УДК 517.928

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБЩИХ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Нарымбетов Т.К. – НИМСИ
talant83@mail.ru

Аннотация: *В данной работе рассматривается сингулярно возмущенное уравнение первого порядка, причем невозмущенное уравнение имеет несколько решений. Доказана общая теорема существования областей притяжения для решений сингулярно возмущенных уравнений к решениям невозмущенного уравнения. Определены критерии существования общих областей притяжений. Приведены примеры.*

Ключевые слова: *сингулярное возмущение, невозмущенное уравнение, область притяжения, общая часть, линии уровня, топология области.*

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМДЕРИНИН ЖАЛПЫ ТАРТЫЛУУ ОБЛАСТТАРЫНЫН ЖАШАШЫ

Нарымбетов Т.К. – ИИМСИ
talant83@mail.ru

Аннотация: *Бул жумушта козголбогон теңдемеси бир нече чечимге ээ биринчи тартиптеги сингулярдык козголгон теңдеме каралды. Сингулярдык козголгон теңдеменин чечимдеринин козголбогон тедеменин чечимдерине тартылуу областтарынын жашашынын жалпы теоремасы далилденди. Жалпы тартуу областынын жашоо критерийлери келтирилди. Мисалдар көрсөтүлдү.*

Түйүндүү сөздөр*: сингулярдык козголуу, козголбогон теңдеме, тартуу областы, жалпы бөлүк, деңгээл сызык, областтын топологиясы.*

EXISTENCE OF GENERAL DOMAINS OF ATTRACTIONS OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS

Narymbetov T.K. - NIMSI
talant83@mail.ru

Abstract: *In this paper, a singularly perturbed first-order equation is considered, and the unperturbed equation has several solutions. A general theorem on the existence of domains of attraction for solutions of singularly perturbed equations to solutions of an unperturbed equation is proved. Criteria for the existence of common areas of attraction are determined. Examples are given.*

Keywords: *singular perturbation, unperturbed equation, region of attraction, general part, level lines, topology of the region.*

Введение

В теории сингулярно возмущенных уравнений формулировка условий предельного перехода является одной из основных проблем. Кратко эту проблему можно сформулировать следующим образом:

Пусть рассматривается сингулярно возмущенное уравнение вида

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = F\big(t, x(t,\varepsilon)\big) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon -$ вещественный параметр; $x(t,\varepsilon) -$ неизвестная скалярная функция; $t \in [t_0, T] -$ отрезок действительной оси или $t \in \Delta \subset C -$ множество комплексных чисел и Δ - односвязная, открытая область.

В (1) полагая $\varepsilon = 0$, получим уравнение

$$F\big(t, y(t)\big) = 0 \tag{3}$$

Уравнение (3) по отношению к (1) называют невозмущенной, а (1) сингулярно возмущенной. Невозмущенное уравнение (3) не является дифференциальным.

Пусть $y(t) = y_0(t)$ какое либо решения уравнения (3) и $x(t,\varepsilon) -$ решение задачи (1) - (2) определенное для $t \in [t_0, T]$ или $t \in \Delta$.

Задача предельного перехода. При каких условиях возможно соотношение $x(t,\varepsilon) \to y_0(t)$ по ε?

В наиболее общем виде данная задача для $t \in [t_0, T]$ решена А.Н.Тихоновым [1]; Когда невозмущенное уравнение имеет несколько решений рассмотрены в [2] для действительных t.

Задача предельного перехода для комплексных t исследованы в $[3-6]$.

В [3] предполагается, что невозмущенное уравнение имеет одно решение. Введены новые понятия: погранслойная линия, регулярные и сингулярные области.

В [4-6] невозмущенное уравнение имеет несколько решений. Для одного решения невозмущенного уравнения введено понятие области притяжения и доказано существование областей притяжений. При этом существование общих частей областей притяжения не были исследованы.

В данной работе введено более общее определение области притяжения и сформулированы условия существования общих областей притяжений или отсутствие таковых.

Пусть выполняется условие:

Рассматривается задача (1) – (2) и $t \in \Delta \subset \mathbb{C}$ и $\Delta -$ односвязная открытая область и уравнение (3) имеет решения $y_j(t), \dots, y_k(t)$.

Введем понятие область притяжения решения.

Определение. *Пусть:1. Существует область* $\Delta_j \subset \Delta$.

2. $x(t,\varepsilon) -$ *решение задачи (1) – (2) определенное в* Δ_j.

3. $\forall t \in \Delta_j\big(x(t,\varepsilon) \to y_j(t) \text{ по } \varepsilon\big)$.

При выполнении этих условий область Δ_j *назовём областью притяжения решения* $x(t,\varepsilon)$ *к решению* $y_j(t)$.

Пусть выполняются условия:

У1. $F(t,x) \in Q(D)$, где $D -$ некоторые множество переменных t, x;

$Q(D)$ $-$пространство аналитических функций в D.

У2. Пусть $y_1(t), y_2(t) -$ решения уравнения (3) удовлетворяющие условию: $y_1(t)\epsilon Q(\Delta), y_2(t)\epsilon Q(\Delta)$, $(t, x - y_1) \in D$, $(t, x - y_2) \in D$, $\forall t \in \Delta\Big(t, \big(y_1(t) - y_2(t)\big)\Big)\epsilon D$. $\forall t \in \Delta$ существуют некоторые положительные числа α_1, α_2 и $\alpha_1 < |y_1(t) - y_2(t)| < \alpha_2$.

Сначала рассмотрим решение $y_1(t)$. Введем новую неизвестную функцию $U_1(t,\varepsilon)$ следующим образом

$$U_1(t,\varepsilon) = x(t,\varepsilon) - y_1(t), x(t,\varepsilon) = U_1(t,\varepsilon) + y_1(t) \tag{4}$$

(4) подставляя в (1) получим

$$\varepsilon U_1' = F\big(t, U_1(t,\varepsilon) + y_1(t)\big). \tag{5}$$

Правую часть (5) разложим в точке $(t, 0)$. Имеем

$$\varepsilon U_1' = F_x'\big(t, y_1(t)\big)U_1(t,\varepsilon) + F_1\big(t, U_1(t,\varepsilon)\big) + \varepsilon\varphi_1(t), \tag{6}$$

где

$$F_1(t,U_1) \equiv \frac{1}{2!}F_x'\big(t,y_1(t)\big)U_1^2(t,\varepsilon)+\dots \quad ; \ \varphi_1(t) = -y_1'(t).$$

Введем обозначение $F_x'\big(t,y_1(t)\big) \equiv a_1(t)$.

Тогда (6) можно записать в виде

$$\varepsilon U_1' = a_1(t)U_1 + F_1(t,U_1) + \varepsilon\varphi_1(t) \qquad (7)$$

с начальным условием

$$U_1(t_0,\varepsilon) = U_1^0 \equiv x^0 - y_1(t_0),\ |U_1^0| \le M_1\varepsilon \qquad (8)$$

Далее все постоянные независящие от ε будем обозначать буквами $M_1, M_2, \dots$.

Рассматривая решение $y_2(t)$ и введя новую неизвестную функцию

$$U_2(t,\varepsilon) = x(t,\varepsilon) - y_2(t),$$

можно получить уравнение

$$\varepsilon U_2' = a_2(t)U_2 + F_2(t,U_2) + \varepsilon\varphi_2(t) \qquad (9)$$

с начальным условием

$$U_2(t_0,\varepsilon) = U_2^0 = x_2^0 - y_2(t_0),\ |U_2^0| \le M_2\varepsilon$$

где $F_2(t,U_2) = \frac{1}{2!}F_x''\big(t,y_2(t)\big)U_2^2(t,\varepsilon)+\dots;\ \varphi_2(t) = -y_2'(t)$.

Пусть выполняется условие:

У3. $\forall t \in \Delta\big(a_j(t) \ne 0, j = 1{,}2\big)$.

Определим функции

$$A_j(t) = \int_{t_0}^{t} a_j(w)dw, j = 1{,}2.$$

Согласно У1. функция $A_j(t) \in Q(\Delta)$ и $ReA_j(t),\ \ ImA_j(t) -$ гармонические функции в Δ.

Сначала докажем общую теорему существования области притяжения. Рассмотрим задачу (7) - (8).

Относительно функции $F_1(t,U_1)$ предположим выполнимость условия:

У4. $\forall\Big(\big(t,\widetilde{U}_1\big),\big(t,\widetilde{\widetilde{U}}_1\big)\Big) \in D(\Big|F_1\big(t,\widetilde{U}_1\big) - F_1\big(t,\widetilde{\widetilde{U}}_1\big)\Big| \le M_1\Big|\widetilde{U}_1 - \widetilde{\widetilde{U}}_1\Big|\max\Big\{\Big|\widetilde{U}_1,\widetilde{\widetilde{U}}\Big|\Big\}$

Теорема (основная). *Пусть рассматривается задача (1)-(2) и выполняются условия* У1.–У4. *Тогда: 1. Существует область* $\Delta_{10} \subset \Delta$ *и* $U_1(t,\varepsilon) -$ *решение задачи (7) – (8) определенное в* Δ_{10} *и* $U_1(t,\varepsilon) \in Q(\Delta_{10})$.

2. $\forall t \in \Delta_{10}(U_1(t,\varepsilon) \to 0)$.

Из сформулированной теоремы вытекает, что Δ_{10} является областью притяжения решения к $U_1(t,\varepsilon)$ решению $y_1(t)$.

Докажем теорему. Прежде опишем топологию области Δ с помощью линии уровней функции $ReA_1(t), ImA_1(t)$. Согласно У3. линии уровня $ReA_1(t), ImA_1(t)$ не имеют кратных точек (точек ветвлений). Это означает, через произвольную точку области Δ проходит единственная линия уровня определяемые функциями $ReA_1(t), ImA_1(t)$. Линии уровня $ReA_1(t), ImA_1(t)$ взаимно ортогональны [7]. Таким образом, область Δ покрывается взаимно ортогональными линиями уровней.

Переходим к доказательству теоремы. Для этого задачу (7) - (8) заменим следующим уравнением

$$U_1 = U_1^0 exp\frac{A_1(t)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[\varepsilon\varphi_1(\tau) + F_1(\tau,U_1)]\,exp\frac{A_1(t)-A_1(\tau)}{\varepsilon}d\tau \qquad (11)$$

В (11) определим путь интегрирования. Для этого рассмотрим линии уровня:

$$(p_0) = \{t \in \delta, ReA_1(t) = 0\},$$
$$(q) = \{t \in \delta, ImA_1(t) = q - const\}.$$

Заметим, линия уровня (p_0) проходит через точку t_0. Линия уровня (p_0) область Δ делит на части Δ_1, Δ_2 (Рис. 1). В каждом из частей функция $ReA_1(t)$ имеет различные знаки. Действительно на линии (p_0) возьмем произвольную точку $\tilde{t}$ и линию уровня функции $ImA_1(t)$ проходящую через эту точку обозначим $(\tilde{q})$. Известно [8] по линии уровня $(\tilde{q})$ функция $ReA_1(t)$ строго монотонна. Если учесть $ReA_1(\tilde{t}) = 0$, то $\forall t \in \Delta_1(ReA_1(t) < 0$ или

$ReA_1(t) > 0)$ и $\forall t \in \Delta_2(ReA_1(t) < 0$ или $(ReA_1(t) > 0)$. Поскольку все возможности равнозначны, для определенности возьмем:
$\forall t \in \Delta_1\ (ReA_1(t) < 0),\ \forall t \in \Delta_2(ReA_1(t) > 0)$ при этом будем считать, общая граница (p_0) областей Δ_1, Δ_2 не принадлежит ни к Δ_1и ни к Δ_2 (Рис. 1).

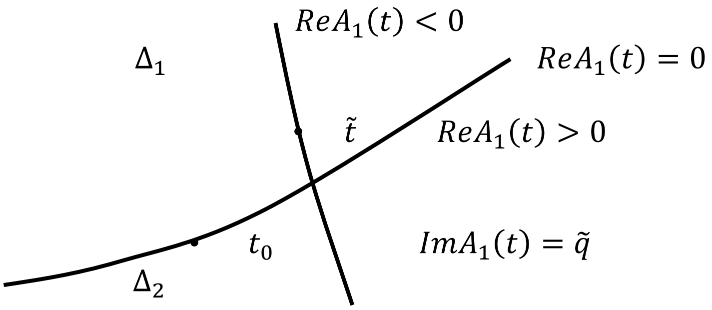

Рис.1. Деление области

Определим путь интегрирования. Путь состоит из: части (p_0) соединяющее точки t_0 и $\tilde{t} \in (p_0)$; части $(\tilde{q})$ соединяющее точки $\tilde{t}$ и $t \in (\Delta_1 \vee \Delta_2)$. $К$ (11) применяя метод последовательных приближений и следуя вычислениям проведенные в работах [3-4] доказывается: существует часть $(p_0)\left((p_{01})\right)$, область $\Delta_{10} \subset \Delta_1$ и $U_1(t,\varepsilon) -$ решение уравнения (11) определенное в Δ_{10}; для $U_1(t,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$|U_1(t,\varepsilon)| \le M_4\varepsilon\ ; \tag{12}$$

в части $\Delta_{20} \subset \Delta_2 -$ решение $U_1(t,\varepsilon)$ не ограничена.
Из (12) вытекает $\forall t \in \left(\Delta_{10} \cup (p_{01})\right)(U_1(t,\varepsilon) \to 0)$. Теорема доказана. Основная теорема указывает в областях, где $ReA_j(t) \le 0$ существуют области притяжения. Существование общих областей притяжений основной теоремой не решается. Рассмотрим случаи, когда существуют или не существуют общие области притяжения.

1. Пусть невозмущенное уравнение (3) имеет решения $y_1(t), y_2(t)$ и для этих решений определены задачи (7) – (8), (9) – (10). Определим функции

$$A_j(t) = \int_{t_0}^{t} a_j(w)dw, j = 1{,}2.$$

Рассмотрим линии уровня $(p_{0j}) = \{t \in \Delta, Rea_j(t) = 0\}$.

УС. Пусть в области Δ линии уровня (p_{0j}) не имеют общих точек, кроме точки t_0 и $A_1(t) \ne -A_2(t)$.

При выполнении УС и условия основной теоремы существует общая область притяжений, где $ReA_j(t) \le 0,\ (j = 1{,}2)$.

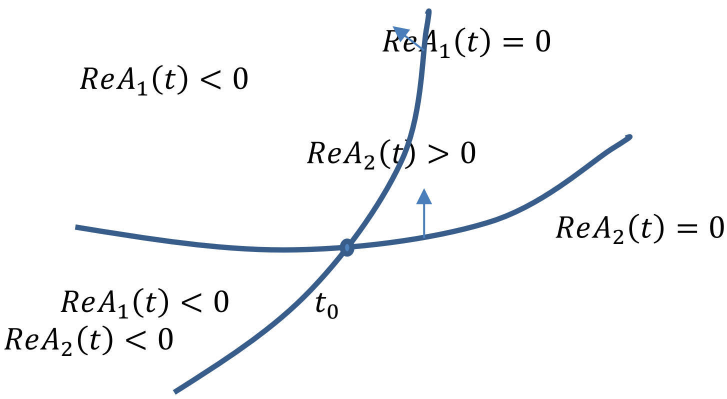

Рис. 2. Общая часть областей притяжений.

Один из вариантов общей части изображено на Рис. 2.

УНС. Если $A_1(t) = -A_2(t)$, то общей частью является только часть линии уровня (p_0) (Рис. 3).

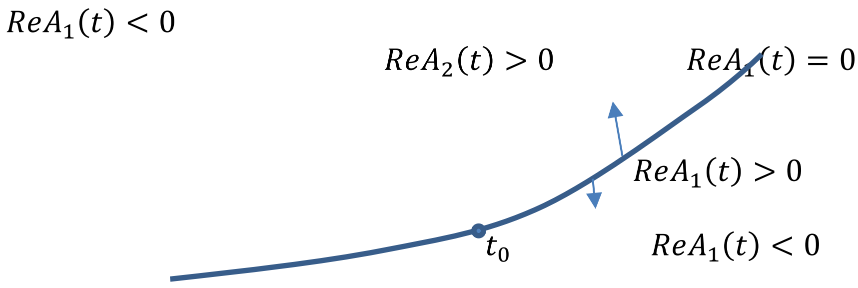

Рис. 3. Общая часть линия уровня (p_0).

В данном случае общая (плоская) область не существует.

Использованные источники.

1. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – Москва: Наука, 1973. – 272 с.
2. Кененбаева Г.М. Теория и методика поиска новых эффектов и явлений в теории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений [Текст] / Г.М.Кененбаева. – Бишкек: Изд-во «Илим», 2012. - 204 с.
3. Алыбаев К.С. Погранслойные линии для сингулярно и регулярно возмущенных дифференциальных уравнений первого порядка с аналитичес-кими функциями. [Текст] / Алыбаев К.С., К.Б.Тампагаров // Естественные и математичес-кие науки в современном мире: сб. статей по материалам XLVII международной научно-практической конференции. №10 (45). Россия, Новосибирск: СиБАК, 2016. - С. 67-73.
4. Алыбаев К.С. Сингулярно возмущенные уравнения с аналитическими функциями теряющие единственность при вырождении [Текст] /К.С.Алыбаев, А.Б. Мурзабаева // Итоги науки в теории и практике 2017: сб. научных трудов Евразийского Научного Объединения по материалам XXXIV международной научной конференции. № 12 (34). Москва, 2017. - С. 15-20.
5. Алыбаев К.С. Построение областей притяжения при вырождении сингулярно возмущенных уравнений[Текст] /К.С.Алыбаев, А.Б. Мурзабаева //Международный научно-исследовательский журнал. № 9 (75). Екатеринбург, 2018. - С. 7-11.
6. Alybaev K.S. Singularly perturbed first-order equations in complex domains that lose their uniqueness under degeneracy. [Text] /K.S.Alybaev, A.B. Murzabaeva //In “International Conference on Analysis and Applied Mathematics” (ICAAM 2018), AIP Conference Proceedings Vol. no. 1997, American Institute of Physics.-2018.-P.020076-1-020076-5.Режим доступа:https://doi.org/10.1063/1.5049070.
7. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – Москва: Наука, 1973. – 739 с.
8. Федорюк М.В. Метод перевала [Текст]/ М.В.Федорюк. – Москва: Наука, 1977. - 368 с.