УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УРОВНЕМ ГРУНТОВЫХ ВОД В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТАХ

МУРЗАКМАТОВ М.У., МАДАНБЕКОВА Э.Э.
Ысык-Кульский государственный университет им. К.Тыныстанова, г.Каракол
izvestiya@ktu.aknet.kg

В работе разрабатывается алгоритм приближенного решения задачи оптимального управления уровнем грунтовых вод в многослойных пластах

Для наилучшего обеспечения корнеобитаемого слоя растений влагой необходимо удерживать уровень грунтовых вод (УГВ) на определенной глубине от поверхности земли. На режим грунтовых вод влияют многие факторы, главные из которых — инфильтрация, приток и отток грунтовых вод через границы области фильтрации, а также перетоки из нижележащих напорных водоносных горизонтов через слабопроницаемые прослойки. Мы рассмотрим задачу оптимального управления УГВ с помощью инфильтрации (т.е. функции источников и стоков) в случае многослойного строения водоносных пластов.

Задача оптимального управления УГВ ставится следующим образом [1,2]. Требуется

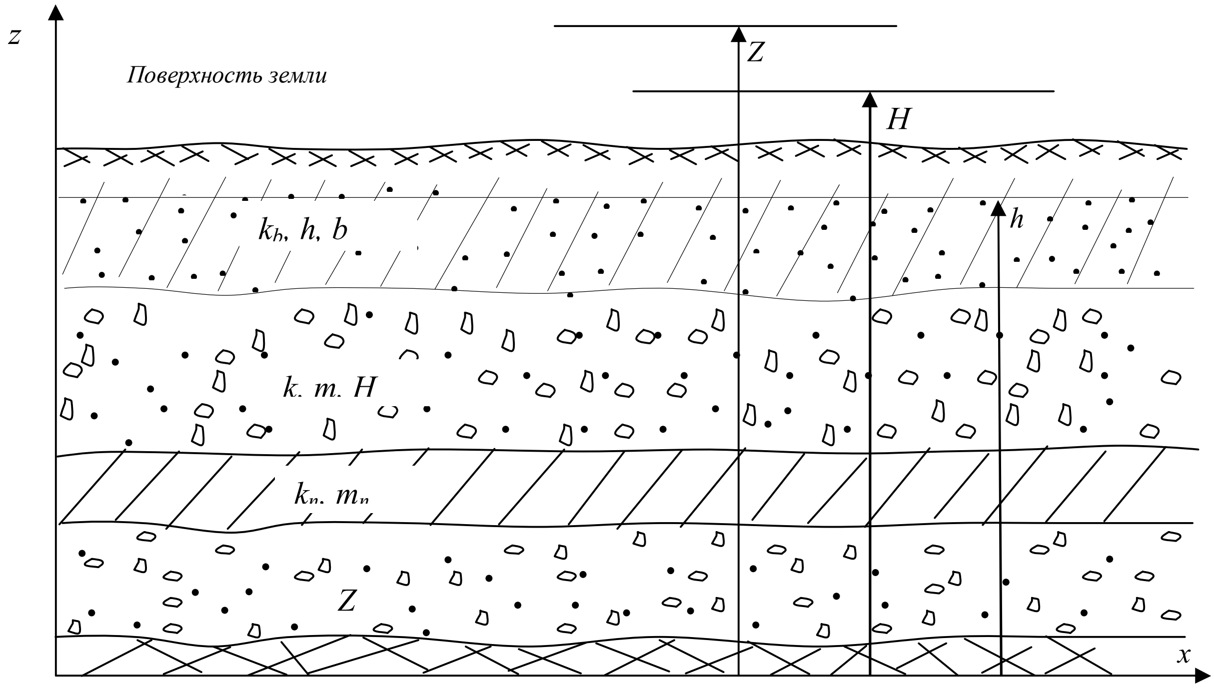

Рис.1. Схема строения многослойных пластов

построить такую управляющую функцию $f(x,y,t)$, которая при $t \geq t_0$ доставляет минимум функционалу

$$J(f) = \iint_D [h(x,y,t_0; f(x,y,t_0)) - \varphi(x,y)]^2 dxdy + \alpha \iint_D \int_0^T [f(x,y,t)]^2 dxdydt, \quad (1)$$

где $h(x,y,t)$ — УГВ; $\varphi(x,y)$ — заданная функция, равная оптимальному УГВ; $\alpha > 0$ — параметр регуляризации; D — область фильтрации; t_0 — заданный момент времени.

Функция $f_{опт}(x,y,t)$, доставляющая минимум функционалу (1), называется оптимальным управлением, а соответствующая ей функция $h_{опт}(x,y,t)$ — оптимальным УГВ.

УГВ $h(x,y,t)$ определяется из следующей системы дифференциальных уравнений, описывающей движение подземных вод в многослойных пластах:

$$\begin{cases} \mu_b \dfrac{\partial h}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left[k_b(h-b)\dfrac{\partial h}{\partial x}\right] - \dfrac{\partial}{\partial y}\left[k_b(h-b)\dfrac{\partial h}{\partial y}\right] + k_b\dfrac{h-H}{m_b} = f(x,y,t), & (2) \\ \mu_{óïð}\dfrac{\partial H}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial H}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial H}{\partial y}\right) - k_b\dfrac{h-H}{m_b} + \dfrac{k_{ï}}{m_{ï}}(H-Z) = W(x,y,t), & (3) \end{cases}$$

$(x,y)\in D, \quad t>0$ с соответствующими начальными $\begin{cases} h(x,y,0)=h_0(x,y), \\ H(x,y,0)=H_0(x,y), \end{cases}$ $(x,y)\in D$ (4) и

краевыми $\begin{cases} k_b(h-b)\dfrac{\partial h}{\partial n} + \beta_b h = \alpha_b, \\ T\dfrac{\partial H}{\partial n} + \beta H = \alpha \end{cases}$ $(x,y)\in S=\partial D, \qquad t>0$ (5) условиями.

В формулах (2)—(5) приняты следующие обозначения (рис.1): $h(x,y,t)$, $H(x,y,t)$, $Z(x,y)$— отметки УГВ в верхнем покровном слое и напоров в основном и нижележащем напорных пластах соответственно; $k_b(x,y)$, $k(x,y)$, $k_{ï} = const$— коэффициенты фильтрации верхнего, основного водоносного и слабопроницаемого слоев; $T(x,y)=k(x,y)\cdot m(x,y)$— водопроницаемость основного пласта; $m_b(x,y,t)=h(x,y,t)-b(x,y)$, $m(x,y)$ и $m_{ï} = const$— мощности покровного, напорного и слабопроницаемого слоев; $b(x,y)$— граница раздела покровного и основного напорного пластов; μ_b и $\mu_{упр}$ — коэффициенты водоотдачи и упругоемкости верхнего и напорного пластов; $W(x,y,t)$ — функция, учитывающая работу эксплуатационных скважин, пробуренных в основной водоносный горизонт; $h_0(x,y)$ и $H_0(x,y)$— начальные распределения УГВ и напоров; $\beta_b(x,y,t)$, $\beta(x,y,t)$, $\alpha_b(x,y,t)$ и $\alpha(x,y,t)$— известные функции; D— область фильтрации в плане, $S=\partial D$— ее граница; $\vec{n}$— внешняя нормаль к границе области; $\dfrac{\partial}{\partial n}$— производная по этой нормали.

Задача (2)—(5) решается численно методом конечных элементов [3].

В сеточной области представим искомые функции в виде

$$h_n(x,y,t)=\sum_{e=1}^{m} h^{(e)}(x,y,t)=\sum_{j=1}^{n} h_j(t)N_j(x,y), \quad (6)$$

$$H_n(x,y,t)=\sum_{e=1}^{m} H^{(e)}(x,y,t)=\sum_{j=1}^{n} H_j(t)N_j(x,y). \quad (7)$$

где $N_j(x,y)$ – линейные базисные функции.

Образуем временную сетку с шагом $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$, $s=1,2,\dots$ и перепишем уравнения (2), (3), и (5) в виде

$$\begin{cases} L_h h = F_h, \qquad l_h h = \alpha_b, & (8) \\ L_H H = F_H, \qquad l_H H = \alpha, & (9) \end{cases}$$

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

где $$L_h = \mu_b \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_b \frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T_b \frac{\partial}{\partial y}\right) + Q_b,$$

$$L_H = \mu_{\text{óïð}} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T \frac{\partial}{\partial y}\right) + Q,$$

$$l_h = T_b \frac{\partial}{\partial n} + \beta_b, \qquad l_H = T \frac{\partial}{\partial n} + \beta, \tag{10}$$

$$Q_b = \frac{k_b}{m_b}, \qquad F_h = f(x,y,t) + Q_b H(x,y,t), \qquad T_b = k_b(h-b),$$

$$Q = Q_b + \frac{k_n}{m_n}, \quad F_H = W(x,y,t) + Q_b h(x,y,t) + \frac{k_{\text{ï}}}{m_{\text{ï}}} Z(x,y).$$

Уравнение (2) является нелинейной (т.к функция $T_b(x,y,t)$ зависит от $h(x, y, t)$), поэтому для его решения применяется итерационная процедура: в каждой итерации в выражении для T_b берутся значения функции $h(x, y, t)$, полученные из предыдущей итерации.

В уравнениях (8) и (9) вместо функций $h(x, y, t)$ и $H(x, y, t)$ подставим соответственно функции $h_п(x, y, t)$ и $H_п(x, y, t)$ из формул (6) и (7). Применяя к уравнениям (8) и (9) обобщенный принцип Галеркина и интегрируя полученные равенства на отрезке $\left[t_{s-1}, t_s\right]$ имеем:

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_D N_i(L_h h_n - F_h) d\sigma\, dt = -\int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_S N_i(l_h h_n - \alpha_b) ds dt = 0, \tag{11}$$

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_D N_i(L_H H_n - F_H) d\sigma\, dt = -\int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_S N_i(l_H H_n - \alpha) ds dt = 0, \tag{12}$$

$$i = 1,2,\ldots,n.$$

Отсюда получаем системы уравнений $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(h)} h_j^{(s)} = b_i^{(h)}, \qquad i = 1,2,\ldots,n; \quad s = 1,2,\ldots \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(H)} H_j^{(s)} = b_i^{(H)}, \qquad i = 1,2,\ldots,n; \quad s = 1,2,\ldots \tag{14}$$

где $$a_{ij}^{(h)} = \frac{1}{\Delta t_s} M_{ij}^{(h)} + \gamma\left(T_{ij}^{(h)} + Q_{ij}^{(h)} + B_{ij}^{(h)}\right), \qquad a_{ij}^{(H)} = \frac{1}{\Delta t_s} M_{ij}^{(H)} + \gamma\left(T_{ij}^{(H)} + Q_{ij}^{(H)} + B_{ij}^{(H)}\right),$$

$$b_i^{(h)} = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{\Delta t_s} M_{ij}^{(h)} - (1-\gamma)\left(T_{ij}^{(h)} + Q_{ij}^{(h)} + B_{ij}^{(h)}\right)\right] h_j^{(s-1)} + F_i^{(h)} + A_i^{(h)},$$

$$b_i^{(H)} = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{\Delta t_s} M_{ij}^{(H)} - (1-\gamma)\left(T_{ij}^{(H)} + Q_{ij}^{(H)} + B_{ij}^{(H)}\right)\right] H_j^{(s-1)} + F_i^{(H)} + A_i^{(H)}.$$

$$M_{ij}^{(h)} = \iint_D N_i(x,y) N_j(x,y) \mu_b(x,y) d\sigma,$$

$$M_{ij}^{(H)} = \iint_D N_i(x,y) N_j(x,y) \mu_{упр}(x,y) d\sigma,$$

$$h_j^{(s)} = h(x_j, y_j, t_s), \quad H_j^{(s)} = H(x_j, y_j, t_s), \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

$$T_{ij}^{(h)} = \iint_D T_b(x,y)\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) d\sigma, \quad T_{ij}^{(H)} = \iint_D T(x,y)\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) d\sigma,$$

$$Q_{ij}^{(h)} = \iint_D N_i(x,y) N_j(x,y) Q_b(x,y) d\sigma, \qquad Q_{ij}^{(H)} = \iint_D N_i(x,y) N_j(x,y) Q(x,y) d\sigma,$$

$$F_i^{(h)} = \iint_D N_i(x,y)\left[\gamma F_h^{(s)} + (1-\gamma) F_h^{(s-1)}\right] d\sigma, \quad F_i^{(H)} = \iint_D N_i(x,y)\left[\gamma F_H^{(s)} + (1-\gamma) F_H^{(s-1)}\right] d\sigma$$

$$B_{ij}^{(h)} = \int_S N_i(x,y) N_j(x,y)\left(\gamma \beta_b^{(s)} + (1-\gamma)\beta_b^{(1-s)}\right) ds,$$

$$B_{ij}^{(H)} = \int_S N_i(x,y) N_j(x,y)\left(\gamma \beta^{(s)} + (1-\gamma)\beta_b^{(1-s)}\right) ds,$$

$$A_i^{(h)} = \int_S N_i(x,y)\left(\gamma\alpha_b^{(s)} + (1-\gamma)\alpha_b^{(1-s)}\right)ds,$$
$$A_i^{(H)} = \int_S N_i(x,y)\left(\gamma\alpha^{(s)} + (1-\gamma)\alpha^{(1-s)}\right)ds.$$

Системы (13) и (14) — хорошо обусловленные с диагональным преобладанием. Они решаются последовательно с применением итераций.

Рассмотрим теперь алгоритм решения поставленной задачи. Поскольку значения УГВ вычисляются в дискретном множестве точек, мы запишем дискретный аналог функционала (1):

$$J(f) = \sum_{i=1}^{n}\left[h(x_i, y_i, t_0; f_i) - \varphi(x_i, y_i)\right]^2 + \alpha\sum_{i=1}^{n} f_i^2, \quad (15)$$

где n — число узлов расчетной сетки.

УГВ $h(x,y,t;f)$ зависит от функции $f(x,y,t)$, вообще говоря, нелинейно. Линеаризуем ее относительно f следующим образом: $h(f) = \tilde{h} + \sum_{s=1}^{n}(f_s - \tilde{f}_s)\dfrac{\partial h}{\partial f_s} + R_2(\Delta f)$, (16)

здесь $\tilde{h} = h(\tilde{f})$, $\tilde{f}$ — известное значение функции f, найденное в предыдущей итерации.

Подставляя выражение (16) для h в формулу (15), имеем:

$$J(f) = \sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{h}_i + \sum_{s=1}^{n}(f_s - \tilde{f}_s)\frac{\partial h_i}{\partial f_s} - \varphi_i\right]^2 + \alpha\sum_{i=1}^{n} f_i^2. \quad (17)$$

Применяя необходимое условие минимума функции многих переменных $\dfrac{\partial J(f)}{\partial f_k} = 0$, $k = 1,2,\cdots,n$, из (17) приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно f_s, $s = 1,2,\cdots,n$: $\sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{h}_i + \sum_{s=1}^{n}(f_s - \tilde{f}_s)\dfrac{\partial h_i}{\partial f_s} - \varphi_i\right]\dfrac{\partial h_i}{\partial f_k} + \alpha f_k = 0$, или $\sum_{s=1}^{n} a_{ks} f_s = b_k$, $k = 1,2,\cdots,n$, (18) где

$$a_{ks} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_i}{\partial f_s}\frac{\partial h_i}{\partial f_i},\ k \neq s;\quad a_{kk} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial h_i}{\partial f_k}\right)^2 + \alpha,\quad b_k = \sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i - \tilde{h}_i + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial h_i}{\partial f_s}\tilde{f}_s\right)\frac{\partial h_i}{\partial f_k}.$$

Задача оптимального управления УГВ реализуется следующим образом. За начальное приближение возможного управления берется функция $f^{(0)}(x,y,t)=0$, решается задача (2)–(5) для всех $t\in(0,t_0]$ и находится соответствующие УГВ $h^{(1)}(x,y,t_0)$. Полученные значения УГВ используются для решения системы (18). Решая эту систему каким-либо точным или итерационным методом, получаем первое приближение управления $f^{(1)}(x,y,t_0)$. Подставляя эту функцию в уравнение (2) и повторяя весь цикл вычислений, находим следующее приближение $f^{(2)}(x,y,t_0)$, и т.д. Итерационный процесс продолжается до выполнения условий

$\left|h^{(\nu)}(x,y,t_0)-h^{(\nu-1)}(x,y,t_0)\right|<\varepsilon$, $\left|f^{(\nu)}(x,y,t_0)-f^{(\nu-1)}(x,y,t_0)\right|<\delta$, где ν – номер итерации; $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ – заданные малые числа.

Литература

1. Васильев П.В. Методы решения экстремальных задач.–М.:Наука,1981.-400с.
2. Джаныбеков Ч.Дж., Уралиев А.А. Об одном приближенном способе конструирования оптимального управления движениями подземных вод в неоднородноц пористой среде.//Вестник ИГУ, №11, 2004,-с.19-23.
3. Мурзакматов М.У., Маданбекова Э.Э. Математическая модель неустановившейся фильтрации подземных вод в многослойных пластах. // Доклады 2-ой Международной конференции “Проблемы управления и информатики”, Бишкек, 2007, Книга 2, с. 112-117.