УДК 519.21
ББК 22.171
К 90

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УРОВЕННЫМ РЕЖИМОМ ЗАМКНУТОГО ВОДОЕМА С БЕРЕГАМИ БЛИЗКИМИ К ВЕРТИКАЛЬНЫМИ

КУЛЖАБАЕВ Ж.К.
izvestiya@ktu.aknet.kg

Аннотация

Исследована задача оптимального стохастического управления уровенным режимом замкнутого водоема с берегами близкими к вертикальным. Получены расчетные формулы для оптимальной точки переключения управления и максимальной вероятности пребывания уровня водоема внутри заданного интервала отметок в соответствии с уровнем переключения управления.

This article is devoted the problem of the optimal (stokestiker) control with the level regime in reserve reservoir.

The content of the calculated formula for optimum point of switchling and the maximum probability of the in the interval mark.

Цель исследование возможности получения необходимых расчетных формул для оптимального управления уровенным режимом замкнутого водоема

Колебание уровня замкнутого водоема как озеро Иссык-Куль, описывается стохастическим дифференциальным уравнением водного баланса [7,8], поскольку вынуждающие силы (приток и видимое испарение) носят случайный характер. В линеаризованной форме это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{dz(t)}{dt} + \frac{в(v(t))}{a^2} z(t) = \frac{v(t)}{a} - e(t) \qquad (1)$$

где z(t)-отклонение уровня от равновесного значения в момент времени t,
v(t)-годовой приток,
e(t)-слой видимого испарения,
F= a+z-площадь зеркала водоема,
а и в –постоянные, определяющие морфометрию озера.

Применительно к управляемому режиму уравнение (1) имеет вид:

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\alpha z(t) + \gamma + Д_{\xi} \qquad (2)$$

где $\alpha = \frac{в(v(t) + U_{пер} - U_{из})}{a^2}$ -постоянная,

$\gamma = \dfrac{U_{пер} - U_{из}}{a}$ -управление,

$U_{из}$-годовой обьем безвозвратных изьятий, годовой обьем переброски $U_{пер}$ вод определяется неравенством $u_1 \le U_{пер} \le u_2$ (3)

u_1, u_2-минимальное и максимальное значение дополнительного обьема воды соответственно.

$Д_{\xi} = \dfrac{U(t)}{a} - e(t)$ -дельта-коррелированный белый шум с нулевым средним и с интенсивностью Д.

Время корреляции многолетних колебаний уровня замкнутых водоемов составляет десятки лет, время корреляции вынуждающих сил имеет порядок года. Поэтому, считается вполне правомерным замена вынуждающих сил дельта-коррелированным белым шумом [9].

Оптимальное управление должно обеспечивать экстремум некоторой функции, которая в стационарном режиме определяется как математическое ожидание этой функции (2). Если в качестве такой функции принять отклонение уровня от своего равновесного значения и полагать, что колебания уровня происходят в интервале: $z_н \le z(t) \le z_в$,

где $z_н, z_в$ -соответственно нижняя и верхняя допустимая граница колебаний уровня, то в соответствии с целью управления уровнем озера, критерий эффективности формулируется как средняя доля времени, в течение которого уровень озера находится в заданных пределах. В стационарном режиме это доля времени равна вероятности пребывания уровня в $[z_н, z_в]$. Задача оптимального стохастического управления с вероятностным критерием формулируется следующим образом:

определить управляющее воздействие, обеспечивающее максимум вероятности $M\left[P\{z_н \le z(t) \le z_в\}\right] \to \max\limits_{U_{пер}}$ (4)

с ограничением на управление вида (3)

M-символ математического ожидания,

P-вероятность соответствующего события.

Релейность [4] оптимальной стратегии и единственность его точки переключения применительно к таким типам задач доказаны в [10,11].

Определим вид оптимальной стратегии управления (релейность) применительно к решаемой нами задаче. Для этого вместо критерия (4) рассмотрим следующий критерий на произвольном интервале (t,T):

$$I(z,t) = M\int_t^T \chi(z(x))dx \to \max_U \qquad (5)$$

здесь начальное условие для (2) имеет вид

$z(x)\big|_{x=t} = z$

где χ -характеристическая функция желательного интервала уровня $[z_1, z_2]$.

Уравнение Беллмана для задачи управления системой (2) по критерию (5) записывается следующим образом:

$$\frac{dB}{dt}+\max_{U}\left[\frac{Д^2}{2}\cdot\frac{d^2B}{dz^2}+(\alpha(z)+\gamma)\frac{dB}{dz}+\chi(z)\right]=0 \qquad (6)$$

Где B=B(z,t)-функция Беллмана, которая представляет собой оптимальное значение интегрального критерия (5). Граничные условия для управления (6) определяется следующим образом:

$$B(z,t)=0, \qquad \frac{dB}{dz}\Big|_{z=\pm\infty}=0 \qquad (7)$$

Воспользуемся тем, что если величина $P\{z_н \le z\ (t) \le z_в\}$ определена, то осуществляется переход от интегрального критерия (5) к критерию (4); тогда

$$P=\lim_{T-t\to\infty}\frac{I(z,t)}{T-t}$$

и соответственно $\hat{P}=\lim\limits_{T-t\to\infty}\dfrac{B(z,t)}{T-t}$

независимо от начального условия z.

Если T-t→∞ то получим $B(z,t)=(T-t)P+Z_{(z)}$ (8)

где $Z_{(z)}$ -функция не зависящая от t. Подставляя (8) в (6) и (7), можно получить уравнение Беллмана относительно z:

$$\frac{Д^2}{2}\cdot\frac{d^2C}{dz^2}+\alpha(z)\frac{dZ}{dz}+\chi(z)-\hat{P}+\max_{U}\left\{U\frac{dZ}{dz}\right\}=0 \qquad (9)$$

при $\dfrac{dZ}{dz}\Big|_{z=\pm\infty}=0,\ C-const.$

Причем величинаU , доставляющая максимум последнему слагаемому в (9), есть оптимальное значение управления $\hat{U}$. Тогда, если принять во внимание (3), то получим

$$\hat{U}=\begin{cases}u_1\ если\dfrac{dZ}{dz}\prec 0\\ u_2\ если\dfrac{dZ}{dz}\succ 0\end{cases}$$

т.е. оптимальное управление принимает одно из двух граничных значений в зависимости от точки переключения

$$\hat{U}=\begin{cases}u_1\ при\ z\succ z_n\\ u_2\ при\ z\prec z_n\end{cases}$$

где –единственная точка переключения.

Для нахождения искомой оптимальной стратегии ниже используем метод опубликованный в работе [12]. В силу релейности управления из (2) следует уравнения:

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dt}=-\alpha_1 z+\gamma_1+Д_\xi\ при\ z\succ z_n\\ \dfrac{dz}{dt}=-\alpha_2 z+\gamma_2+Д_\xi\quad при\ z\prec z_n\end{cases} \qquad (10)$$

где $\alpha_1 = \dfrac{в(U(t)+u_1-u_{из})}{a^2}$, $\alpha_2 = \dfrac{в(v(t)+u_2-u_{из})}{a^2}$ -постоянные,

$\gamma_1 = \dfrac{u_{из}-u_1}{a}$, $\gamma_2 = \dfrac{u_2-u_{из}}{a}$ -управление.

Из (10) находим стационарную кусочно-нормальную плотность вероятности. Вероятность пребывания уровня в заданных переделах $[z_н, z_в]$ определяется следующей формулой:

$$P\{Z_n\} = \frac{\sigma^{//}\left[\Phi\left(\dfrac{z_n-\gamma_2}{\sigma^{//}}\right) - \Phi\left(\dfrac{z_н+\gamma_2}{\sigma^{\cdot\cdot}}\right)\right] + \theta\sigma^{\cdot}\left[\Phi\left(\dfrac{z_в+\gamma_1}{\sigma^{/}}\right)\right]}{\Phi\left(\dfrac{z_n+\gamma_2}{\sigma^{//}}\right) + \theta\sigma^{/}\left[1-\Phi\left(\dfrac{z_n+\gamma_1}{\sigma^{/}}\right)\right]}, \qquad (11)$$

где $\Phi_{(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\dfrac{x_2}{2}\right)dx$ -интеграл вероятности,

$\theta = \exp\left(-\dfrac{2C}{Д}\right)$, $\sigma^{\cdot} = \sqrt{\dfrac{Д}{2\alpha_1}}$, $\sigma^{//} = \sqrt{\dfrac{Д}{2\alpha_2}}$

$C = \dfrac{\alpha_2}{2}(z_n+\gamma_2)^2 - \dfrac{\alpha_1}{2}(z_n+\gamma_1)^2$ -постоянная, обеспечивающая непрерывность функции распределения в точке переключения. Д-интенсивность белого шума, который формируется дисперсией притока и видимого испарения. Выражение для средних затрат воды на управление определяется как и (11):

$$y(z_n) = u_1 + (u_2-u_1)\frac{\sigma^{//}\Phi\left(\dfrac{z_n+\gamma_2}{\sigma^{//}}\right)}{\sigma^{//}\Phi\left(\dfrac{z_n+\gamma_2}{\sigma^{//}}\right) + \theta\sigma^{//}[1-\Phi]\left(\dfrac{z_n+\gamma_1}{\sigma^{//}}\right)} \qquad (12)$$

Варьируя точкой переключения и вычисляя значения из (11), определим положение оптимальной точки переключения которое сообщает максимум критерию эффективности (4).

Морфометрические соотношения озера Иссык-Куль показывает, что его берега довольно крутые. В работе [1]в качестве нулевого приближения рассмотрена задача оптимального управления режимом замкнутого водоема с вертикальными стенками. Значения постоянных α_1 и α_2 в этом случае будут равны нулю т.е. рассматривается процесс случайного блуждания.

Рассмотрим первое приближение задачи оптимального управления уровенным режимом замкнутого водоема с берегами близкими к вертикальным. Для этого введем поправку на постоянную α. Воспользуемся следующей приближенной формулой интеграла вероятности

$$\Phi(x) \cong 1 - \frac{\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)}{x\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \qquad (13)$$

С помощью которой определим асимптотики членов выражения (11). Затем, подставляя полученные асимптотики в (11), после несложных преобразований имеем

$$P\{Z_n\}=\frac{\gamma E_1+\gamma_2E_2-\alpha(\gamma_1E_1p+\gamma_2E_2q)}{\gamma_2-\gamma_1-\alpha(\gamma_2g+\gamma_1\widetilde{h})},$$

$$p=\frac{z_1^{\,2}}{\text{Д}}-\frac{z_1}{\gamma_1}+\frac{\text{Д}}{2\gamma_1^{\,2}},\quad \widetilde{h}=\frac{z_n^{\,2}}{\text{Д}}-\frac{z_n}{\gamma_2}+\frac{\text{Д}}{2\gamma_2^{\,2}}, \tag{14}$$

$$E_1=\exp\left[-\frac{2\gamma_2(z_n-z_н)}{\text{Д}}\right],\quad E_2=\exp\left[-\frac{2\gamma_1(z_в-z_n)}{\text{Д}}\right]$$

Поскольку максимальная вероятность пребывания уровня внутри заданного интервала отметок $[z_н,z_в]$, с помощью оптимального управления зависит только от положения оптимальной точки переключения, то сначала определим ее положение. Для этого найдем такую $z_n^{\,*}$, для которой $\frac{dP}{dZ_n}=0$, а

также $\frac{dE_1}{dz_n}=-\frac{2\gamma_2}{\text{Д}}E_1,\quad \frac{dE_2}{dz_n}=-\frac{2\gamma_1}{\text{Д}}E_2$ (15)

Если принять $E_1 = E_2$, то получим формулу

$$z_{n,0}=\frac{z_н\cdot\gamma_2-z_в\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1},$$

Определяющую оптимальную точку переключения.

Пусть $z_n^{\,*}=z_{n,0}+\alpha z_{n,1}+\ldots$ (16)

Тогда $E_1=E_0\left(1-\alpha\frac{2z_{n,1}\cdot\gamma_2}{\text{Д}}\right),\quad E_2=E_0\left(1+\frac{2z_{n,1}\cdot\gamma_1}{\text{Д}}\right)$ (17)

где $E_0=epx\left[-\frac{2\gamma_2\cdot(z_в-z_н)}{(\gamma_2-\gamma_1)\cdot\text{Д}}\right]$

Теперь, принимая во внимание (15),(16) и (17) из (14) после преобразований определим второе приближение оптимальной точки переключения

$$z_{n,1}=\frac{(z_в-z_н)\cdot\text{Д}}{2(\gamma_2-\gamma_1)}\cdot\left(\frac{z_в+z_н}{\text{Д}}+\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right) \tag{18}$$

Следовательно ,

$$z_n^{\,*}=\frac{z_н\gamma_2-z_в\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}+\alpha\text{Д}\frac{(z_в-z_н)}{2(\gamma_2-\gamma_1)}\cdot\left(\frac{z_в+z_н}{\text{Д}}+\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right)+\ldots, \tag{19}$$

при этом значения для E_1 и E_2 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}E_1&=E_0\left[1-\alpha\frac{\gamma_2(z_в-z_н)}{\gamma_2-\gamma_1}\left(\frac{(z_в+z_н)}{\text{Д}}+\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\right]\\ E_2&=E_0\left[1+\alpha\frac{\gamma_1(z_в-z_н)}{\gamma_2-\gamma_1}\left(\frac{(z_в+z_н)}{\text{Д}}+\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\right]\end{aligned} \tag{20}$$

Теперь, используя (19) из (14) получим выражение для максимальной вероятности пребывания уровня внутри заданного интервала, отвечающего $z_n^{\,*}$,

$$P_1\{z_n\}\cong 1-E_0\left\{1-\frac{\alpha(z_в-z_н)}{(\gamma_2-\gamma_1)^2}\left[\gamma_1^{\,2}\left(\frac{z_в-z_{n,0}}{\text{Д}}-\frac{1}{\gamma_2}\right)-\gamma_2^{\,2}\left(\frac{z_в+z_{n,0}}{\text{Д}}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\right]\right\} \tag{21}$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Выводы

1.Получена расчетная формула для второго приближения оптимальной точки переключения управления

2. Определено соотношение максимальной вероятности пребывания уровня водоема в соответствии с оптимальной точкой переключения управления.

Литература

1. Кулжабаев Ж.К. Об управлении режимом уровня озера Иссык-Куль. Водные ресурсы.-1982.-№4.-с.41-47.
2. Кулжабаев Ж.К. Прогноз и управление уровнем озера Иссык-Куль в нестационарном режиме. Водные ресурсы. 1984.№6.с.154-159.
3. Кулжабаев Ж.К. К вопросу о стабильных отметках уровня озера Иссык-Куль. Гидроэнергетические ресурсы Киргизии и их использование. Фрунзе: Изд-во ФПИ, 1984.с.78-85.
4. Ла Салл Дж.П. Принципы оптимального релейного управления. Тр.I.Международного конгресса ИФАК. М. 1961.т.2.с.548-558.
5. Маматканов Д.М., Сысенко В.И., Кулжабаев Ж.К. Проблемы озера Иссык-Куль. Ф.Илим; 1990, 202с.
6. Маркиш М.С. Об оптимальном регулировании уровня Каспийского моря. Водные ресурсы, №2,1982,с.20-35.
7. Музылев С.В., Привальский В.Е., Раткович Д.Я. Стохастические модели в инженерной гидрологии. М.:Наука,1982.177с.
8. Раткович Д.Я. Методические основы управления гидрологическим режимом внутренних морей и озер. Водные ресурсы, №6, 1982, с.29-58.
9. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.Советское радио, 1977,488с.
10. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978.314с.
11. Черноусько Ф.А., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978, 351с.
12. Fuller A.T.(ed). Nonlinear stochastic control systems. London, Taylor and Francis,1979.456 p.

Отзыв

На статью Кулжабаева Ж.К. на тему «Оптимальное управление уровенным режимом замкнутого водоема берегами близкими к вертикальным».

В статье использована задача оптимального стохастического управления уровенным режимом замкнутого водоема как озеро Иссык-Куль. Решение такой задачи осуществимо при переброске дополнительных вод из других регионов. Такое мероприятие рассматривалось в 70-80 годы прошлого века, в связи с резкими снижениями уровня воды на озере и колоссальными ущербами ожидаемыми для народного хозяйства прилегающих к озеру.

Актуальность исследований по оптимизации режима уровня озера не снижается несмотря на большие капитальные затраты для переброски вод.

В статье получены расчетные формулы для выполнения практических расчетов.

Рекомендую к печати.

Доцент к.ф.-м. н. Кутманов З.К.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com