УДК 517.948

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕ

Сулайманов Бактыбек Эржигитович, ф.-м.и.к, доцент, Ж. Баласагын атындагы Кыргыз Улуттук университети

Мырзапаязова Зууракан Кузобаевна, улук окутуучу, И. Раззаков атындагы КМТУ, Кыргызстан, 720044, Бишкек шаары, Ч.Айтматов пр., 66

Токтогулова Айчурок Шеркуловна, ПМИ кафедрасынын улуу окутуучусу, И. Раззаков атындагы КМТУ, Кыргызстан, 720044, Бишкек шаары, Ч.Айтматов пр., 66

Аннотация: Бул жумушта биринчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерге коюлган тескери маселе каралган. Чечимдин жашоо шарты тургузулган. Кошумча аргументтер ыкмасын колдонуп, коюлган тескери маселени Вольтерр тибиндеги сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер системасына алып келебиз. Биринчи леммада $w(s,t,x)$, $\lambda(t)$, $u(t,x)$, $w(s,t,x_0)$, $w_t(s,t,x)$, $w_t(s,t,x_o)$ функцияларына карата тургузулган Волтерр тибиндеги сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер системасынын чыгарылышынын жалгыздыгы жана чектелгендиги далилденген. Экинчи леммада кошумча аргументтүү жаңы белгисиз $w(s,t,x)$, $\lambda(t)$, $u(t,x)$, $w(s,t,x_0)$, $w_t(s,t,x)$, $w_t(s,t,x_o)$ функцияларына карата тургузулган Волтерр тибиндеги сызыктуу эмес интегралдык тендемелер системасы, биринчи тартиптеги жекече туурдулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн коюлган тескери маселеге эквиваленттүү экендиги далилденген. Учүнчү леммада кошумча аргументтүү теңдемелер ситемасынын чыгарылышы берилген теңдеменин чыгарылшы болоору далилденген. Жогоруда көрсөтүлгөн үч лемманын негизинде биринчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемеге коюлган тескери маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теорема далилденген.

Урунттуу сөздөр: Интегро-дифференциалдык, жекече туунду, система, интегралдык теңдеме, тескери маселе, Вольтер тибиндеги, сызыктуу эмес, кошумча аргумент, белгисиз функциялар.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сулайманов Бактыбек Эржигитович, к.ф.-м.н., доцент, Кыргызский Национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика

Мырзапаязова Зууракан Кузобаевна, ст. преподователь, Кыргызский государственный технический университет им. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, проспект Ч. Айтматова 66

Токтогулова Айчурок Шеркуловна, ст. преподователь, Кыргызский государственный технический университет им. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, проспект Ч. Айтматова 66

Аннотация: В данной работе рассматривается обратная задача для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Установлено условие разрешимости обратной задачи. Применяя метода дополнительного аргумент, данный обратный задача приводится к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра. В лемме 1 доказана единственность и ограниченность решение системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра относительно неизвестных функций $w(s, t, x)$, $\lambda(t)$, $u(t,x)$, $w(s,t,x_0)$, $w_t(s,t,x)$, $w_t(s,t,x_o)$. В лемме 2 доказано, что система нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра относительно неизвестных функций с дополнительным аргументом $w(s,t,x)$, $\lambda(t)$, $u(t,x)$, $w(s,t,x_0)$, $w_t(s,t,x)$, $w_t(s,t,x_o)$, будет эквивалентно к данной обратной задаче для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В лемме три доказано что решение систем интегро-дифференциальных уравнений с дополнительным аргументом, удовлетворяет данный уравнения. С помощи выше указанных трех леммы доказана теорема существования и единственности обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Ключевые слово: Интегро-дифференциальных, частных производных, система, интегральный уравнений, обратных задач, типа Вольтерра, нелинейных, дополнительных аргументов, неизвестные функции.

REVERSE TASK FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Sulaimanov Baktybek Erzhigitovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Kyrgyz National University. J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic

Myrzapayazova Zuurakan Kuzobaevna, Art. Lecturer, Kyrgyz State Technical University. Razzakov, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, Aitmatov Avenue 66

Toktogulova Aichurok Sherkulovna, Art. Lecturer, Kyrgyz State Technical University. Razzakov, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, Aitmatov Avenue 66

Abstract: This paper examines the reverse task for differential equations in private first-order derivatives. The condition of the indecision of the reverse task has been established. Using the additional argument method, this reverse task is led to a system of non-linear integral equations of the Volterra type. Lemme 1 proves the singularity and limitations of the solution of the system of non-linear integrated equations of the Volterra type of w(s,t,x), λ(t), u(t,x), $w(s,t,x_0)$, $w_t(s,t,x)$, $w_t(s,t,x_o)$. In lemme 2, it is proven that a system of non-linear integral equations like Volterra relative to unknown functions with an additional w argument w(s, t, x), λ(t), u(t,x), $w(s,t,x_0)$, $w_t(s,t,x)$, $w_t(s,t,x_o)$, will be equivalent to this reverse task for differential equations in private first-order derivatives. In lemme three it is proven that the solution of systems of integrative differential equations with an additional argument satisfies this equation. With the help of the above three lemma proven the theorem of existence and the singularity of reverse tasks for differential equations in private derivatives of the first order.

Key words: Intero-differential, private derivatives, system, integral equations, reverse tasks, such as Volterra, nonlinear, additional arguments, unknown functions.

Биринчи жумушта [1] кошумча аргументтер ыкмасы менен Уизем тибиндеги жекече туундулуу сызыктуу эмес интеграл-дифференциалдык теңдемелердин системасына коюлган (түз маселе) Коши маселеси изилденген, ал эми [2-4] жумуштарда ошол эле ыкма менен интеграл-дифференциалдык теңдемелерге коюлган тескери маселе изилденген. Ал эми [3], [7] эмгектерде кошумча аргументтер ыкмасы менен Уизем тибиндеги дифференциалдык теңдемеге коюлган тескери маселени изилдеген. [5] эмгекте болсо Уизем тибиндеги дифференциалдык теңдемелер системасына коюлган тескери маселе кошумча аргументтер ыкмасы менен изилденген. Ал эми [6], [8] эмгектерде кошумча аргументтер ыкмасы менен сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемлерге коюлган тескери маселелер изилденген.

Берилген жумушта жекече туундулуу дифференциалдык теңдемеге коюлган тескери маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы теоремасы далилденген. Коюлган тескери маселенин, кошумча аргументтүү сызыктуу эмес интегралдык тендемелер системасына эквиваленттүүлүгү көрсөтүлгөн.

Тескери маселени карайбыз:

$$u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = \lambda(t)f(t,x,u(t,x)) \quad (1)$$

$$u(0,x) = \phi(x), x \in R, \quad (2)$$

$$u(t,x_0) = g(t), t \in [0,T], \quad (3)$$

мында $f(t,x,u(t,x))$ $\varphi(x)$, $g(t)$ берилген, ал эми $u(t,x), \lambda(t) -$ белгисиз функциялар.

Келишим шарты орун алат $g(0) = \varphi(x_0)$. (4)

Төмөнкүдөй белгилөө кийрели:

$\bar{C}^{\gamma 1,\gamma 2,\ldots \gamma n}(\vartheta) - \vartheta$ облустунда i аргументи боюнча γ_i тартипке чейинки үзгүлтүксүз, чектелген туундуга ээ болуучу функциялар мейкиндиги,

$$D = \{(s,t); 0 \le s \le t \le T_0\}, D_1 = \{(v,t); 0 \le v \le t \le T_0\},$$

$$D_2 = \{(v,s,t); 0 \le v \le s \le t \le T_0\}, G = \{(t,x); 0 \le t \le T_0, x \in R\},$$

$$G_1 = \{(s,t,x); 0 \le s \le t \le T_0, x \in R\},$$

$$G_2 = \{(v,s,t,x); 0 \le v \le s \le t \le T_0, x \in R\},$$

Төмөнкү шарттар аткарылсын дейли:

1) $\phi(x) \in \bar{C}^1(R), g(t) \in C[0,T], f(t,x,u) \in \bar{C}^{0,2,2}(Q),$

Төмөнкү барабардыктар орун алуучу L, M, F, K, T_0 туруктуу сандар жашайт

$$max\{sup_R|\phi(x)|, sup_R\langle|\phi'(x), ||sup_R|\phi''(x)|\} = L,$$

$$max\{\sup_{t\in[0,T_0]}|g(t)|, \sup_{t\in[0,T_0]}|g'(t)|\} = M,$$

$$max\{sup_Q, sup_Q|f_x|, sup_Q|f_u|, sup_Q|f_{xu}|, sup_Q|f_{xx}|, sup_Q|f_{uu}|\} = F.$$

2) $f(t,x_0,g(t)) \ge \alpha \succ 0,$

бардык $t \in [0,T_0], \alpha = \min\{\alpha_1,\alpha_2\}$, мында $0 \le \xi + v \le t \le T$.

(1) де t ны ρ, го жана x ти $p(\rho,t,x)$ алмаштыралы, мында

$$p(\rho,t,x) = x - \int_\rho^t u(v,p(v,t,x))dv, \quad p(t,t,x) = x,$$

$$P_\rho(\rho,t,x) = u(\rho,p(\rho,t,x)) \quad (5)$$

Андан ары, ρ боюнча 0 дон s ке чейин интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$u(s,p(s,t,x)) = \varphi(x - \int_0^t u(\tau,p(\tau,t,x))d\tau) + \int_0^s \lambda(\rho)f(\rho,x - \\ - \int_\rho^t u(\tau,p(\tau,t,x))d\tau, \quad u(\rho, p(\rho,t,x,)))d\rho. \quad (6)$$

$$0 \le \rho \le s \le t \le T,$$

(6) теңдемеге, $u(s,p(s,t,x)) \equiv \omega(s,t,x)$ коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$\omega(s,t,x) = \varphi(x - \int_0^t \omega(\tau,t,x)d\tau) + \int_0^s \lambda(\rho)f(\rho,x - \int_\rho^t \omega(\tau,t,x)d\tau, \omega(\rho,t,x))d\rho. \quad (7)$$

(7) ге $s = t$, $x = x_0$ коюп, t боюнча туундусун алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$g'(t)=-\varphi'(x_0-\int_0^t\omega(\tau,t,x_0)dv)\left[g(t)+\int_0^t\omega_t(\tau,t,x_0)dv\right]+\lambda(t)f(t,x_0g(t))-$$
$$-\int_0^t\lambda(\rho)f_x(\rho,x_0-\int_\rho^t\omega(\tau,t,x_0)d\tau,\omega(\rho,t,x_0))\left[g(t)+\int_\rho^t\omega_t(\tau,t,x_0)d\tau\right]d\rho+ \tag{8}$$
$$+\int_0^t\lambda(\rho)f_u(\rho,x_0-\int_\rho^t\omega(\tau,t,x_0)d\tau,\omega(\rho,t,x_0))\omega_t(\rho,t,x_0)d\rho.$$

(8) теңдемесин $\lambda(t)$ га карата чечип, төмөнкүнү алабыз:

$$\lambda(t)=\frac{1}{f(t,x_0,g(t))}\left[\varphi'(x_0-\int_0^t\omega(\tau,t,x_0)d\tau)\times\right.$$
$$\times\left[g(t)+\int_0^t\omega_t(\tau,t,x_0)d\tau\right]+g'(t)+\int_0^t\lambda(\rho)f_x(\rho,x_0-\int_\rho^t\omega(v,\tau,t,x_0)d\tau,$$
$$w(\rho,t,x_0))\left[g(t)+\int_\rho^t\omega_t(\tau,t,x_0)d\tau\right]d\rho- \tag{9}$$
$$-\int_0^t\lambda(\rho)f_u(\rho,x_0-\int_\rho^t\omega(\tau,t,x_0)d\tau,\omega(\rho,t,x_0))w(\rho,t,x_0)d\rho.$$

(6) га $s=t$ коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$u(t,x)=\varphi\left(x-\int_0^t\omega(\tau,t,x)d\tau\right)+\int_0^t\lambda(\rho)f(\rho,x-\int_\rho^t\omega(\tau,t,x)d\tau,\omega(\tau,t,x))d\rho. \tag{10}$$

(7) ге $x=x_0$ коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$\omega(s,t,x_0)=\varphi(x_0-\int_0^t\omega(s,t,x_0)d\tau)+\int_0^s\lambda(\rho)f(\rho,x_0-\int_\rho^t\omega(s,t,x_0)d\tau,\omega(s,t,x_0))d\rho, \tag{11}$$

(7), (11) лерден t боюнча туундуларын алып, төмөнкүнү алабыз:

$$\omega_t(s,t,x)=-\varphi'(x-\int_0^t\omega(\tau,t,x)d\tau)\left[g(t)+\int_0^t\omega_t(\tau,t,x)d\tau\right]-$$
$$-\int_0^s\lambda(\rho)f_x(\rho,x-\int_\rho^t\omega(\tau,t,x)d\tau,\omega(\tau,t,x))\left[g(t)+\int_\rho^t\omega_t(\tau,t,x)d\tau\right]d\rho+ \tag{12}$$
$$+\int_0^s\lambda(\rho)f_u(\rho,x-\int_\rho^t\omega(\tau,t,x)d\tau,\omega(\tau,t,x))w_t(\tau,t,x)d\rho.$$

$$\omega_t(s,t,x_0)=-\varphi'(x_0-\int_0^t\omega(\tau,t,x_0)d\tau)\left[g(t)+\int_0^t\omega_t(\tau,t,x_0)d\tau\right]-$$
$$-\int_0^s\lambda(\rho)f_x(\rho,x_0-\int_\rho^t\omega(\tau,t,x_0)d\tau,\omega(\tau,t,x_0))\left[g(t)+\int_\rho^t\omega_t(\tau,t,x_0)d\tau\right]d\rho+ \tag{13}$$
$$+\int_0^s\lambda(\rho)f_u(\rho,x_0-\int_\rho^t\omega(\tau,t,x_0)d\tau,\omega(\tau,t,x_0))w_t(\tau,t,x_0)d\rho.$$

Сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер системмасы (7), (9), (10), (11), (12), (13): $\omega(s,t,x), \lambda(t), u(t,x), \omega(s,t,x_0), \omega_t(s,t,x), \omega_t(s,t,x_0)$. функцияларына карата туюк сисистеманы түзөт.

Коюлган (1)-(3) тескери маселе төмөнкү системага эквиваленттүү:

$$V(v,s,t,x) = BV(v,s,t,x), \tag{14}$$

мында

$$V(s,t,x) = \begin{bmatrix} w(s,t,x) \\ \lambda(t) \\ u(t,x) \\ w(s.t.x_0) \\ w_t(s,t,x) \\ w_t(s,t,x_0) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{bmatrix}, \quad BV(s,t,x) = \begin{bmatrix} B_1V(s,t,x) \\ B_2V(s,t,x) \\ B_3V(s,t,x) \\ B_4V(s,t,x) \\ B_5V(s,t,x) \\ B_6V(s,t,x) \end{bmatrix}$$

Мейкиндик кийребиз:

$$Z = \overline{C}(G\ \ ) * C[0,T] * \overline{C}(G) * C(D) * C(D_1) * C(D).$$

Каалагандай элемент $V(v,s,t,x) \in Z$ үчүн, норма кийиребиз:

$$\|V(v,s,t,x)\|_Z = Sup_G\ |\omega(s,t,x)| + \underset{t\in[0,T]}{Sup}|\lambda(t)| + Sup_G|u(t,x)| +$$
$$+Sup_D|\omega(0,s,t,x)| + Sup_{D_1}|\omega_t(v,s,t,x)| + Sup_D|\omega(0,s,t,x)|.$$

Теорема 1 Эгерде 1), 2) шарттары орун алса, анда (1) – (2) маселенин чечими $u(t,x), \lambda(t)$, $\overline{C}^{1,1}([0,T]\times R)\times C[0,T]$ функциялар классында жашап жана жалгыз боло турган T>0 оң саны табылат.

Теореманын далилдөөсүн төмөнкү леммалардын жардамы менен көрсөтөбүз.

Лемма 1. Эгерде 1), 2) шарттары орун алса, анда (7), (9), (10), (11) , (12), (13) системасы $V(v,s,t,x) \in U_{2R}$ көптүгүндө жалгыз жана чектелген чыгарылышка ээ боло турган T>0 оң саны табылат. Мында $U_{2R} = \{V(v,s,t,x) \in Z,\ \|V(v,s,t,x)\|_Z \le 2R\}$ радиу 2R болгон шар.

Лемма 2. Эгерде $V(v,s,t,x)$ вектор-функциясы (7), (9), (10), (11) , (12), (13): системасынын чыгарылышы болсо, анда $u(t,x), \lambda(t)$ функциялары (1)-(3) маселени канааттандырат, жана тескерисинче.

Лемма 3. Эгерде $u(t,x) \in C^{1,1}(G_T)$ $q(s,t,x) \in C^{1,1,1}(Q_T)$ функциялары сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер системасын канааттандырса

$$u(t,x) = \varphi(x - \textstyle\int_0^t u(\tau,q(\tau,t,x))d\tau) + \tag{15}$$
$$+\int_0^t \lambda(\rho) f\left(\rho, x - \int_\rho^t u(\tau,q(\tau,t,x))\right) d\tau,\ u(\rho,q(\rho,t,x)))d\rho.$$
$$q(s,t,x) = x - \int_s^t u\big(\tau,q(\tau,t,x)\big)\,d\tau,$$
$$q(t,t,x) = x,\ q_s(s,t,x) = u\big(s,q(s,t,x)\big). \tag{16}$$

анда *u(t,x)* функциясы (1) -(3) маселесинин чыгарылышы болот жана тескерисинче.

Колдонулган адабияттардын тизмеги

1. Асанов А., Сулайманов Б.Э. The inverse problem for differential equation of the whitham.// Обратные и некорректные задачи прикладной математики: Тр. 13 - Байкальской

междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 2005года. Том 3: ИСЭМ СО РАН –2005, -С. 207-211.

2. Асанов А., Сулайманов Б.Э., Токтогулова А.Ш. Об одной обратной задаче для систем дифференциальных уравнений типа Уизема// Материалы международной научно технической конф. «Иновации в образовании, науке и технике» посв. 100-летию первого проректора ФПИ-КГТУ проф. Сухомлинова Том 2, Бишкек, 2006.
3. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема// ДАН. -1992. –Т. 325, -№ 6. – С. 1111-1115.
4. Асанов А., Сулайманов Б.Э. Обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений //Труды международной научной конференции, посвященной 70-летию академика Иманалиева М. И., "Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике". –Бишкек: Вестник КГНУ им Ж. Баласагына, 2001. -Сер.3. - Вып. 6. - С. 74-79.
5. Асанов А., Сулайманов Б.Э. The inverse problem for differential equation of the whitham.// Обратные и некорректные задачи прикладной математики: Тр. 13 - Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 2005года. Том 3: ИСЭМ СО РАН –2005, -С. 207-211.
6. Сулайманов Б.Э. Обратная задача для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных|| Вестник ТарГУ им. Дулати, «природопользование и проблемы антропосферы» – Тараз: ТарГУ, 2002. Вестник ТарГУ, №2(6), -С. 32-46.
7. Асанов А., Сулайманов Б.Э., Токтогулова А.Ш. Об одной обратной задаче для систем дифференциальных уравнений типа Уизема// Материалы международной научно технической конф. «Иновации в образовании, науке и технике» посв. 100-летию первого проректора ФПИ-КГТУ проф. Сухомлинова Том 2, Бишкек, 2006.
8. Асанов А., Сулайманов Б. Э. Обратная задача для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка// Труды международной конференции «Современной технологии и управление качеством в образовании, науке и производстве: опыт адаптации и внедрения». –Бишкек: Вестник КТУ им. И. Раззакова, –2001. -№5. –С. 221-225.
9. Асанов А., Сулайманов Б. Э. Нелинейная обратная задача для дифференциальных уравнений типа Уизема // Вестн. КГНУ. Бишкек, 2001. Сер. 3, Вып. 5. – С. 102-106.
10. Асанов А., Сулайманов Б. Э. Об одной обратной задаче для дифференциальных уравнений с частными производными // Вестн. Технол. Ун-та «Дастан». – Бишкек, 1999 – № 2 – С. 9-14.