УДК: 519.62

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПРИНЦИПЕ СЕН ВЕНАНА

ЖАКЫПБЕКОВ А.Б., ДУЙШЕНАЛИЕВ Т.Б., КАДЫРОВ А.К.
КГТУ им. И.Раззакова
izvestiya@ktu.aknet.kg

С начала приведем некоторые определения, к которым будем обращаться далее.

Эквивалентные силы. Системы сил, имеющие один и тот же главный вектор и главный момент, называются эквивалентными.

Суженый принцип Сен Венана. На малой части поверхности тела имеются силы, главный вектор и главный момент которых равны нулю. Влиянием этих сил на достаточном удалении от места их приложения можно пренебречь. Этот принцип имеет теоретическое доказательство.

Общий принцип Сен Венана. Если приложенные на малую часть поверхности тела силы заменить эквивалентными им силами, то напряженное состояние частей тела, достаточно удаленных от мест приложения сил, не изменится.

Осевое сжатие, растяжение, несомненно, представляют собою процесс с изменяющимися во времени величинами нагрузки, напряжений, деформаций и перемещений. Вырежем часть образца в виде цилиндра высотой 2h и радиусом R .

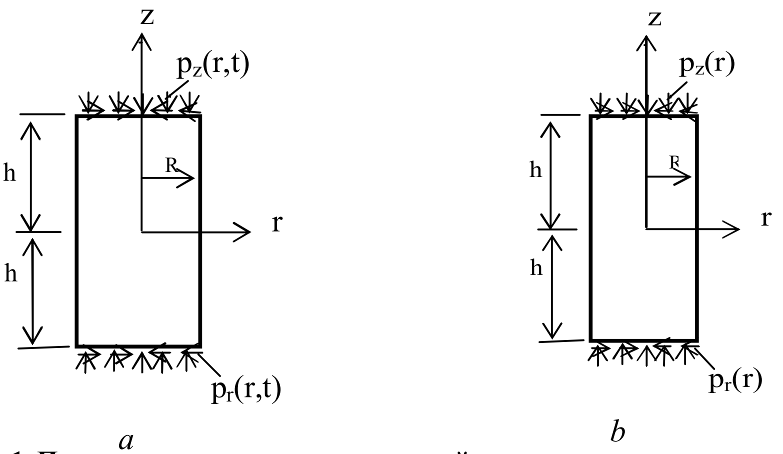

Рис.1. Представления граничных условий на основаниях цилиндра, которые соответствуют действительности (*a*) и статической краевой задаче (*b*).

На рис.1*a* внешние усилия $p_r(r,t)$, $p_z(r,t)$ зависят от времени. Это согласуется с тем, что имеет место в испытаниях. Распределение осевого напряжения в центральном поперечном сечении

$$\sigma_z(r,0,t) = \lambda\left(\frac{\partial u(r,0,t)}{\partial r} + \frac{u(r,0,t)}{r}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial w(r,0,t)}{\partial z} \quad (1)$$

в процессе нагружения претерпевает изменения в зависимости от граничных усилий $p_r(r,t)$, $p_z(r,t)$. Каков характер этих изменений?

Прежде отметим, что в центральном поперечном сечении с очень малой погрешностью величину осевой деформации можно принять постоянной и равной $\frac{\partial w(r,0,t)}{\partial z} = \varepsilon_z(R,0,t)$. Поясним это. Функция $w(r,z,t)$ из-за симметрии нагрузок при $z = 0$ не зависит от r, т.е. $w(r,0,t) = 0$ (центральное поперечное сечение остается плоским). Тут можно полагать, что и при значениях z, близких к нулю, функция $w(r,z,t)$ очень мало зависит от r, что позволяет сделать указанное выше представление. Таким образом, для центрального поперечного сечения уравнение (1) имеет вид:

$$\sigma_z(r,0,t) = \lambda\left(\frac{\partial u(r,0,t)}{\partial r} + \frac{u(r,0,t)}{r}\right) + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z(R,0,t) \quad (2)$$

Граничное условие на боковой поверхности

$$\sigma_r(R,0,t) = (\lambda+2\mu)\varepsilon_r(R,0,t)+\lambda(\varepsilon_\varphi(R,0,t)+\varepsilon_z(R,0,t)) = 0$$

напишем в виде

$$\varepsilon_r(R,0,t) = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\varepsilon_\varphi(R,0,t)+\varepsilon_z(R,0,t))$$

и по нему вычислим величины радиальной деформации. Они, оказались, не равны величинам кольцевой деформации (за исключением одной точки диаграммы).

В начальной части диаграммы имеет место неравенство $\varepsilon_r(R,0,t) \succ \varepsilon_\varphi(R,0,t)$. На этой стадии происходит преимущественное развитие радиальных деформаций. Деформирование за боковую грань не имеет такого препятствия, какое встречает деформирование в кольцевом направлении. Предположим, что это неравенство сохраняется и во внутренних точках, т.е. $\frac{\partial u(r,0,t)}{\partial r} \succ \frac{u(r,0,t)}{r}$. Умножив обе части этого неравенства на r и продифференцировав по r, приходим к неравенству $\frac{\partial^2 u(r,0,t)}{\partial r^2} \succ 0$. Это неравенство говорит о том, что в этой стадии деформирования, функция $u(r,0,t)$ - вогнутая кверху кривая (рис.2 а). Для такой кривой сумма в круглой скобке правой части уравнения (2) возрастает с ростом r, что ведет к уменьшению величины осевого напряжения. На этой стадии распределение $\sigma_z(r,0,t)$ имеет характер, указанный на рис.3а.

Далее наступает момент, когда $\varepsilon_r(R,0,t) = \varepsilon_\varphi(R,0,t)$. Если такое же равенство имеется и во внутренних точках, то $\frac{\partial u(r,0,t)}{\partial r} = \frac{u(r,0,t)}{r}$. Это имеет место, если функция $u(r,0,t)$ прямолинейна (рис.2b). Здесь сумма в круглой скобке правой части уравнения (2) постоянна, следовательно, постоянно и $\sigma_z(r,0,t)$ (рис.3 b).

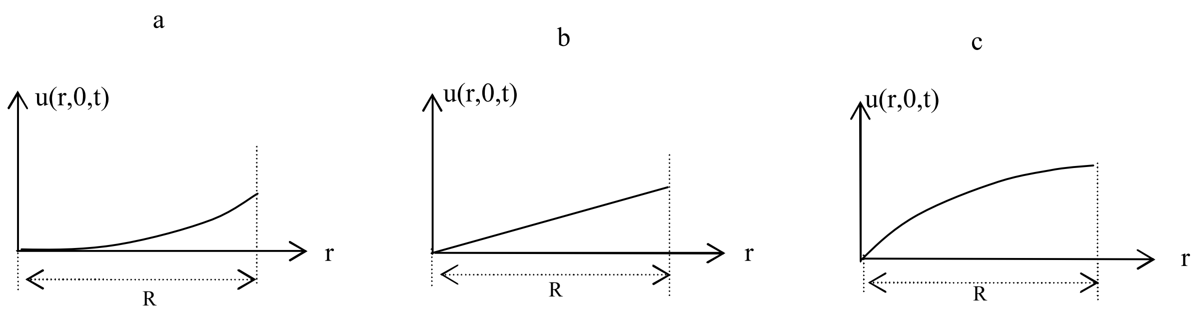

Рис.2. Изменения функции радиального перемещение в процессе нагружения

За точкой одноосности напряженного состояния, $\varepsilon_r(R,0,t) \prec \varepsilon_\varphi(R,0,t)$. На этой стадии, видимо, усиливается выдавливающее действие внутренних частей тела, которые стремятся удовлетворить свою потребность к расширению. Если такое неравенство имеет место и во внутренних точках, то $\frac{\partial u(r,0,t)}{\partial r} \prec \frac{u(r,0,t)}{r}$. Умножив обе части этого неравенства на r и, продифференцировав по r, приходим к неравенству $\frac{\partial^2 u(r,0,t)}{\partial r^2} \prec 0$. Это неравенство говорит о том, что на этой стадии деформирования функция $u(r,0,t)$ - вогнутая книзу кривая (рис.2c). Для такой кривой сумма в круглой скобке правой части уравнения (2) убывает с ростом r, что ведет к возрастанию величины осевого напряжения. Здесь распределение $\sigma_z(r,0,t)$ имеет характер, указанный на рис.3c.

В механике деформируемого тела граничные условия представляются в виде, указанном на рис.1 *b*, в котором ничто не зависят от времени. Противоречие налицо.

Однако статическая краевая задача не решаема и при таком упрощении - усилия $p_r(r)$, $p_z(r)$ неизвестны. Опираясь на суженый принцип Сен Венана, положим $p_r(r)$=0. С этим следует согласиться, ибо этот принцип имеет теоретическое доказательство.

Но что делать с неопределенностью функции $p_z(r)$? Тут на помощь приходит общий принцип Сен Венана. Согласно ему, неизвестное $p_z(r)$ можно заменить с любым задаваемым распределением, лишь бы удовлетворялось равенство

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$P = \int_0^R \int_0^{2\pi} p_z(r) r dr d\varphi, \qquad (3)$$

где P - вся осевая нагрузка.
Таких распределений бесконечное множество (некоторые из них показаны на рис.3).
Принцип допускает замену даже в виде одной сосредоточенной силы, равной всей осевой силе и приложенной в центре основания цилиндра (рис.3 g). При любых, указанных и неуказанных на рисунке 3 заданных распределениях осевых усилий, по этому принципу, в центральной части цилиндра, должно быть

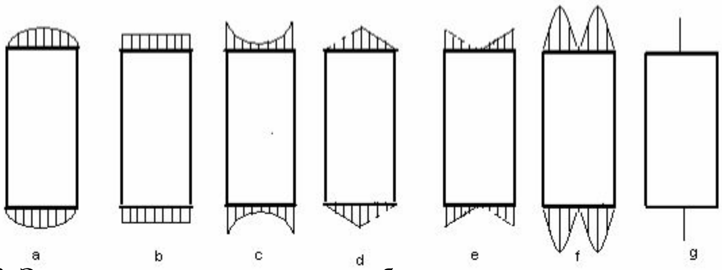

Рис.3. Эквивалентных нагрузки, любыми из которых можно заменить неизвестные распределения внешних осевых усилий на основаниях цилиндра

$$\sigma_r(r,z) = 0, \quad \sigma_{rz}(r,z) = 0, \quad \sigma_\varphi(r,z) = 0, \quad \sigma_z(r,z) = \frac{P}{\pi R^2}. \qquad (4)$$

Краевая задача (уравнения равновесия, совместности деформаций и граничные условия) доказывает это предположение только для распределения внешних усилий, указанных на рис.3 b

$$p_r(r) = 0, \quad p_z(r) = \frac{p}{\pi R^2}.$$

Для других, указанных и не указанных на рисунке 2 распределений, предположение (4) уже не является решением статической краевой задачи и при соблюдении оговорки h>>R. Возможность приятия предположения (4) даже с некоторыми приближениями не доказана. Неоднократные попытки не дали желаемого результата.

Однако предположением (4) и вытекающими из него соотношениями

$$\varepsilon_r(r,z) = -\frac{\nu}{E}\frac{P}{\pi R^2}, \quad \varepsilon_\varphi(r,z) = -\frac{\nu}{E}\frac{P}{\pi R^2}, \quad \varepsilon_z(r,z) = \frac{1}{E}\frac{P}{\pi R^2}. \qquad (5)$$

механика деформируемого тела пользуется вовсю. Обычно обобщенный закон Гука отождествляется соотношениями (5). Но это неверно. Этот закон имеет вид

$$\varepsilon_r(r,z,t) = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_z), \quad \varepsilon_\varphi(r,z,t) = \frac{1}{E}(\sigma_\phi - \nu(\sigma_z + \sigma_r), \quad \varepsilon_z(r,z,t) = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi) \qquad (6)$$

Он приобретает вид (5), в том и только в том случае, если в него подставим предположение (4), которое исходят из принципа Сен Венана. В силу этого, представление (5) должно называться соотношениями Гука-Сен Венана.

В том, что соотношения (5) не подтверждаются опытными данными, обвиняется обобщенный закон Гука. При этом вообще забывается то, что процесс этот принципиально невозможно изучать статической краевой задачей, а общий принцип Сен Венана, в силу его недоказанности, все же сомнителен. Следовательно, сомнительны и соотношения (5).

Предположение (4), вообще говоря, абсурдно. Оно противоречит тому, что происходит в испытаниях. Покажем это на примере осевого сжатия. Пусть образец имеет достаточную длину, что оговаривается при применении принципа Сен Венана. Далее рассмотрим только центральную часть образца, где по этому принципу должно быть одноосное напряженное состояние

$$\sigma_r(r,z) = 0, \quad \sigma_{rz}(r,z) = 0, \quad \sigma_\varphi(r,z) = 0, \quad \sigma_z(r,z) = \frac{P}{\pi R^2}.$$

Однако напряженное состояние не может быть таким и в этой части образца.

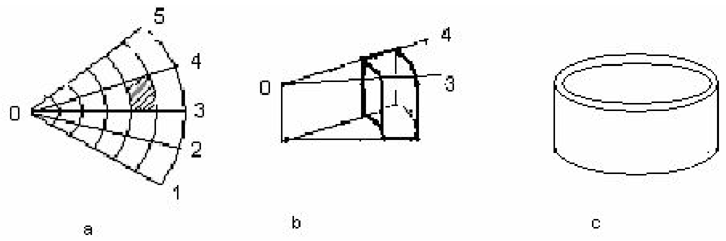

Рис.4. Часть поперечного сечения (a), элемент объема (b) и тонкостенный цилиндр (c)

На рис.4 *a* и *b* показана часть поперечного сечения и один из цилиндрических элементов. Согласно предположению (4) этот элемент не испытывает никакого влияния от соприкасающихся с ним четырех таких элементов. За его боковыми гранями как бы пустота. В таком случае центр масс этого элемента не должен двигаться в радиальном направлении, а расширение должно происходить за все боковые грани. Но мы знаем, что центр масс двигается в радиальном направлении, а расширение таково, что элемент остается между лучами 0-3 и 0-4, а радиальные боковые грани двигаются только в сторону увеличения их радиусов, что может иметь место только при наличии взаимодействия с окружающими элементами. Таким образом, напряжения

$$\sigma_r(r,z), \sigma_{rz}(r,z), \sigma_\varphi(r,z),$$

выражающие это взаимодействие, не могут быть равными нулю во все время деформирования. Малы ли их величины?

Вырежем полый цилиндр (рис.4 *c*) с внутренним r и внешним $r + dr$ радиусами. На внутренней и внешней боковых поверхностях действуют радиальные напряжения $\sigma_r(r,z)$. Каковыми должны быть величины этих напряжений, чтобы под их действием радиусы увеличились пусть даже на какие то микроны. Попробуйте сделать это, вкачивая в такой цилиндр воздух, и увидите какое тут нужно давление. О том, что оно равно нулю, или мало, не может быть речи. Таким образом, во все время деформирования напряженное состояние не может быть таким, каким оно указано в предположении (4). По нему внутренняя и внешняя боковые поверхности свободны, на них нет никаких усилий. Части цилиндра, находящиеся внутри и вне полого цилиндра не оказывают никакого влияния на его деформирования.

Дитя общего принципа Сен Венана (предположение (4)) превратило обобщенный закон Гука (6) в одномерные соотношения (5), которые “наградили ” его почти нулевой состоятельностью. С точки зрения соотношений (5) тело подчиняется обобщенному закону Гука, если ее опытная диаграмма от начала до конца прямолинейна. Но диаграмма не такова. Она криволинейна, имеет довольно сложное очертание. Следовательно, этот закон, в общем, не состоятелен. Возможно, частичное его применение в начальной части диаграммы, если эта часть прямолинейна или близка к таковой. Тут следует отметить, что прямолинейность начальной части является спорным положением. Диаграмма и здесь имеет кривизну. Как отмечал академик Ю.Н. Работнов, это можно обнаружить уже при малых деформациях тем раньше, чем совершеннее измерительная аппаратура. Это привело его к выводу, что и в области малых деформаций имеется систематическое отклонение от закона [1].

Не будь соотношений (5), никому в голову не приходило бы наносить опытные данные на плоскость нагрузки и осевой деформации, т.е. строить диаграмму нагрузка-деформация. Такое нанесение преследовало, надо полагать, одну единственную цель – проверить жизненность соотношений (5). Соотношения оказались не состоятельными, опытные точки располагаются не так, как того они предусматривают. На этом, казалось бы, цель исчерпана. Но нет, диаграмма нагрузка-деформация обрела самостоятельную жизнь. Она стала рассматриваться как опытно определяемый физический закон. На основании предположения (4). Реальное же деформирование, как показано выше, нисколько не может быть объяснено выражениями (4), по которому части тела вовсе не взаимодействуют друг с другом.

Литература

1. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов.: - М., Физматгиз, 1962, стр.128.