

УДК 303.724.32:621.951  
DOI: 10.36979/1694-500X-2023-23-4-94-100

## РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ ТЕХНИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

*Н.А. Рагрин, У.М. Дыйканбаева, Д.М. Курганова*

*Аннотация.* Одной из задач регрессионного анализа является определение коэффициентов регрессии статистических зависимостей случайных переменных. Планирование технических исследований оперирует такими понятиями, как неслучайные входные параметры режима резания и случайные выходные – результаты исследований. Поэтому разработка методов регрессионного анализа технических исследований по влиянию неслучайных параметров режима резания на случайные результаты исследований является актуальной проблемой. Представлены методы регрессионного анализа по определению статистических зависимостей случайных результатов технических исследований от неслучайных параметров режима резания на основе значимости корреляции между ними, необходимых для построения эмпирических моделей.

*Ключевые слова:* регрессия; технические исследования; сверление; режим резания; эмпирические модели.

---

## ЭМПИРИКАЛЫК МОДЕЛДЕРДИ ТҮЗҮҮҮҮЧҮН ТЕХНИКАЛЫК ИЗИЛДӨӨЛӨРГӨ РЕГРЕССИЯЛЫК ТАЛДОО ЖҮРГҮЗҮҮ

*Н.А. Рагрин, У.М. Дыйканбаева, Д.М. Курганова*

*Аннотация.* Регрессиялык талдоо жүргүзүүнү милдеттеринин бири кокус чоңдуктардын статистикалык көз карандылыктарынын регрессиялык коэффициенттерин аныктоо болуп саналат. Инженердик изилдөөнү пландаштыруу кесүү режиминин кокусунан эмес киргизүү параметрлери жана кокусунан чыгаруу – изилдөөнүн натыйжалары сыяктуу түшүнүктөр менен иштейт. Ошондуктан, кокусунан эмес кесүү режиминин параметрлеринин кокусунан изилдөөлөрдүн натыйжаларына тийгизген таасири боюнча техникалык изилдөөлөргө регрессиялык талдоо жүргүзүү ыкмаларын иштеп чыгуу актуалдуу көйгөй болуп саналат. Бул эмпирикалык моделдерин куруу үчүн зарыл болгон, алардын ортосундагы өз ара байланыш маанисине негизделген кокусунан кесүү режими параметрлерине техникалык изилдөөлөрдүн кокусунан жыйынтыгы боюнча статистикалык көз карандылыгын аныктоо үчүн регрессиялык талдоо жүргүзүү ыкмалары берилген.

*Түйүндүү сөздөр:* регрессия; техникалык изилдөө; бургулоо; кесүү режими; эмпирикалык моделдер.

---

## REGRESSION ANALYSIS OF TECHNICAL RESEARCH TO BUILD EMPIRICAL MODELS

*N.A. Ragrin, U.M. Dyikanbaeva, D.M. Kurganova*

*Abstract.* One of the tasks of regression analysis is to determine the regression coefficients of statistical dependencies of random variables. Engineering study planning operates with such concepts as non-random input parameters of the cutting mode and random output - the results of the study. Therefore, the development of methods for regression analysis of technical studies on the influence of non-random cutting mode parameters on random research results is an urgent problem. The article presents methods of regression analysis to determine the statistical dependencies of random results of technical studies on non-random cutting mode parameters based on the significance of the correlation between them, which is necessary to build empirical models.

*Keywords:* regression; engineering studies; drilling; cutting conditions; empirical models.

**Введение.** Регрессионный анализ является одним из методов статистического анализа технических исследований. Одной из задач регрессионного анализа является определение коэффициентов регрессии статистических зависимостей случайных переменных. Технические исследования отличаются сравнительно небольшими объемами выборок по причине их значительной трудоемкости. Например, объемы выборок технических исследований степени наклепа поверхностей, обработанных резанием, ограничены возможностями технологического оборудования, приспособлений и средств контроля результатов, количеством методов обработки, режущих инструментов и обрабатываемых материалов. Поэтому регрессионный анализ технических исследований должен учитывать сравнительно небольшие объемы выборок.

Вместе с тем, планирование технических исследований оперирует такими понятиями, как входные технологические параметры и выходные – результаты исследований. Воздействию случайных факторов подвержены результаты исследований, являющиеся случайными величинами, к которым в полной мере приемлемы все методы статистического анализа. Входными технологическими параметрами, как правило, являются параметры режима резания: скорость резания, подача, глубина резания, не являющиеся случайными величинами и имеющие строго фиксированные значения. Поэтому разработка методов регрессионного анализа технических исследований по определению статистических зависимостей случайных результатов исследований от неслучайных параметров режима резания является актуальной проблемой.

**Цель исследований.** Разработка методов регрессионного анализа технических исследований при наличии и значимости связи неслучайных параметров режима резания и случайных результатов исследований с целью построения эмпирических моделей.

**Задачи исследований:**

1. Определить методы статистического анализа, позволяющие использовать результаты технических исследований по влиянию параметров режима резания на степень наклепа поверхности отверстий, обработанных быстрорежущими спиральными сверлами.
2. Разработать методы регрессионного анализа, позволяющие определить статистические зависимости случайных результатов технических исследований от неслучайных параметров режима резания.
3. Определить методы построения эмпирических моделей по результатам регрессионного анализа технических исследований.

**Методы исследований.** Для решения представленных задач и в соответствии с целью работы, использовали результаты технических исследований по определению влияния параметров режима резания на степень наклепа поверхности просверленных отверстий [1]. Сверлили сквозные отверстия глубиной, равной трем диаметрам сверла в заготовках из стали 45 180HB спиральными сверлами диаметром 11 мм по ГОСТ [2] из быстрорежущей стали P6M5 класса точности A1, с осевым биением режущих кромок 0,06 мм, с поливом СОЖ – 5 % водным раствором эмульсола Укринол1.

Твердость поверхности просверленных отверстий измеряли по методу Роквелла в единицах HRC с применением индентора с алмазным конусом. Степень наклепа рассчитывали по формуле:

$$\Delta HRC = \frac{HRC_{\text{п}} - HRC_{\text{исх}}}{HRC_{\text{исх}}} 100 \%,$$

где  $HRC_{\text{п}}$  – твердость обработанной поверхности;  $HRC_{\text{исх}}$  – исходная твердость материала заготовок.

**Результаты исследований.** Прежде чем приступить к регрессионному анализу технических исследований, необходимо определить наличие и значимость связи между исследуемыми переменными величинами, т. е. наличие и значимость корреляции между ними. Для этого необходимо провести корреляционный анализ, методы которого зависят от закона распределения случайных переменных величин. Известно, что при нормальном распределении случайных величин по закону Гаусса для определения наличия и значимости корреляции между ними, следует использовать коэффициент линейной корреляции Пирсона. Методика определения нормальности распределения случайных величин при

малых объемах выборок (от 15 до 50) регламентирована ГОСТом [3], который предлагает использовать составной критерий для проверки нормальности их распределения (критерий 1 и критерий 2, приложение Б [3]). В таблице 1 приведены результаты исследований по определению влияния параметров режима резания на степень наклепа поверхности просверленных отверстий.

Проверка нормальности распределения величин степени наклепа, являющихся случайными выходными параметрами исследований, позволила определить критерий 1 и критерий 2 [3], которые подтвердили нормальное распределение величин степени наклепа. Это, в свою очередь, позволяет использовать коэффициент линейной корреляции Пирсона, рассчитываемый по формуле [4]:

$$r = \frac{\sum(x_i - M_x)(y_i - M_y)}{(N - 1)\sigma_x\sigma_y}, \tag{1}$$

где  $x_i$  и  $y_i$  – случайные величины;  $M_x$  и  $M_y$  – математические ожидания случайных величин;  $N$  – объем выборки;  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  – средние квадратические отклонения случайных величин. Использование средних значений случайных величин  $x_i$  и  $y_i$  позволило преобразовать зависимость (1) в следующий вид:

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}. \tag{2}$$

Формула (2) позволяет рассчитать коэффициенты корреляции между неслучайными параметрами режима резания и случайными величинами степени наклепа, приведенные в таблице 2.

Данные таблицы 2 показывают, все коэффициенты корреляции значимые, т. е. превышают критические значения, представленные в приложении 6 [4].

Следующим этапом статистических исследований является регрессионный анализ, задача которого заключается в определении коэффициентов регрессии статистических зависимостей. Линейная корреляция между исследуемыми переменными определяет линейную регрессию между ними. Коэффициенты регрессии  $a$  и  $b$  линейной зависимости случайной переменной  $y$  от неслучайной переменной

Таблица 1 – Степень наклепа поверхности просверленных отверстий ΔHRC

V, м/мин	S, мм/об					
	0,078	0,1	0,13	0,16	0,20	0,25
	ΔHRC, %					
2,18					37,5	52,5
2,76				20,9	35	58,25
3,45			17,9	38,25	46,25	53,75
4,32		16,3	19,1	33,75	43,75	60
5,53	33,4	42,5	37,5	44,5	56,25	75,4

Таблица 2 – Коэффициенты корреляции r, рассчитанные по зависимости (2)

S, мм/об	Связь V – ΔHRC		V, м/мин	Связь S – ΔHRC	
	r	Значим		r	Значим
0,2	0,9075	Значим	4,32	0,99	Значим
0,25	0,887	Значим	5,53	0,934	Значим

$x$  в виде  $y = a + bx$  с применением принципа наименьших квадратов, определяются следующим образом [5]:

$$a = \frac{\sum y_i - b \sum x_i}{N}, \quad (3)$$

$$b = \frac{N \sum y_i x_i - \sum y_i \sum x_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (4)$$

Коэффициент корреляции линейности полученной зависимости определяли по формуле:

$$r = b \cdot \sqrt{\frac{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{N \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}, \quad (5)$$

степень близости коэффициента корреляции к единице определяет степень линейности найденной зависимости.

Правильность вычислений проверяли по формуле:

$$\sum (y_i + x_i)^2 = \sum y_i^2 + 2 \sum y_i x_i + \sum x_i^2.$$

Использование методов математических преобразований линейных логарифмических выражений и принципа наименьших квадратов позволяет определить коэффициенты регрессии нелинейных зависимостей вида:  $y = ax^b$  – степенной;  $y = ae^{bx}$  – экспоненциальной и  $y = ab^x$  – показательной. Все эти зависимости могут быть представлены в линейном виде после логарифмирования. Степенная зависимость в виде  $\ln y = \ln a + b \ln x$ , экспоненциальная –  $\ln y = \ln a + bx$ , показательная –  $\ln y = \ln a + \ln bx$ .

Тогда формулы для расчета коэффициентов регрессии (3) и (4) и коэффициента корреляции (5) степенной зависимости примут вид:

$$\ln a = \frac{\sum \ln y_i - b \sum \ln x_i}{N},$$

$$a = e^{\ln a},$$

$$b = \frac{N \sum \ln y_i \ln x_i - \sum \ln y_i \sum \ln x_i}{N \sum \ln x_i^2 - (\sum \ln x_i)^2},$$

$$r = b \cdot \sqrt{\frac{N \sum \ln x_i^2 - (\sum \ln x_i)^2}{N \sum \ln y_i^2 - (\sum \ln y_i)^2}}.$$

Правильность вычислений проверяли по формуле:

$$\sum (\ln y_i + \ln x_i)^2 = \sum \ln y_i^2 + 2 \sum \ln y_i \ln x_i + \sum \ln x_i^2.$$

Формулы для расчета коэффициентов регрессии (3) и (4) и коэффициента корреляции (5) экспоненциальной зависимости примут вид:

$$\ln a = \frac{\sum \ln y_i - b \sum x_i}{N},$$

$$a = e^{\ln a},$$

$$b = \frac{N \sum \ln y_i x_i - \sum \ln y_i \sum x_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

$$r = b \cdot \sqrt{\frac{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{N \sum \ln y_i^2 - (\sum \ln y_i)^2}},$$

Правильность вычислений проверяли по формуле:

$$\sum (\ln y_i + x_i)^2 = \sum \ln y_i^2 + 2 \sum \ln y_i x_i + \sum x_i^2.$$

Формулы для расчета коэффициентов регрессии (3) и (4) и коэффициента корреляции (5) показательной зависимости примут вид:

$$\ln a = \frac{\sum \ln y_i - \ln b \sum x_i}{N},$$

$$a = e^{\ln a},$$

$$\ln b = \frac{N \sum \ln y_i x_i - \sum \ln y_i \sum x_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

$$b = e^{\ln b},$$

$$r = \ln b \cdot \sqrt{\frac{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{N \sum \ln y_i^2 - (\sum \ln y_i)^2}}.$$

Правильность вычислений проверяли по формуле:

$$\sum (\ln y_i + x_i)^2 = \sum \ln y_i^2 + 2 \sum \ln y_i x_i + \sum x_i^2.$$

В таблице 3 приведены результаты регрессионного анализа технических исследований.

В таблице 3 коэффициенты корреляции близки по величине, что не позволяет выбрать наиболее адекватные из них по результатам исследований для построения эмпирической модели.

Наиболее адекватные из найденных зависимостей можно определить методом сравнительного анализа величин средней ошибки расчетов (Ср.  $\Delta$ , %) (таблица 4).

В таблице 4 минимальную среднюю ошибку расчетов на подаче 0,25 мм/об имеет зависимость (6), а на подаче 0,2 мм/об – зависимость (7). Минимальную среднюю ошибку расчетов на скорости резания 5,53 м/мин имеет зависимость (8) а на скорости резания 4,32 м/мин – зависимость (9).

Таблица 3 – Статистические зависимости технических исследований

S, мм/об	Зависимости	r	V, м/мин	Зависимости	r
0,25	$\Delta HRC = 37,61+6,13V$	0,88	5,53	$\Delta HRC = 16,51+225,46S$	0,94
0,25	$\Delta HRC = 39,5V^{0,33}$	0,84	5,53	$\Delta HRC = 155,67S^{0,62}$	0,9
0,25	$\Delta HRC = 41,8e^{0,096V}$	0,89	5,53	$\Delta HRC = 23,8e^{4,368S}$	0,95
0,25	$\Delta HRC = 41,797 \times 1,1^V$	0,88	5,53	$\Delta HRC = 23,8373 \times 78,345^S$	0,95
0,2	$\Delta HRC = 22,85+5,73V$	0,9	4,32	$\Delta HRC = 328,64S-21,65$	0,9
0,2	$\Delta HRC = 24,72V^{0,448}$	0,88	4,32	$\Delta HRC = 650,74S^{1,68}$	0,9
0,2	$\Delta HRC = 27,137e^{0,127V}$	0,9	4,32	$\Delta HRC = 6,87e^{8,96S}$	0,9
0,2	$\Delta HRC = 27,133 \times 1,1355^V$	0,9	4,32	$\Delta HRC = 6,6387 \times 9216,033^S$	0,9

Таблица 4 – Сравнительный анализ адекватности статистических зависимостей

S, мм/об	Зависимости	Ср. Δ, %	V, м/мин	Зависимости	Ср. Δ, %
0,25	$\Delta HRC = 37,61+6,13V$	6,1	5,53	$\Delta HRC = 16,51+225,46S$	12,3
0,25	$\Delta HRC = 39,5V^{0,33}$	6,6	5,53	$\Delta HRC = 155,67S^{0,62}$	11,3
0,25	$\Delta HRC = 41,8e^{0,096V}$	5,5	5,53	$\Delta HRC = 23,8e^{4,368S}$	8,0
0,25	$\Delta HRC = 41,797 \times 1,1^V$	5,62	5,53	$\Delta HRC = 23,8373 \times 78,345^S$	8,65
0,2	$\Delta HRC = 22,85+5,73V$	7,2	4,32	$\Delta HRC = 328,64S-21,65$	11,3
0,2	$\Delta HRC = 24,72V^{0,448}$	7,8	4,32	$\Delta HRC = 650,74S^{1,68}$	9,4
0,2	$\Delta HRC = 27,137e^{0,127V}$	6,7	4,32	$\Delta HRC = 6,87e^{8,96S}$	9,3
0,2	$\Delta HRC = 27,133 \times 1,1355^V$	6,99	4,32	$\Delta HRC = 6,6387 \times 9216,033^S$	9,31

$$\Delta HRC = 41,8e^{0,096V} \tag{6}$$

$$\Delta HRC = 27,137e^{0,127V} \tag{7}$$

$$\Delta HRC = 23,8e^{4,368S} \tag{8}$$

$$\Delta HRC = 6,87e^{8,96S} \tag{9}$$

Эти зависимости являются наиболее адекватными результатам исследований, поэтому они использованы для построения эмпирической модели исследований.

Первым этапом построения эмпирической модели является приведение указанных четырех статистических зависимостей в одну следующим образом:

$$\Delta HRC = ae^{\frac{0,096+0,127V+4,368+8,96S}{2}} = ae^{0,11V+6,68S} \tag{10}$$

Таблица 5 – Сравнительный анализ адекватности эмпирической модели

S, мм/об	V = 5,53 м/мин			V = 4,32 м/мин		
	$\Delta$ HRC факт.	$\Delta$ HRC расч.	$\Delta$ , %	$\Delta$ HRC факт.	$\Delta$ HRC расч.	$\Delta$ , %
0,25	75,4	73,0	2,4	60	63,91	6,5
0,2	56,25	52,28	7,1	43,75	45,76	4,6

Следующий этап построения эмпирической модели заключается в определении коэффициента регрессии  $a$  зависимости (10) с использованием результатов исследований, представленных в таблице 2 следующим образом:

$$a_i = \frac{\Delta HRC_i}{e^{0,11V+6,68S}},$$

$$a = \frac{\sum a_i}{N}.$$

В результате применения настоящей методики получена эмпирическая модель, позволяющая определить степень наклепа при варьировании скоростью резания и подачи в виде:

$$\Delta HRC = 7,48e^{0,11V+6,68S}. \quad (11)$$

Проведен сравнительный анализ адекватности эмпирической модели (11) результатам настоящих исследований (таблица 5), который позволил определить фактические и рассчитанные значения степени наклепа поверхности отверстий и погрешность расчетов.

Средняя погрешность расчетов эмпирической модели (11) составила 5,15 % (таблица 5).

**Выводы.** Определены методы статистического анализа, позволяющие использовать результаты технических исследований по влиянию параметров режима резания на степень наклепа поверхности отверстий, обработанных быстрорежущими спиральными сверлами.

Разработаны методы регрессионного анализа технических исследований, позволяющие определить коэффициенты регрессии статистических зависимостей случайных результатов исследований от неслучайных параметров режима резания.

Представлены методы построения эмпирических моделей по результатам регрессионного анализа технических исследований.

Поступила: 10.02.23; рецензирована: 27.02.23; принята: 02.03.23.

#### Литература

1. Рагрин Н.А. Обеспечение качества поверхностного слоя отверстий, обработанных сверлением / Н.А. Рагрин, У.М. Дыйканбаева, Д.М. Курганова // Вестник КРСУ. 2022. Т. 22. № 4. С. 179–185.
2. ГОСТ 10903-77 Сверла спиральные с коническим хвостовиком. Основные размеры. Дата введения 01.01.79.
3. ГОСТ Р 8.736-2011 Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. М.: Стандартинформ, 2013. 19 с.
4. Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных: учеб. пособие / А.Д. Наследов. СПб.: Речь, 2004. 392 с.
5. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений / Е.И. Пустыльник. М.: Наука, 1968. 288 с.