УДК 62-50

МЕТОД ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУБОСТИ: ПРИЛОЖЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЯМ СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ОМОРОВ Р.О.
Институт теоретической и прикладной математики
izvestiya@ktu.aknet.kg

Рассматриваются основы метода «топологической грубости» предложенного автором на базе понятия грубости по Андронову-Понтрягину, а также его приложение к исследованиям синергетических систем. Показаны возможности использования данного метода для исследований синергетических систем на примерах систем Лоренца, «хищник-жертва» и бифуркации Хопфа.

В последние десятилетия в современной науке возрастает интерес к ее объединяющим направлениям, рассматривающим явление природы и общества с единых точек зрения в зависимости от проявляемых ими свойств и характеристик. К одному из таких направлений науки относится наука – синергетика, которая занимается самоорганизующимися процессами, явлениями и системами [1-5].

Синергетика в настоящее время вторгается во все области науки, начиная с естественных наук – физики, химии, биологии, геологии, геофизики и кончая неточными областями наук, такими как экономика, социология, психология, философия, распознавание космических первообразов, а также в области техники и технологий[1- 9].

Многие ученые и исследователи в настоящее время ставят задачи не только исследования синергетических процессов и систем, но и управления ими с целью достижения их желаемого развития и динамики. Особенно актуальны в современной науке исследование и управление хаотическим поведением или иначе хаосом в системах различной физической природы, начиная с физических и химических, кончая в экономических и социальных системах [9].

Основоположниками синергетики по праву являются выдающиеся в мире ученые – бельгийский химик и физик, Нобелевский лауреат Илья Пригожин и немецкий физик Герман Хакен. При этом следует отметить, что теоретической основой исследований синергетических систем и явлений является современная теория динамических систем, обладающая мощным математическим аппаратом.

При исследовании и управлении синергетическими системами важнейшее значение имеют вопросы грубости и бифуркаций. Одним из современных методов в изучении свойств и явлений грубости, бифуркаций синергетических систем, а также управления этими свойствами и явлениями служит метод «топологической грубости», теоретические основы которого заложены в работах [10,11] на базе понятия грубости по Андронову – Понтрягину [13].

Важнейшей характеристикой метода является возможность единообразной непрерывной оценки грубости (негрубости), как для грубых, так и не грубых явлений и систем, в частности, для динамического хаоса. При этом метод позволяет решать задачу управления грубостью процессов в синергетических системах. В заключительной части данной работы приводятся иллюстрации исследований топологической грубости на примерах широко известных синергетических систем – Лоренца, «хищник-жертва» и бифуркации Хопфа.

Основы метода. Изложим основные идеи, понятия и инструментарии метода «топологической грубости».

В классической постановке вопросы грубости и бифуркаций были поставлены еще на заре становления топологии как нового научного направления математики великим французским математиком и физиком А. Пуанкаре [12], в частности термин бифуркация впервые введен им и означает дословно «раздвоение» или иначе от решений уравнений динамических систем ответвляются новые решения. Грубость динамических систем при этом определяется, как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологий, при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

В современной терминологии «бифуркация» употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в любой системе. Таким образом, бифуркация означает переход между пространствами грубых систем.

Переход между грубыми системами осуществляется через негрубые области (пространства). Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркации получены А.А.Андроновым и его школой.

В работе [13] впервые дано понятие грубости и сформулированы качественные критерии грубости, которое впоследствии, названо понятием грубости по Андронову-Понтрягину.

В многомерной постановке рассматривается динамическая система (ДС) n-го порядка

$$\dot{z}(t) = F(z(t)), \qquad (1)$$

где ($z(t) \in R^n$ - вектор фазовых координат, F – n –мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову – Понтрягину в некоторой области G если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\tilde{G}$, области G:

$$\dot{\tilde{z}} = F(\tilde{z}) + f(\tilde{z}), \qquad (2)$$

где $f(\tilde{z})$ – дифференцируемая малая по какой либо норме $\|\cdot\|$ n – мерная вектор-функция, являются ε – тождественными в топологическом смысле.

Системы (1) и (2) ε – тождественны, если существуют открытые области D, $\tilde{D}$ в n – мерном фазовом пространстве также, что $D \subset \tilde{D} \subset \tilde{G} \subset G$

$$\exists\ \varepsilon, \delta > 0:$$

$$\text{если} \quad \|f(\tilde{z})\| < \delta, \quad |df_i(\tilde{z}) / dz_j| < \delta, \quad i, j = \overline{1, n}, \qquad (3)$$

$$\text{то} \quad |\|z\| - \|\tilde{z}\|| < \varepsilon, \qquad (4)$$

$$\text{или} \quad (\tilde{D}, (2)) \overset{\varepsilon}{\equiv} (D, (1)), \qquad (5)$$

иначе, разбиение областей $\tilde{D}$ и D траекториями систем (2) и (1) ε – тождественны (имеют одинаковые топологические структуры с траекториями близкими до ε).

Если (5) не выполняется, то система (1) негруба по Андронову-Понтрягину.

Топологическая структура динамических систем определяется особыми траекториями и многообразиями типа особых точек, особых линий, замкнутых траекторий, притягивающих многообразий (аттракторов).

В работе [10] на основе понятия грубости по Андронову-Понтрягину предложены основы метода «топологической грубости» на базе меры грубости в виде числа обусловленности C {M} – матрицы M - нормированной матрицы приведения системы к каноническому диагональному (квазидиагональному) виду в особых точках фазового пространства. Здесь же, впервые введено понятие максимальной грубости и минимальной негрубости на отношениях пары δ и ε.

Очевидно, число обусловленности C{M} как меру грубости можно использовать и для кусочно-гладких динамических систем, рассматривая совокупную грубость по областям гладкости системы, если особые точки не находятся на границе этих областей. Следует отметить, что для негладких систем, используя какую-либо обобщенную производную из негладкого анализа при определении матрицы линейной части, можно обобщить эту меру грубости.

В работе [14] рассмотрена мера грубости периодических движений с периодом T в виде числа обусловленности C_T по матрице монодромии X(T) этих движений:

$C_T = C\ \{M(T)\}$:

$M(T)\ \Lambda(T) = X(T)M(T), \qquad (6)$

где $\Lambda(T) = \mathrm{diag}\{\mu_i, i=\overline{1,n}\}$, μ – мультипликаторы (собственные значения) матрицы X(T), T – период колебаний цикла. Заметим, что аналогичную меру грубости можно ввести и для приводимых не стационарных линейных систем, рассматривая в качестве X(T) матрицу P приведенной системы.

Теоретические результаты метода «топологической грубости», полученные в работах [6,10,11], позволяют управлять грубостью синергетических систем.

При этом управление $u = u(t) \in U$ ищется в классе систем с обратной связью $u = -Kx$, такое, что матрица замкнутой системы вблизи особых траекторий, в частности особых точек F= A-B K, удовлетворяет условиям

$G(F) = G(\Gamma),\ M\Gamma - AM = -B, \qquad (7)$

$K = HM^{-1}$,

где $\Gamma \in R^{n\times n}$ –диагональная (квазидиогональная) матрица состояния канонической модели, $H \in R^{m\times n}$ – матрица, задаваемая произвольно с ограничением на наблюдаемость пары (Г,H), $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ – матрицы состояния и управления;

Вблизи особой точки:

$F(z(t)) = 0, \dot{z} = A z + B u,$ (8)

управление $u = u(t) \in U$ синтезируется так, чтобы достичь требуемого значения показателя C{M} используя какие – либо методы нелинейного программирования.

Метод «топологической грубости также позволяет определять бифуркации синергетических систем на основе критериев разработанных в работах [8,27]. Более того метод представляет возможности прогнозирования бифуркаций, а также управления параметрами бифуркаций. Здесь лишь приведем соответствующее утверждение, выводы которых доказаны в работе [11].

Теорема. Для того, чтобы в области G многомерной (n>2) ДС при значении параметра q = q*, $q \in Rp$ возникла какая-нибудь бифуркация топологической структуры, необходимо и достаточно, чтобы:

- либо 1), в рассматриваемой области G ДС, существуют негиперболические (негрубые) особые точки (ОТ), или орбитально-неустойчивые предельные циклы (ПЦ), для которых имеет место равенство

$$C\{M(q^*)\} = \min \sum_{i=1}^{p} C_i \{M(q)\}, \qquad (9)$$

где p – количество ОТ или ПЦ в области G,

- либо 2), в области G ДС, имеются какие-либо грубые ОТ или ПЦ, для которых выполняется условие:

$$C\{M(\overline{q^*)}\} = \infty. \qquad (10)$$

Примеры. Возможности метода «топологической грубости» проиллюстрируем на примерах известных систем.

Система Лоренца. Модель тепловой конвекции в атмосфере, предложенная и исследованная в 1963 году американским метеорологом Е.Лоренцом [1-6,11,14], описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x` &= \sigma( y - x ), \\ y` &= \rho x - y - xz, \qquad (11) \\ z` &= xy - \beta z, \end{aligned}$$

где x – переменная, пропорциональная амплитуде скорости движения, а переменные y,z отражают распределение температуры в конвективном кольце, параметр σ – представляет собой число Прандтля, ρ – число Рэлея, а β = 8 / 3 – геометрический множитель.

Наиболее часто полагают параметр σ = 10, а параметр ρ варьируется.

Исследованиями системы с использованием меры грубости C{M} подтверждены основные бифуркации этой системы, что показано на рис.1. Так при ρ = 24.74 показатель C{M} достигает локального минимума равного 1.389, а в системе (11) возникают хаотические колебания с областью хаоса, получившим широкую известность как «аттрактор Лоренца».

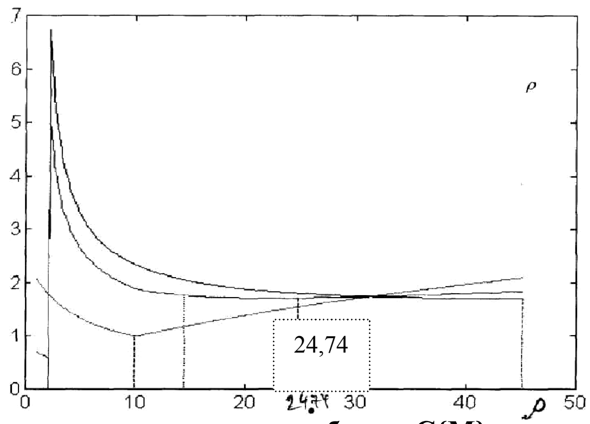

Рис.1. Зависимость показателя грубости C{M} от варьируемого параметра ρ

Система «хищник-жертва». Впервые эта система была рассмотрена итальянским математиком В.Вольтерра [6,11,15,16]. В двумерном случае эта система описывается уравнениями:

$x` = \alpha x - \beta xy,$

$y` = \kappa\beta xy – my,$ (12)

где x,y – численности популяций соответственно жертв и хищников, α,β – мальтузианская и трофическая постоянные жертвы, показывающие соответственно скорость роста количеств жертв при отсутствии хищников и скорость потребления жертв одним хищником, κ – к.п.д. переработки биомассы жертвы в биомассу хищника, m – коэффициент смертности хищника.

Рассматривается пример [16]:

$x` = -3x + 4x - 0.5xy – x$,

$y` = -2.1y + xy$ (13)

В этой системе четыре особые точки: ОТ1(0,0); ОТ2(1.0, 0); ОТ3(3.0, 0); и ОТ4(2.1, 1.98).

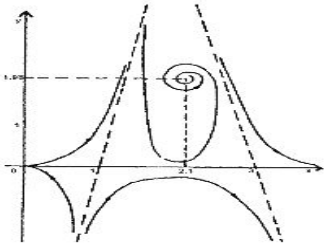

Рис. 2. Фазовый портрет системы «хищник-жертва» (13)

Матрицы линейных частей в этих ОТ соответственно равны

A1 = [-3, 0; 0, -2.1], A2 = [2, -0.5; 0, 0.9], A3 = [-6, -1.5; 0, 0.9], A4 = [-0.42, -1.05; 1.98,0].

Собственные значения и типы особых точек:

ОТ1: $\lambda1 = –3$, $\lambda2 = –2.1$ – «устойчивый узел»; ОТ2 : $\lambda1 = –1.1$, $\lambda2 = 2$ – «седло»; ОТ3 : $\lambda1 = –6$, $\lambda2 = 0.9$ – «седло»; ОТ4 : $\lambda1,2 = - 0.21 \pm j\ 1.43$, - «устойчивый фокус».

Находим:

M1 =[1, 0; 1, 0], M2 =[1, 0.159; 0, 0.987], M3 =[1, 0.2124; 0, -0.977], M4 =[0.389, 0.737; 0.924, -0.676]. Значения C{Mi}, i =1,2,3,4 : C{M1}=1.0; C{M2}=1.174; C{M3}=1.241;C{M4}=1.421.

По суммарной оценке ¼∑C{Mi} = 1.21 видно, что данная экологическая система достаточно груба, близка к максимально грубой системе, когда 1/i ∑C{Mi} = 1.

Бифуркация Хопфа. Эту бифуркацию иногда называют бифуркацией Пуанкаре-Андронова-Хопфа по именам первых исследователей этого типа бифуркаций [1,3,6,11].

Бифуркацией Хопфа называется бифуркация возникновения (исчезновения) предельного цикла в синергетической системе.

Простейший пример бифуркации Хопфа наблюдается для двумерной системы:

$x = - [-q + (x + y)]x - \omega y,$

$y = - [-q + (x + y)]y + \omega x$ 14линейная часть которой [x , y] = A [x, y] , где $A = [q, -\omega; \omega, q]$, а собственные значения $\lambda1,2 = q \pm j\ \omega$.

При переходе значения q через нулевое значение q = 0, наблюдается бифуркация Хопфа. При этом, собственные значения пересекают мнимую ось, а величина C{M} = 1.

Литература

1. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. / Пер. с англ.- М.: Мир, 1985. – 423 с.
2. Синергетика: Сб.статей. Пер. с англ. / Сост. А.И.Рязанов, А.Д.Суханов. Под ред. Б.Б.Кадомцева. – М.: Мир, 1984.- 248 с.
3. Николис Г. Пригожин И. Познание сложного: Введение / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 342 с.
4. Странные аттракторы. Сб.пер. с англ. / под ред. Я.Г.Синая, Л.П.Шильникова - М.: Мир, 1981 – 253 с.
5. Haken H. Synergetics: Introcluction and advanced Topics. Springer.2004. – 356 p.
6. Оморов Р.О. Синергетические системы: Проблемы грубости, бифуркаций и катастроф // Наука и новые технологии, 1997, №2. с. 26-36.
7. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории./ Пер. с англ.- М.: Мир, 1999. -335с.
8. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. М.:Эдиториал УРСС, 2001. – 288 с.
9. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения.I. Методы // Аи Т.2003.№5. с. 3-45.
10. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // А иТ.-1991. №8 с. 36-45.
11. Оморов Р.О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления. Докторская диссертация. –Санкт-Петербург: СПбИТМО, 1992. – 188 с.
12. Пуанкаре А. О кривых определяемых дифференциальными управлениями. Пер.с франц.под ред. А.А.Андронова. – М. –Л.: Гостехиздат.1947. – 392 с.
13. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Докл.АН СССР. 1937. Т.14.
14. Оморов Р.О. Мера грубости динамических систем и критерии возникновения хаотических колебаний и бифуркаций в синергетических системах.// В межведомствен. сборн. Синтез алгоритмов стабилизации систем. Вып.8. Таганрог. 1992. с.128 – 134.
15. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. –М: Наука, 1976.-286 с.
16. Goh B.S., Leitmann G., Vincent T.L. Optimal Control of a Prey-Predator System// Math. Biosci. 1974. –V.19, № 3-4. P. 263-286.