УДК 517.2+517.9

Шарипов С., Шарипов К.С., Шарипов К.С.
ЫГУ им. К.Тыныстанова

ТРЕХТОЧЕЧНАЯ УСОВЕРШЕНСТВОВАННАЯ ЗАДАЧА КОШИ И ЕЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Впервые исследована задача о собственных значенияхтрех точечной задачи управления для уравнения первого порядка.

Рассмотрим задачу управления вида.

$$y'=\lambda y,\ t\in[t_0,T] \quad \textbf{(1)}$$

условия управления

$$y(t_0)=y_0,\ y(a)=y_1,\ y(T)=y_2\ (a\in(t_0,T)) \quad \textbf{(2)}$$

Конечно, условие (2) выходит за рамки традиционных краевых условий. Такое условие названо нами условием управления, а задача **(1)-(2)** названо задачей управления.

Прежде чем исследовать разрешимость задачи **(1)-(2),** сначала рассмотрим задачу управления вида [1-2]

$$y'=(\lambda+\beta f(t))y,\ t\in[t_0,T]\ (\lambda,\beta\in(-\infty,\infty)) \quad \textbf{(3)}$$

условия управления

$$y(t_0)=y_0,\ y(a)=y_1,\ y(T)=y_2 \quad \textbf{(4)}$$

Здесь f(t) – непрерывная (непостоянная) функция, а β – параметр.

Отметим, что параметры λ и β независимы друг от друга. Это означает, что на моделируемый процесс оказывают влияние две независимые между собой величины.

Приступим к решению данной задачи. Для чего составим ее усовершенствованную задачу Коши в виде

$$y'=(\lambda+\beta f(t))y,\ t\in [t_0,T] \quad \textbf{(5)}$$

1) Начальное условие

$$y(t_0)=y_0 \quad \textbf{(6)}$$

2) Плюс заданные условия

$$y(a)=y_1,\ y(T)=y_2 \quad \textbf{(7)}$$

Задача Коши **(5)-(6)** имеет решение вида

$$y=y_0e^{\lambda(t-t_0)+\beta\int_{t_0}^{t}f(s)ds} \quad \textbf{(8)}$$

Отсюда, согласно **(7)**, имеем систему характеристических уравнений вида

$$\begin{cases} y_0e^{\lambda(a-t_0)+\beta\int_{t_0}^{a}f(s)ds}=y_1 \\ y_0e^{\lambda(T-t_0)+\beta\int_{t_0}^{T}f(s)ds}=y_2 \end{cases} \quad \textbf{(9)}$$

$$\begin{cases} \lambda(a-t_0)+\beta\int\limits_{t_0}^{a}f(s)ds=ln\dfrac{y_1}{y_0}+2\pi ki \qquad (y_1\neq0, y_0\neq0) \\ \lambda(T-t_0)+\beta\int\limits_{t_0}^{T}f(s)ds=ln\dfrac{y_2}{y_0}+2\pi ki \qquad (y_2\neq0, y_0\neq0) \end{cases}$$

Отсюда

$$\lambda=\bar{\lambda}=\frac{\left(ln\frac{y_1}{y_0}+2\pi ki\right)\int_{t_0}^{T}f(s)ds-\left(ln\frac{y_2}{y_0}+2\pi ki\right)\int_{t_0}^{a}f(s)ds}{(a-t_0)\int_{t_0}^{T}f(s)ds-(T-t_0)\int_{t_0}^{a}f(s)ds} \quad \textbf{(10)}$$

$$\beta=\bar{\beta}=\frac{(T-t_0)\left(ln\frac{y_1}{y_0}+2\pi ki\right)-(a-t_0)\left(ln\frac{y_2}{y_0}+2\pi ki\right)}{(T-t_0)\int_{t_0}^{a}f(s)ds-(a-t_0)\int_{t_0}^{T}f(s)ds} \quad \textbf{(11)}$$

Они являются функциями трех переменных y_0, y_1 и y_2. Их области значения дают нам спектры параметров $\bar{\lambda}$ и $\bar{\beta}$ соответственно. Найденные значения **(10)** и **(11)** будут собственными значениями усовершенствованной задачи Коши **(5)-(7).** Следовательно, они также таковыми являются и для задачи управления **(3)-(4)**.

Итак, собственные функции усовершенствованной задачи Коши **(5)-(7)** имеют вид

$$y = y_0 e^{\bar{\lambda}(t-t_0)+\bar{\beta}\int_{t_0}^{t} f(s)ds} \quad t\in [t_0, T], \qquad \textbf{(12)}$$

где $\bar{\lambda}$ и $\bar{\beta}$ определяются формулами **(10)** и **(11).**

Периодические собственные функции

Из **(10)** и **(11)** при выполнении с момента $t=t_0$ условия периодичности вида

$$y_0=y_1=y_2 \qquad \textbf{(*)}$$

получаем периодические собственные функции усовершенствованной задачи Коши **(5)-(7)** в виде

$$y = y_0 e^{\bar{\bar{\lambda}}(t-t_0)+\bar{\bar{\beta}}\int_{t_0}^{t} f(s)ds} = y_0 \quad t\in[t_0,T],$$

где

$$\bar{\bar{\lambda}} = \frac{\int_a^T f(s)ds}{(a-t_0)\int_{t_0}^T f(s)ds-(T-t_0)\int_{t_0}^a f(s)ds} 2\pi k i = 0, k = 0$$

$$\bar{\bar{\beta}} = \frac{T-a}{(T-t_0)\int_{t_0}^a f(s)ds-(a-t_0)\int_{t_0}^T f(s)ds} 2\pi k i = 0, k = 0$$

Периодическая собственная функция как постоянная функция есть решение усовершенствованной задачи Коши **(5)-(7)**. Оно не представляет интереса.

Апериодические собственные функции

Теперь нами предложен способ для получения периодического движения из **(12)** не с момента $t=t_0$, а с момента $t=a$ на интервале (t_0,T).

В этом случае предлагаем условие периодичности в виде

$$y(t_0)=y_0,\ y(a)=y_1=y(T)=y_2 \qquad \textbf{(**)}$$

В дальнейшем такое условие **(**)** будем называть апериодическим условием, а движение, соответствующее ему, будем называть апериодическим движением.

Согласно апериодическому условию **(**),** из **(10)** и **(11)** получаем собственное значение в виде.

$$\lambda = \bar{\lambda} = \frac{\int_a^T P(s)ds}{(a-t_0)\int_a^T f(s)ds-(T-a)\int_{t_0}^a f(s)ds}\left(ln\frac{y_1}{y_0}+2\pi k i\right), k = 0, \pm 1, \ldots$$

$$\beta = \bar{\beta} = \frac{T-a}{(T-a)\int_{t_0}^a f(s)ds-(a-t_0)\int_a^T f(s)ds}\left(ln\frac{y_1}{y_0}+2\pi k i\right), k = 0, \pm 1, \ldots$$

Они могут быть действительными и комплексными.

В этом случае апериодические собственные функции, соответствующие им, из **(12)** имеют вид

$$y = y_0 e^{\frac{ln\frac{y_1}{y_0}+2\pi k i}{(a-t_0)\int_a^T f(s)ds-(T-a)\int_{t_0}^a f(s)ds}\left(\int_a^T P(s)ds(t-t_0)-(T-a)\int_{t_0}^t P(s)ds\right)}$$

Они также могут быть действительными и комплексными.

Полученные нами результаты **(10), (11)** и **(12)** обогащают задачу о собственных значениях.

Этот результат является примером для задачи управления более общего вида [2]

$$y'=f(t,y,\beta_1,\beta_2),\ t\in[t_0,T] \qquad \textbf{(13)}$$

условия управления

$$y(t_0)=y_0,\ y(a)=y_1,\ y(T)=y_2\ (a\in(t_0,T)) \qquad \textbf{(14)}$$

Составим ее усовершенствованную задачу Коши в виде

$$y'=f(t,y,\beta_1,\beta_2),\ t\in[t_0,T] \qquad \textbf{(15)}$$

1) начальное условие

$$y(t_0)=y_0 \qquad \textbf{(16)}$$

2) плюс заданные условия

$$y(a)=y_1,\ y(T)=y_2 \qquad \textbf{(17)}$$

В области

$$D=\{|t-t_0|\le c,\ |y-y_0|\le b,\ \beta_1\in[d_1,d_2],\ \beta_2\in[d_3,d_4]\} \qquad \textbf{(18)}$$

при непрерывных попеременным t,y,β_1,β_2 функциях

$$f(t,y,\beta_1,\beta_2),\ f_y(t,y,\beta_1,\beta_2) \qquad \textbf{(19)}$$

Задача Коши **(15)-(16)** имеет решение, непрерывное по переменным t,y,β_1,β_2.

Итак, на отрезке $[t_0,T]$ задача Коши имеет решение, непрерывное по переменным t,y_0,β_1,β_2 вида

$$y=\varphi(t,y_0,\beta_1,\beta_2),\ t\in[t_0,T] \qquad \textbf{(20)}$$

Отсюда, согласно **(17),** получаем систему характеристических уравнений вида

$$\begin{cases}\varphi(a,y_0,\beta_1,\beta_2)=y_1\\ \varphi(T,y_0,\beta_1,\beta_2)=y_2\end{cases} \qquad \textbf{(21)}$$

Пусть она имеет действительные и комплексные корни.

$\beta_1=\lambda_1(y_0,y_1,y_2)$

$$\beta_2=\gamma_1(y_0,y_1,y_2) \qquad \textbf{(22)}$$

и т.д.

Они-то и есть собственные значения усовершенствованной задачи Коши **(15)-(17).** И на них имеем собственные функции усовершенствованной задачи Коши **(15)-(17)** или задачи управления **(13)-(14)**

Теперь приведем пример задачи управления с нетрадиционными дополнительными условиями

$$y'=(\lambda+\beta f(t))y,\ t\in[t_0,T] \qquad \textbf{(23)}$$

условия управления

$$y(t_0)=y_0,\ y'(t_0)=y_0',\ y(T)=y_1 \qquad \textbf{(24)}$$

Ее усовершенствованная задача Коши имеет вид

$$y'=(\lambda+\beta f(t))y,\ t\in[t_0,T] \qquad \textbf{(25)}$$

1) начальное условие $y(t_0)=y_0$

2) плюс заданные условия

$$y'_0,\ y(T)=y_1,\ y'(t_0)=y'_0 \qquad \textbf{(26)}$$

Из **(8)** имеем, что

$$y'=(\lambda+\beta f(t))e^{\lambda(t-t_0)+\beta\int_{t_0}^{t}f(s)ds},\ t\in[t_0,T] \qquad \textbf{(27)}$$

Из **(8)** и **(27),** согласно **(26),** имеем систему характеристического уравнения вида

$$\begin{cases}y_0\big(\lambda+\beta f(t_0)\big)=y'_0\\ y_0e^{\lambda(T-t_0)+\beta\int_{t_0}^{T}f(s)ds}=y_1\end{cases} \qquad \textbf{(28)}$$

Отсюда

$$\lambda+\beta f(t_0)=\frac{y'_0}{y_0}$$

$$\lambda(T-t_0)+\beta\int_{t_0}^{T}f(s)ds=ln\frac{y_1}{y_0}+2\pi ik$$

Отсюда

$$\beta = \bar{\beta} = \frac{-\ln\frac{y_1}{y_0} + 2\pi ki + \frac{y'_0}{y_0}(T-t_0)}{\int_{t_0}^{T} f(s)ds - f(t_0)(T-t_0)} \quad (y_1 \neq 0,\ y_0 \neq 0)\ (k=0,\pm1,\ldots) \qquad \textbf{(29)}$$

и

$$\lambda = \bar{\lambda} = \frac{-f(t_0)\ln\frac{y_1}{y_0} + 2\pi ki + \frac{y_0'}{y_0}\int_{t_0}^{t} f(s)ds}{\int_{t_0}^{T} f(s)ds - f(t_0)(T-t_0)} \quad (y_1 \neq 0, y_0 \neq 0)\ (k=0,\pm1,\ldots) \qquad \textbf{(30)}$$

Найдены собственные значения усовершенствованной задачи Коши **(23)-(25).** И по значениям этих функций двух переменных y_0 и y_1 находим спектры собственных значений.

В этом случае собственные функции определяются формулой

$$y = y_0 e^{\bar{\lambda}(t-t_0) + \bar{\beta}\int_{t_0}^{t} f(s)ds},\ t \in [t_0, T] \qquad \textbf{(31)}$$

Апериодические собственные функции

Апериодические собственные функции усовершенствованной задачи Коши и **(23)-(25)** получаем из **(31)** при выполнении условия

$$y_0 = y_1 \qquad \textbf{(32)}$$

в виде

$$y = y_0 e^{\bar{\bar{\lambda}}(t-t_0) + \bar{\bar{\beta}}\int_{t_0}^{t} f(s)ds},\ t \in [t_0, T] \qquad \textbf{(33)}$$

где

$$\bar{\bar{\beta}} = \frac{y_0(T-t_0)}{y_0[f(t_0) - (T-t_0) - \int_{t_0}^{T} f(s)ds]} \qquad \textbf{(34)}$$

$$\bar{\bar{\lambda}} = -\frac{y_0'}{y_0[f(t_0)(T-t_0) - \int_{t_0}^{T} f(s)ds}\int_{t_0}^{T} f(s)ds \qquad \textbf{(35)}$$

Итак, мы можем говорить о том, что задача о собственных значениях порождается дифференциальным уравнением, содержащим числовые величины (с буквенными обозначениями, рассматриваемыми как параметры). Рассматриваются следующие вопросы:

Найти значение параметра, принуждающее решения дифференциального уравнения так, чтобы оно удовлетворяло некоторым заданным дополнительным условиям. Их будем называть собственными значениями дифференциального уровня.

Найти спектр собственных значений и соответствующие им решения. Их будем называть собственными функциями дифференциальной задачи.

Исследовать свойство собственных функций.

Построение периодических собственных функций.

Построение апериодических собственных функций.

Здесь ограничимся приведением только и только этих задач. Остальные задачи будем приводить в следующих статьях.

Литература

1. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциального и интегрального уравнений// Вестник Ысык-Кульского университета. - Каракол, 2004. № 12, с. 159-163.

2. Шарипов К.С., Шарипов С. Зависимость решения от параметров и методы решения краевых задач// Вестник Исык-Кульского университета. -Каракол, 2008, № 21, с. 42-45.