УДК.517.928

КОМПЛЕКСТИК ТЕГИЗДИКТЕ СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИН БУРУЛУУ ЧЕКИТТЕРИ АРКЫЛУУ РЕКУРРЕНТТИК ТУЮНТУУ

Алыбаев Курманбек Сарманович, ф.-м.и.д., проф.
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Нурматова Майрамгул Нарбековна, аспирант
nurmatova_mairamgul@mail.ru
Б.Осмонов атындагы ЖАМУ, Жалал-Абад шаары,
Кыргыз Республикасы

***Аннотация**: Гидродинамиканын, термелүүлөр теориясынын, кванттык механиканын түрдүү маселелерин изилдөөдө бурулуу чекиттери менен берилген дифференциалдык теңдемелер аркылуу мүнөздөлүүчү математикалык моделдер алынат. Мындай чекиттер кубулуштун өзгөрүшүнө таасир этет жана мындай процесстер бир тектүү эмес болуп саналышат. Бурулуу чекиттери менен берилген дифференциалдык теңдемелер ВБК (Вентцель, Бриллюэн, Крамер) методу сыяктуу методдор менен изилденген.*

Бул эмгекте комплекстик областта бурулуу чекиттерин байланыштыруучу сингулярдык козголгон теңдемелердин чечимдеринин рекурренттик формуласы келтирилип чыгарылды. Алынган жыйынтыктарды сүрөттөөчү мисалдар келтирилди.

***Түйүндүү сөздөр**: сингулярдык козголуу, бурулуу чекити, рекурренттик формула, асимптотикалык туюнтуу, аналитикалык функция, гармоникалык функция, деңгээл сызык, бир байламталуу жана чектелген область.*

РЕКУРРЕНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ТОЧКАМИ ПОВОРОТА В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Алыбаев Курманбек Сарманович д.ф.-м.н., проф.
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Нурматова Майрамгул Нарбековна, аспирант
nurmatova_mairamgul@mail.ru
ЖАГУ имени Б.Осмонова, г.Жалал-Абад,
Кыргызская Республика

***Аннотация**: При исследовании разных задач гидродинамики, теории колебаний, квантовой механики получаются математические модели, которые описываются дифференциальными уравнениями с точками поворота. Такие точки влияют на изменение процесса и такие процессы являются неоднородными. Дифференциальные уравнения с точками поворота изучались различными методами, такими как, метод ВБК (Вентцеля, Бриллюэна, Крамера).*

В данной работе выведена рекуррентная формула решений сингулярно возмущенного уравнения, связывающие точки поворота в комплексной области. Приведены примеры иллюстрирующие полученные результаты.

***Ключевые слова**: сингулярное возмущение, точка поворота, рекуррентная формула, асимптотическое представление, аналитическая функция, гармоническая функция, линии уровня, односвязная и ограниченная область.*

RECURRENT REPRESENTATION OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS WITH ROTATION POINTS IN A COMPLEX PLANE

Alybaev Kurmanbek Sarmanovich, d.ph.-m.s., prof.
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Nurmatova Mairamgul Narbekovna, grad.stud.
nurmatova_mairamgul@mail.ru
JASU named after B. Osmonov, Jalal-Abad city, Kyrgyz Republic

Abstract: *In the study of various problems of hydrodynamics, the theory of oscillations, quantum mechanics, mathematical models are obtained, which are described by differential equations with turning points. Such points affect the change in the process and such processes are heterogeneous. Differential equations with turning points were studied by various methods, such as the WBC method (Wentzel, Brillouin, Cramer).*

In this paper, a recursive formula is derived for the solutions of a singularly perturbed equation connecting the turning points in the complex domain. Examples are given to illustrate the results obtained.

Keywords*: singular perturbation, turning point, recurrent formula, asymptotic representation, analytic function, harmonic function, level lines, simply connected and bounded domain.*

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + \varepsilon f(t, z(t,\varepsilon)), \tag{1}$$
$$z(t_0^1,\varepsilon) = z_0^1. \tag{2}$$

Выведем рекуррентную формулу решений сингулярно возмущенного уравнения с учетом кратных точек поворота.

Теорема. Пусть выполнены условия:

1. $a(t)\epsilon Q(D), t\epsilon D, D$ – односвязная и ограниченная область в комплексной плоскости;
2. $a(t)$ имеет нули в точках $t_0^1, t_0^2, \dots, t_0^k$.
3. $f(t,z)\epsilon Q(H), H$ – некоторая ограниченная область переменных (t,z). $Q(D\vee H)$ – пространство аналитических функций в D или H.

Тогда справедлива следующая формула

$$z = z\left(t_0^k,\varepsilon\right) exp\frac{A(t_0^k,t)}{\varepsilon} + \int_{t_0^k}^{t} exp\frac{A(t_0^k,t)-A(t_0^k,\tau)}{\varepsilon} f(\tau,z)d\tau, (k = 1,2,3,\dots,n) \tag{3}$$

где $A\left(t_0^k,t\right) = \int_{t_0^k}^{t} a(\tau)d\tau, z\left(t_0^k,\varepsilon\right) \ (k = 1,2,3,\dots,n)$.

Доказательство: Решение задачи (1) – (2) представим в виде

$$z(t,\varepsilon) = z^0\, exp\frac{A(t_0,t)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t} exp\frac{A(t_0,t)-A_1(t_0,\tau)}{\varepsilon} f(\tau,z)d\tau, \tag{4}$$

где $A(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$.

Если t_0 – единственная обыкновенная точка поворота, то задача (1) – (2) исследована в работах [1], [2]. Асимптотическое разложение решений для линейного уравнения с двумя простыми точками поворота исследована в [3].

Если $a(t)$ в D имеет нули (кратные не ниже двух) в точках t_0^k $(k = 1,2,3,\dots,n)$или несколько простых нулей, то исследование задачи (1) – (2) ранее не проведены.

Установим взаимосвязь между нулями t_0^k или точками поворота.

$t\epsilon$(окрест t_0^1)

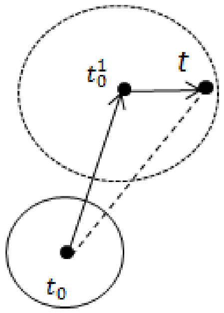


Рис. 1

Заметим $a(t) \epsilon Q(D)$, то значение интеграла не зависит от формы пути интегрирования, а зависит от начальной и конечной точки интегрирования.

Имеем

$$\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau + \int_{t}^{t_0^1} a(\tau)d\tau + \int_{t_0^1}^{t_0} a(\tau)d\tau = 0,$$

отсюда

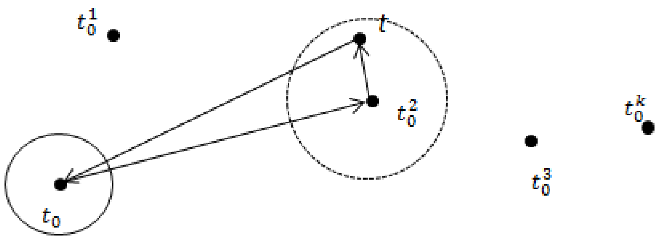
$$\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau = \int_{t_0^1}^{t} a(\tau)d\tau - \int_{t_0^1}^{t_0} a(\tau)d\tau = \int_{t_0^1}^{t} a(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t_0^1} a(\tau)d\tau$$

Таким образом

$$A(t_0,t) = A(t_0^1,t) - A(t_0^1,t_0) = A(t_0^1,t) + A(t_0,t_0^1).$$

С учетом проведенных преобразований (3) представим в виде

$$z = z^0\, exp\frac{A(t_0,t)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t_0^1} f(\tau,z) exp\frac{A(t_0,t)-A(t_0,\tau)}{\varepsilon} d\tau + \int_{t_0^1}^{t} f(\tau,z) exp\frac{A(t_0,t)-A(t_0,\tau)}{\varepsilon} d\tau =$$
$$= z^0\, exp\frac{A(t_0,t)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t_0^1} f(\tau,z) exp\frac{A(t_0,t_0^1)+A(t_0^1,t)-A(t_0,\tau)}{\varepsilon} d\tau +$$
$$+ \int_{t_0^1}^{t} f(\tau,z) exp\frac{A(t_0,t_0^1)+A(t_0^1,t)-A(t_0,t_0^1)-A(t_0^1,\tau)}{\varepsilon} d\tau =$$
$$= \exp\frac{A(t_0^1,t)}{\varepsilon}\left[z^0 \exp\frac{A(t_0,t_0^1)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t_0^1} \frac{f(\tau,z)\exp\left(A(t_0,t_0^1)-A(t_0,\tau)\right)}{\varepsilon} d\tau\right] +$$
$$+ \int_{t_0^1}^{t} f(\tau,z) exp\frac{A(t_0^1,t)-A(t_0^1,\tau)}{\varepsilon} d\tau = exp\frac{A(t_0^1,t)}{\varepsilon} \cdot z(t_0^1,\varepsilon) +$$
$$+ \int_{t_0^1}^{t} f(\tau,z) exp\frac{A(t_0^1,t)-A(t_0^1,\tau)}{\varepsilon} d\tau\, z(t,\varepsilon) =$$
$$= exp\frac{A(t_0^1,t)}{\varepsilon} \cdot z(t_0^1,\varepsilon) + \int_{t_0^1}^{t} f(\tau,z) exp\frac{A(t_0^1,t)-A(t_0^1,\tau)}{\varepsilon} d\tau.$$



1) $t \epsilon$(окрест t_0^1) Рис. 2

$$\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_0^2} a(\tau)d\tau + \int_{t_0^2}^{t} a(\tau)d\tau.$$

$$A(t_0,t) = A(t_0,t_0^2) + A(t_0^2,t).$$

$$z = z^0\, exp\frac{A(t_0,t)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t_0^2} f(\tau,z) exp\frac{A(t_0,t)-A(t_0,\tau)}{\varepsilon} d\tau +$$
$$+ \int_{t_0^2}^{t} f(\tau,z) exp\frac{A(t_0,t)-A(t_0,\tau)}{\varepsilon} d\tau = z^0\, exp\frac{A(t_0,t)}{\varepsilon} +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_0^2} f(\tau,z) exp\frac{A(t_0,t_0^2)+A(t_0^2,t)-A(t_0,\tau)}{\varepsilon} d\tau +$$

$$+\int_{t_0^2}^{t} f(\tau,z)exp\frac{A(t_0,t_0^2)+A(t_0^2,t)-A(t_0,t_0^2)-A(t_0^2,\tau)}{\varepsilon}d\tau=$$
$$=exp\frac{A(t_0^2,t)}{\varepsilon}\left[z^0\,exp\frac{A(t_0,t_0^2)}{\varepsilon}+\int_{t_0}^{t_0^2} f(\tau,z)exp\frac{A(t_0,t_0^2)-A(t_0,\tau)}{\varepsilon}d\tau\right]+$$
$$+\int_{t_0^2}^{t} f(\tau,z)exp\frac{A(t_0^2,t)-A(t_0^2,\tau)}{\varepsilon}d\tau=$$
$$=exp\frac{A(t_0^2,t)}{\varepsilon}\cdot z_1(t_0^2,\varepsilon)+\int_{t_0^2}^{t} f(\tau,z)exp\frac{A(t_0^2,t)-A(t_0^2,\tau)}{\varepsilon}d\tau.$$
$$z(t,\varepsilon)=exp\frac{A(t_0^2,t)}{\varepsilon}\cdot z(t_0^2,\varepsilon)+\int_{t_0^2}^{t} f(\tau,z)exp\frac{A(t_0^2,t)-A(t_0^2,\tau)}{\varepsilon}d\tau.$$

$t\epsilon$(окрест t_0^3)

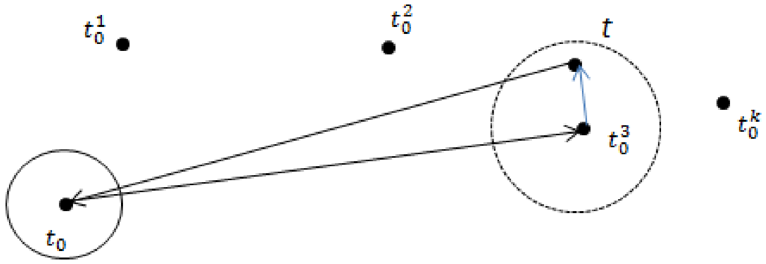


рис.3.

$$\int_{t_0}^{t_0^3} a(\tau)d\tau+\int_{t_0^3}^{t} a(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau.$$
$$A(t_0,t)=A(t_0,t_0^3)+A(t_0^3,t).$$
$$z_3=z^0\,exp\frac{A(t_0,t)}{\varepsilon}+\int_{t_0}^{t_0^3} f(\tau,z)exp\frac{A(t_0,t)-A(t_0,\tau)}{\varepsilon}d\tau+\int_{t_0^3}^{t} f(\tau,z)exp\frac{A(t_0,t)-A(t_0,\tau)}{\varepsilon}d\tau=$$
$$=z^0\,exp\frac{A(t_0,t)}{\varepsilon}+\int_{t_0}^{t_0^3} f(\tau,z)exp\frac{A(t_0,t_0^3)+A(t_0^3,t)-A(t_0,\tau)}{\varepsilon}d\tau+$$
$$+\int_{t_0^3}^{t} f(\tau,z)exp\frac{A(t_0,t_0^3)+A(t_0^3,t)-A(t_0,t_0^3)-A(t_0^3,\tau)}{\varepsilon}d\tau=$$
$$=exp\frac{A(t_0^3,t)}{\varepsilon}\left[z^0\,exp\frac{A(t_0,t_0^3)}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t_0^3} f(\tau,z)exp\frac{A(t_0,t_0^3)-A(t_0,\tau)}{\varepsilon}d\tau\right]+$$
$$+\int_{t_0^3}^{t} f(\tau,z)exp\frac{A(t_0^3,t)-A(t_0^3,\tau)}{\varepsilon}d\tau=$$
$$exp\frac{A(t_0^3,t)}{\varepsilon}\cdot z_2(t_0^3,\varepsilon)+\int_{t_0^3}^{t} f(\tau,z)exp\frac{A(t_0^3,t)-A(t_0^3,\tau)}{\varepsilon}d\tau.$$
$$z(t,\varepsilon)=exp\frac{A(t_0^3,t)}{\varepsilon}\cdot z(t_0^3,\varepsilon)+\int_{t_0^3}^{t} f(\tau,z)exp\frac{A(t_0^3,t)-A(t_0^3,\tau)}{\varepsilon}d\tau.$$

Тогда имеем следующее уравнение:

$$z=z(t_0^k,\varepsilon)exp\frac{A_k(t_0^k,t)}{\varepsilon}+\int_{t_0^k}^{t} exp\frac{A_k(t_0^k,t)-A_k(t_0^k,\tau)}{\varepsilon}f(\tau,z)d\tau\,,(k=1,2,3,\ldots,n).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим следующие примеры:

$a(t)=t^2+1=(t+i)(t-i)=(t+i)(t+i-2i)=(t+i)^2-2i(t+i).$

$\int_{t_0}^{t} a(s)ds=\frac{1}{3}(t+i)^3-i(t+i)^2-\frac{1}{3}(t_0+i)^3+i(t_0+i)^2.$

Введем функцию

$$A_1(t)=\frac{1}{3}(t+i)^3-i(t+i)^2=\frac{1}{3}(t+i)^2(t+i-3i).$$

Полагая $t=t_1+it_2$ определим

$ReA_1(t)=\dfrac{t_1}{3}[t_1^2-(t_2+1)^2-2(t_2^2-t_2-2)]=\dfrac{t_1}{3}[t_1^2-t_2^2-2t_2-1-2t_2^2+2t_2+4]=$

$=\frac{t_1}{3}[t_1^2-3t_2^2+3].$

Если $ReA_1(t)=0$: $t_1=0, t_1^2-3t_2^2+3=0$

$t_1^2 - 3t_2^2 + 3 = 0, t_2^2 = \frac{1}{3}(t_1^2 + 3), t_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{t_1^2 + 3}.$

На рис.4 изображены линии уровня $ReA_1(t) = 0$ и сектора, где $ReA_1(t) < 0$ или $ReA_1(t) > 0$

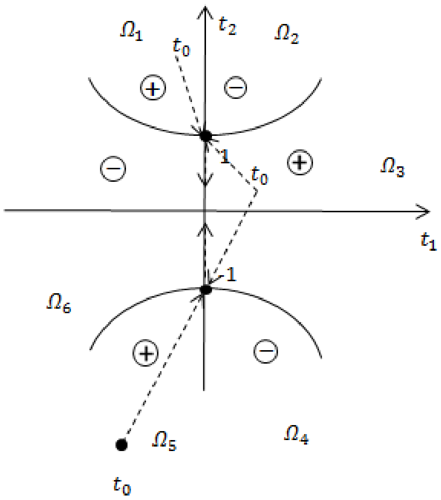


Рис.4.

Применимость формулы (3) зависит от принадлежности t_0 отрицательному $(-)$ или положительному (+) сектору.

Заметим по выбранному пути интегрирования $ReA_1(t)$ должен не возрастать.

1) t_0 принадлежит отрицательному сектору, то из этой точки невозможно попасть в точку $t = -i$ или $t = i$.
2) $t_0 \epsilon (+)$ сектору, то попасть можно.

Если рассматривается задача

$$\varepsilon z' = (t^2 + 1)z + \varepsilon f(t, z),$$
$$z(t_0, \varepsilon) = z^0.$$

$$z = z^0 \, exp\frac{\frac{1}{3}(t+i)^3 - i(t+i)^2 - \frac{1}{3}(t_0+i)^3 + i(t_0+i)^2}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t} exp\frac{\frac{1}{3}(t+i)^3 - i(t+i)^2 - \frac{1}{3}(\tau+i)^3 - i(\tau+i)^2}{\varepsilon} f(\tau, z)d\tau.$$

то, $z_1(-i, \varepsilon) = z^0 \, exp\frac{-\frac{1}{3}(t_0+i)^3 + i(t_0+i)^2}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{-i} exp\frac{-\frac{1}{3}(\tau+i)^3 - i(\tau+i)^2}{\varepsilon} f(\tau, z_1)d\tau,$

$$Re\left(-\frac{1}{3}(t_0 + i)^3 + i(t_0 + i)^2\right) = -\frac{t_1}{3}[t_1^2 - 3t_2^2 + 3].$$

Если $t_0 \epsilon \Omega_3 \vee t_0 \epsilon \Omega_5$, то можно попасть в нуль (-i), далее в (i).

Пусть $t_0 \epsilon \Omega_5$. Тогда $Re\left(-\frac{1}{3}(t_0 + i)^3 + i(t_0 + i)^2\right) < 0.$

Выражение $z^0 \, exp\frac{-\frac{1}{3}(t_0+i)^3 + i(t_0+i)^2}{\varepsilon} = o(\varepsilon^n), n \epsilon N$ и при условии $t_0 \notin \{t \epsilon C, t_1^2 - 3t_2^2 + 3 = 0\}$, $t_0 \notin \{t \epsilon C, \}, t_1 = 0, -\infty < t_2 \leq -1$ асимптотическое представление $z_1(-i, \varepsilon)$ зависит от интеграла

$$\mathcal{J}_1 = \int_{t_0}^{-i} exp\frac{-\frac{1}{3}(\tau+i)^3 - i(\tau+i)^2}{\varepsilon} f(\tau, z)d\tau.$$

Если $t_0 \epsilon \Omega_1 \vee t_0 \epsilon \Omega_3$, то из этой точки можно попасть в нуль (i) далее в (-i).

Рассмотрим случай, когда из одного нуля невозможно попасть в другое.

Пусть $a(t) = 3t^2 - 2t = t(3t - 2),$

$A(t_0, t) = \int_{t_0}^{t}(3\tau^2 - 2\tau)d\tau = t^3 - t^2 - t_0^3 + t_0^2, \; A_0(t) = t^3 - t^2.$

$ReA_0(t) = Re(t_1^3 + 3it_1^2t_2 - 3t_1t_2^2 - it_2^3 - t_1^2 - 2it_1t_2 + t_2^2) = t_1^3 - 3t_1t_2^2 - t_1^2 + t_2^2 = t_1^3 - t_1^2 - -t_2^2 \cdot (3t_1 + 1) = 0.$

Отсюда имеем

$t_2^2 = \frac{t_1^2(t_1-1)}{3t_1-1}, t_2 = \pm t_1\sqrt{\frac{t_1-1}{3t_1-1}}.$

Кривая определяемая функцией $t_2\,(t_1)$ изображена на рис.4. Эти кривые также разделяют плоскость на отрицательные и положительные сектора. Особенность рассматриваемого случая состоит в том, что из положительных секторов не всегда можно попасть к обеим нулям.

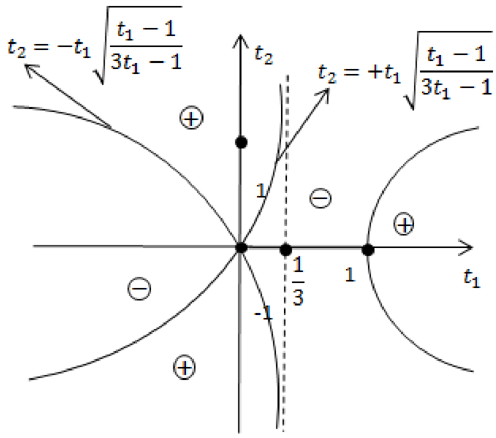


Рис.5.

Список литературы

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости //Вестник КГНУ. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001г. – С. 190-200.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968, 464 с.
3. Турсунов Д.А.Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота //Вестник Томского государственного университета. – №1 (21). –Томск, 2013г. – С. 34-40.
4. Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б. Затягивание потери устойчивости и погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями. Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана №5, 2017, стр. 125-129.
5. Alybaev K.S. Asymptotic analysis of solutions of systems of three singularally perturbed first-order equations. [Text]/ K.S. Alybaev, T.K. Narymbetov. - P. 46-55. // Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR №1, Bishkek 2020 -P. 46-55.