dots$ первое слагаемое обращается в ноль, а во втором слагаемом при $n = 1$ возникает неопределенность типа $0/0$. Раскрываем данную неопределенность по правилу Лопиталья, и получим данное выражение.

Находим решение *внешней краевой задачи* ($R \leq \rho < \infty$) с учетом полученных значений коэффициентов ряда Фурье и устранения неопределенности. В итоге распределение температуры вне круга будет иметь такой вид:

$$\begin{aligned}
u(\rho, \varphi) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n (B_n \sin n\varphi) = A \frac{R}{\pi \rho} \sin \varphi
\end{aligned}$$

Результаты показывают, что температура внутри круга (*внутренняя задача*) изменяется пропорционально радиальной координате ρ , равна нулю в начале координат и максимальна на границе круга. По отношению к азимутальному углу φ , температура изменяется по гармоническому закону $\sim \sin \varphi$.

Изменение температуры вне круга (*внешняя задача*) по отношению к азимутальному углу φ изменяется также по гармоническому закону, а с удалением от границы круга уменьшается обратно пропорционально координаты ρ . На большем удалении от границы температура стремится к нулю: $\lim_{\rho \rightarrow \infty} u(\rho, \varphi) \rightarrow \infty$.

Рассмотрим случай: температура на границе круга постоянна ($\rho = R: u(R, \varphi) = A$). Тогда внутри и вне круга температура всегда постоянна $u(\rho, \varphi) = A$. В этом случае коэффициенты ряда Фурье будут равны:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A d\psi = A, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \cos n\psi d\psi = \frac{1}{\pi n} A \sin n\psi \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin n\psi d\psi = \frac{1}{\pi n} \cos n\psi \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Задание для самостоятельного решения [2] (глава 4, задачи № 34, 70)

Пример 1. *Определить распределение температуры внутри и вне круга радиуса $\rho = R$, если на границе круга температура изменяется по закону $u(R, \varphi) = A \sin 2\varphi$, где $A = \text{const}$.*

6. Специальные функции

Если областями изменения аргументов являются круг, шар или цилиндр, то решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка, методом разделения переменных сводятся к специальным функциям.

Уравнения, приводящиеся к функциям Бесселя

Пример 6.1. *Определить собственные колебания круглой мембраны с жестко закрепленными границами $r_0 = R$, если задан начальный профиль отклонения мембраны от положения равновесия $f(r)$, а начальная скорость равна нулю.*

Решение. При изучении колебаний круглой мембраны воспользуемся полярной системой координат r, θ (см. рисунок 6.3, лекция, гл. 6, § 6.3).

Постановка краевой задачи: определить функцию $u = u(r, \theta, t)$ в рассматриваемой области ($t \geq 0, 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$), удовлетворяющую уравнению гиперболического типа и заданным краевым (начальным и граничным) условиям:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$t \geq 0: \begin{cases} u(r, \theta, 0) = f(r) \\ u_t(r, \theta, 0) = 0, \end{cases} \quad r = r_0: u(r_0, \theta, t) = 0.$$

Метод разделения переменных. Поскольку границы круглой мембраны жестко закреплены, а граничные условия не зависят от азимутального угла, то функция $u(r, \theta, t)$ будет симметрично относительно угла θ . Решение задачи находится методом разделения переменных, и для этого введем новые функции $v(r), T(t)$, а решение задачи будем искать в следующем виде: $u(r, \theta, t) = v(r)T(t) \neq 0$. Подставим данную функцию в уравнение, вычислим производные по переменным r, t , разделим слагаемые на $v(r)T(t)$, и получим два обыкновенных дифференциальных уравнения с заданными краевыми условиями:

$$T'' + a^2 \lambda T = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) + \lambda v = 0, \quad (0 < r < r_0);$$

$$r = r_0: v(r_0) = 0.$$

Решаем уравнение относительно $T(t) = Ae^{ikt}$ методом Эйлера. После подстановки данной функции в уравнение, характеристическое уравнение будет иметь вид: $\kappa^2 + a^2\lambda = 0$. Поскольку корни характеристического уравнения при $\lambda > 0$ комплексные: $\kappa_{1,2} = \sqrt{-a^2\lambda} = \pm i\sqrt{a^2\lambda}$, то решение задачи относительно функции $T(t)$ запишется в таком виде:

$$T(t) = C_1 \cos \sqrt{a^2\lambda} t + C_2 \sin \sqrt{a^2\lambda} t.$$

Уравнение Бесселя. Для определения функции $v(r)$ введем новую переменную $x = \sqrt{\lambda}r$, которая приводит дифференциальное уравнение к уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dv}{dx} \right) + v = 0. \quad (6.1)$$

Общее решение уравнения Бесселя нулевого порядка будет иметь вид:

$$v(x) = d_1 J_0(x) + d_2 N_0(x), \quad (6.2)$$

где цилиндрические функции: $J_0(x)$ – функция Бесселя; $N_0(x)$ – функция Неймана нулевого порядка. Для определения функции $v(x)$ необходимо решить задачу о собственных значениях при условии, что она имеет ограниченное решение в области с особой точкой ($r = 0$: $|v(0)| < \infty$). Из условия ограниченности решения следует учитывать, что при $x = 0$, функция Бесселя $J_0(0) = 1$; функция Неймана $N_0(0) \rightarrow -\infty$. Поэтому в решении уравнения Бесселя постоянная $d_2 = 0$. Далее из граничного условия определяются собственные значения параметра $\lambda = const$:

$$v(r) = d_1 J_0(\sqrt{\lambda}r); v(r_0) = 0 = d_1 J_0(\sqrt{\lambda}r_0) = d_1 J_0(\mu_n);$$

$$d_1 \neq 0, J_0(\mu_n) = 0; \mu_n = \sqrt{\lambda}r_0, \sqrt{\lambda} = \frac{\mu_n}{r_0}.$$

Тогда общее решение задачи запишется в таком виде:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) J_0(\mu_n \frac{r}{r_0}),$$

$$\omega_n = \sqrt{a^2 \lambda} = a \sqrt{\lambda} = a \frac{\mu_n}{r_0}.$$

Постоянные $A_n = C_1 d_1$, $B_n = C_2 d_2$ находятся из заданных начальных условий:

$$t = 0: u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n \frac{r}{r_0}),$$

$$A_n = \frac{2}{(r_0 J_1(\mu_n))^2} \int_0^{r_0} r f(r) J_0(\mu_n \frac{r}{r_0}) dr,$$

$$u_t(r, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n J_0(\mu_n \frac{r}{r_0}), \quad B_n = 0.$$

Запишем общее решение задачи о собственных колебаниях мембраны в таком окончательном виде:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) J_0(\mu_n \frac{r}{r_0}). \quad (6.3)$$

Из решения видно, что мембрана совершает гармонические колебания с амплитудой A_n и частотой ω_n . Радиальный профиль мембраны соответствует изменению функции Бесселя нулевого порядка первого рода. Поскольку края мембраны жестко закреплены, то на границе при

$$r = r_0: J_0(\mu_1) = 0, \quad \mu_1 = 2,405.$$

Определим следующие значения, соответствующие первому корню функции Бесселя нулевого порядка:

$$J_1(\mu_1) = 0,519, \quad \omega_1 = a \frac{\mu_1}{r_0} = \frac{2,405}{r_0} \sqrt{T/\rho}.$$

Колебания профиля мембраны в области изменения аргументов ($0 \leq r \leq r_0$, $t \geq 0$) будут определяться первым слагаемым ряда $n = 1$:

$$u(r, t) = A_1 \cos(\omega_1 t) J_0(2,405 \frac{r}{r_0}), \quad (6.4)$$

$$A_1 = \frac{2}{(r_0 J_1(\mu_n))^2} \int_0^{r_0} r f(r) J_0(\mu_1 \frac{r}{r_0}) dr = \frac{7,44}{(r_0)^2} \int_0^{r_0} r f(r) J_0(\mu_1 \frac{r}{r_0}) dr.$$

Результаты показывают, что на гармонические колебания профиля мембраны большое влияние оказывают радиус мембраны и в меньшей степени свойства материала: плотность и коэффициент натяжения. Частота колебаний обратно пропорциональна радиусу мембраны и чем больше радиус, тем меньше частота колебаний.

Частный случай. В случае задания постоянного или параболического отклонения начального профиля мембраны от положения равновесия, определим амплитуду колебания:

$$f(r) = f_0: A_n = \frac{2}{(r_0 J_1(\mu_n))^2} \int_0^{r_0} r f(r) J_0(\mu_n \frac{r}{r_0}) dr = \\ = \frac{2f_0}{r_0 \mu_n J_1(\mu_n)}, A_1 = \frac{1,602f_0}{r_0}.$$

$$f(r) = f_0(1 - \frac{r^2}{r_0^2}): A_n = \int_0^{r_0} r (1 - \frac{r^2}{r_0^2}) J_0(\mu_n \frac{r}{r_0}) dr.$$

Тогда колебания мембраны и её профиль будут определяться выражениями (6.3) или (6.4).

Задание для самостоятельного решения
([2] глава 4, задачи № 113, 114)

III. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ

1. **Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям:**
 1. Механика.
 2. Механика сплошных сред.
 3. Электродинамика.
 4. Атомная физика.
2. **Дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных от двух независимых переменных:**
 1. Определения дифференциальных уравнений.
 2. Классификация дифференциальных уравнений.
 3. Приведение дифференциальных уравнений к каноническому виду.
 4. Упрощение линейных дифференциальных уравнений 2 порядка.
3. **Уравнения гиперболического типа:**
 1. Задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа.
 2. Уравнение колебания струны.
 3. Постановка краевых задач.
 4. Метод разделения переменных или метод Фурье.
 5. Физическая интерпретация решения метода разделения переменных. Энергия колебания струны.
 6. Физические аналогии.
 7. Решение неоднородных уравнений.
 8. Теория существования и единственности типа.
 9. Метод Даламбера.

4. **Уравнения параболического типа:**
 1. Задачи, приводящие к уравнениям параболического типа.
 2. Уравнение теплопроводности.
 3. Постановка краевых задач.
 4. Метод разделения переменных или метод Фурье.
 5. Функция источника для уравнений параболического типа.
 6. Общая первая краевая задача.
 7. Решение неоднородных уравнений.
 8. Задача на бесконечной прямой.
 9. Задача без начальных условий.
5. **Уравнения эллиптического типа:**
 1. Задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа Лапласа и Пуассона.
 2. Аналитическая и гармоническая функции.
 3. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана.
 4. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.
 5. Краевая задача для круга.
 6. Функция источника.
 7. Функция источника для сферы.
 8. Теория потенциала.
 9. Задачи электростатики.
6. **Специальные функции:**
 1. Интеграл ошибок.
 2. Задачи, приводящиеся к уравнению Бесселя.
 3. Цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля, Неймана.
 4. Сферические функции Лежандра.
 5. Полиномы Чебышева–Эрмита.
 6. Уравнение Шредингера.
 7. Дельта функция.
7. **Метод конечных разностей:**
 1. Сетка, шаг сетки. Разностная аппроксимация дифференциальных операторов. Постановка разностных задач.

2. Разностное решение дифференциальных уравнений параболического типа. Явная – неявная схема.
3. Вычисление определенных интегралов.
4. Решение нелинейных уравнений.

Примечание. При самостоятельной подготовке вопросов по дисциплине «Линейные и нелинейные уравнения физики», рекомендуется использовать материал из классических учебников и монографий [1–11], и широко привлекать дополнительные сведения из интернета.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При разработке лекций и практических занятий по Краткому курсу «Линейные и нелинейные уравнения физики», был сделан упор на физическую постановку задач и возможность математического описания физических явлений в основных разделах математической физики, которые чаще всего применяются студентами и специалистами в их дальнейшей работе. Большое внимание уделено постановке краевых задач, методам решения дифференциальных уравнений и физической интерпретации полученных результатов. Достаточно подробно изложен метод разделения переменных или метод Фурье, который широко используется при решении дифференциальных уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов. Приведен универсальный метод решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных – метод конечных разностей или метод сеток, который очень удобный при реализации численных экспериментов на ЭВМ.

В связи с ограниченным числом часов, отводимых на изучение данной дисциплины, в Кратком курсе лекций и практических занятий не рассматриваются такие разделы математической физики, как например, теория потенциала, операционные и вариационные методы решения дифференциальных уравнений, применение теории функции комплексного переменного и интегральных уравнений. Данные разделы и методы хорошо изложены во многих классических учебниках, и в случае необходимости рекомендуются студентам для самостоятельного изучения [1, 12–17].

В приложении достаточно подробно рассматривается решение уравнения Шредингера и приводится краткая история становления квантовой механики. Это сделано для того, чтобы показать, как с помощью теоретических предположений, постулатов и дифференциальных уравнений можно изучать неизвестные закономерности протекающих явлений и исследовать новые свойства материи, в частности, движение электрона в электрическом поле атома.

Подведем некоторые итоги и сделаем пожелания студентам после изучения Краткого курса лекций и практических занятий:

- изменение многих физических явлений в пространстве и во времени можно хорошо описать с помощью дифференциальных уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типа. Вывод данных уравнений, в большинстве случаев, основан на фундаментальных законах сохранения количества движения, энергии, массы и заряда, которые необходимо всегда применять при построении новых теорий, предположений, моделей и гипотез;
- постановка начальных и граничных условий однозначно «привязывает» решение дифференциального уравнения к исследованию данного физического явления;
- заданные коэффициенты и слагаемые, входящие в уравнение, определяют состояние окружающей среды и материальные свойства данного физического явления;
- с помощью аналитических или численных решений дифференциальных уравнений можно детально исследовать данное физическое явление, установить новые закономерности протекающих процессов и использовать их в нашей жизни.

Математика – это язык естественных наук и хороший метод познания физических явлений. Хотя сама математика не относится к естественным наукам, но широко используется для изучения закономерностей окружающего нас Мира. Экспериментальные методы исследования в практической и познавательной деятельности человека, как и математика с её логическим абстрактным мышлением, органически взаимосвязаны и хорошо дополняют друг друга. Поэтому у человечества есть эти два мощных инструмента познания неизведанных свойств материи, которые нужно широко применять и развивать для практической деятельности и научных исследований.

Примечание. Принцип неопределенностей Гейзенберга ограничивает экспериментальное изучение особенностей Микромира. Поэтому дальнейшие открытия, например, структуры строения ядра атома, кварков и других элементарных частиц возможно только с помощью новых теорий, идей и математических методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука. 1966. – 724 с.
2. *Будак Б.М.* Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Физматлит, 2004. – 688 с.
3. *Владимиров В.С.* Что такое математическая физика? // Препринт. Математический ин-т им. В.А. Стеклова РАН. – М.: МИАН, 2006. – 20 с.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
5. *Шарма Дж.* Уравнения в частных производных для инженеров / Дж. Шарма, К. Сингх. – М.: Техносфера, 2002. – 318 с.
6. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
7. *Ольховский И.И.* Курс теоретической механики для физиков. – М.: Наука. 1970. – 447 с.
8. *Александров Д.В.* Введение в гидродинамику: учеб. пособие / Д.В. Александров, А.Ю. Зубарев, Л.Ю. Исакова. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2012. – 112 с.
9. Теория столба электрической дуги / В.С. Энгельшт, В.Ц. Гурович, Г.А. Десятков и др. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1990. – 376 с. (Низкотемпературная плазма. Т. 1).
10. *Дресвин С.В.* Физика плазмы: учеб. пособие / С.В. Дресвин, Д.В. Иванов. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2013. – 544 с.
11. *Компанеец А.С.* Что такое квантовая механика? – М.: Наука, 1977. – 216 с.

12. *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
13. *Араманович И.Г.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Е. Эльсгольдц. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
14. *Пантелеев А.В.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учеб. пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – М.: Высшая школа, 2001. – 445 с.
15. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие: в 2 т. Т. 2. – М.: Интеграл-Пресс, 2002. – 544 с.
16. *Пантелеев А.В.* Вариационное исчисление в примерах и задачах: учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 2006. – 272 с.
17. *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления: учеб. пособие. 4-е изд. – М.: Лаборатория знаний, 2015. – 347 с.

CONTENTS

| | |
|---|---------------|
| INTRODUCTION..... | 8 |
| I. SHORT COURSE OF LECTURES..... | 12 |
| <i>Chapter I. Problems leading to linear and non-linear differential equations of physics.....</i> | 12 |
| § 1.1. Classical mechanics..... | 13 |
| § 1.2. Hydrodynamics equations | 15 |
| § 1.3. Electrodynamics | 16 |
| § 1.4. Atomic physics..... | 17 |
| <i>Chapter 2. Classification of second-order partial differential equations from two independent variables ...</i> | 19 |
| § 2.1. Classification of second-order partial differential equations | 19 |
| § 2.2. Differentiation of an equation to new independent variables | 21 |
| § 2.3. Identification of canonical variables and equation type | 23 |
| § 2.4. Making second-order differential equations canonical | 24 |
| § 2.5. Simplification of linear differential equations..... | 28 |
| <i>Chapter 3. Hyperbolic equations.....</i> | 31 |
| § 3.1. String oscillation equation | 31 |
| § 3.2. Boundary and initial conditions | 36 |
| § 3.3. Boundary value problems setting..... | 39 |
| § 3.4. Existence and uniqueness theory | 42 |
| § 3.5. D'Alembert propagation wave method | 44 |

| | |
|--|------------|
| § 3.6. Variable separation method | 51 |
| § 3.7. Solution of heterogeneous differential equation..... | 62 |
| Chapter 4. Parabolic equations | 66 |
| § 4.1. Heat conduction equation | 66 |
| § 4.2. Boundary conditions setting..... | 72 |
| § 4.3. Boundary value problems setting..... | 74 |
| § 4.4. Variables separation method | 76 |
| § 4.5. Common first boundary value problem | 80 |
| § 4.6. Solution of the heterogeneous heat conductivity equation | 82 |
| § 4.7. Infinite line problem..... | 85 |
| § 4.8. Problem without initial conditions | 90 |
| Chapter 5. Elliptic equations..... | 96 |
| § 5.1. Problems leading to elliptic equations | 97 |
| § 5.2. Boundary value problems setting..... | 98 |
| § 5.3. Fundamental solution to Laplace's equations..... | 100 |
| § 5.4. Harmonic and analytical functions..... | 102 |
| § 5.5. Solving a boundary problem for the circle..... | 103 |
| § 5.6. Biharmonic equation..... | 107 |
| Chapter 6. Special functions | 111 |
| § 6.1. Error integral | 111 |
| § 6.2. Heat transfer in unlimited space | 114 |
| § 6.3. Circular membrane oscillation..... | 116 |
| § 6.4. Cylindrical Bessel functions..... | 120 |
| § 6.5. Special cylinder and sphere functions | 124 |
| § 6.6. General equation of the theory of special functions..... | 127 |
| § 6.7. Delta function | 130 |

| | |
|---|---------|
| Chapter 7. Finite difference method | 132 |
| § 7.1. Basic notions..... | 132 |
| § 7.2. Grid difference..... | 135 |
| § 7.3. Approximation of differential operators..... | 138 |
| § 7.4. Approximation schemes | 141 |
| § 7.5. Differentiation of boundary value problems..... | 142 |
| § 7.6. Solving of divergent boundary problems | 144 |
| ANNEX. Schrödinger equation | 151 |
| II. PRACTICAL CLASSES | 168 |
| 1. Ordinary differential equations (2 hours)..... | 170 |
| 2. Classification of second-order partial differential equations and making them canonical (4 hours) | 184 |
| 3. Hyperbolic equations (4 hours)..... | 190 |
| 4. Parabolic equations (4 hours) | 207 |
| 5. Elliptic equations (2 hours) | 225 |
| 6. Special functions (2 hours) | 230 |
| III. QUESTIONS FOR INDEPENDENT WORK | 235 |
| OPINION..... | 238 |
| LITERATURE | 241 |
| CONTENTS | 243 |
| OPINION..... | 246 |
| LITERATURE (TRANSLITERATION)..... | 248 |

OPINION

In preparing lectures and practical classes on the short course “Linear and non-linear equations of physics”, emphasis has been placed on problems physical setting and a possibility of physical phenomena mathematical description that are comprised in main sections of mathematical physics. These sections are most often used by students and specialists in their work. Much attention is paid to boundary value problems setting, to methods of differential equations solving and to physical interpretation of the findings. The book presents at length the method of variable separation or Fourier method that is widely used in solving differential hyperbolic, parabolic and elliptic equations. It is highlighted here that deriving equations is based on fundamental laws of momentum, energy and mass conservation, which should be applied in devising new theories, suppositions, models and conjectures.

The course illustrates a universal method of linear and non-linear partial differential equations solving – the finite difference method or grid method that is very convenient in data processing machine realization.

In connection with the time limits while learning this discipline, the short course does not regard such sections of mathematical physics as the potential theory, operation and variation methods of differential equations solving. The course does not include applying the function theory of a complex variable and integral equations. The sections mentioned are well presented in many classical textbooks and recommended for independent learning [1, 12–17].

The annex presents at length Schrödinger equation solution and a brief history of quantum mechanics emergence. It results in illustrating how theoretical suppositions, postulates and differential equations promote to investigating unknown regularities of phenomena, how new matter properties – electron motion in the atomic electric field – are cognized.

Mathematics is language of natural sciences and a good method of physical phenomena cognition. Although mathematics is not a natural science, it is widely used for knowing the surrounding world laws. Experimental research methods used in practical and cognitive human activity – like mathematics with its logical abstract thinking – are closely connected and complement each other. Humanity possesses these two powerful tools of the surrounding world cognition that we should apply.

Note: Heisenberg uncertainty principle restricts experimental learning of microcosm features. Further discoveries, such as the atomic nucleus structure, quarks and other elementary particles, are possible only by means of new theories, thoughts and mathematical methods.

LITERATURE (TRANSLITERATION)

1. *Tihonov A.N.* Equations of mathematical physics / A.N. Tihonov, A.A. Samarskiy. – M.: Science. 1966. – 724 p.
2. *Budak B.M.* Collection of mathematical physics problems / B.M. Budak, A.N. Milquetoast, A.A. Samarskiy. – M.: Fizmatlit. 2004. – 688 p.
3. *Vladimirov V.S.* What is mathematical physics? // Preprint, Mathematical institute named after V.A. Steklova WOUNDS. – M.: MIAN, 2006. – 20 p.
4. *Vladimirov V.S.* Equations of mathematical physics. – M.: Science, 1981. – 512 p.
5. *Sharma Dzh.* Partial differential equations for engineers / Dzh. Sharma, K. Singh. – M.: Tehnosfera, 2002. – 318 p.
6. *Arnolid V.I.* Mathematical methods of classical mechanics. – M.: Science, 1989. – 472 p.
7. *Olihovskiy I.I.* Course of theoretical mechanics for physicists. – M.: Science, 1970. – 447 p.
8. *Alexander D.V.* Introduction to hydrodynamics: [training material] / Д.В. Alexander, А.У. Zubarev, L.YU. Iskakova. – Ekaterinburg: Publishing house of Ural University, 2012. – 112 p.
9. Electric art column theory / B.C. Engelisht, V.C. Gurovich, G.A. Desyatkov et al. – Novosibirsk: Science. Sib. department, 1990. – 376 p. (Nizkotemperaturnaya plasma. T.1).
10. *Dresvin S.V.* Physics of plasma: [training material] / S.V. Dresvin, D.V. Ivanov – ucheb. posobie. – SPb.: Publishing house of Politech University, 2013. – 544 p.
11. *Kompaneec A.S.* What is quantum mechanics? – M.: Science, 1977. – 216 p.

12. *Corn G.* Guide on mathematics for researchers and engineers / G. Corn, T. Corn. – M.: Science. 1968. – 720 p.
13. *Aramanovich I.G.* Functions of a complex variable. Operating calculus. Sustainability theory / I.G. Aramanovich, G.L. Lunc, L.E. Elisgolic. – M.: Science, 1968. – 416 p.
14. *Panteleev A.V.* Functions of a complex variable theory and operating calculus in problems: training material / A.V. Panteleev, A.S. Yakimova. – M.: High school, 2001. – 445 p.
15. *Piskunov N.S.* Differential and integral calculus: training material: in 2 T. – M.: Integral-Press, 2002. – T. 2. – 544 p.
16. *Panteleev A.V.* Variation calculus in problems: training material. – M.: High school, 2006. – 272 p.
17. *Romanko V.K.* A course of differential equations and variation calculus: training material. 4-th edition. – M.: Laboratory of the knowledges, 2015. – 347 p.

Лелевкин Валерий Михайлович

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ
УРАВНЕНИЯ ФИЗИКИ

Лекции и практические занятия.
Краткий курс

Редактор *И.С. Волоскова*
Компьютерная верстка *А.Ш. Мельниковой*

Подписано в печать 10.01.2023.
Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Офсетная печать.
Объем 15,75 п. л. Тираж 500 экз. Заказ 44.

Издательство КРСУ
720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, Бишкек, ул. Анкары, 2а