

УДК: 517.928

МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛДӨӨНҮН ЖАРДАМЫНДА ЖАРЫКТЫН ЖАКЫНКЫ
ЗОНАДАГЫ ДИФРАКЦИЯСЫН ИЗИЛДӨӨ

Мурзабаева Айтбу Бусурманкуловна, доцент

Ош Мамлекеттик Университети

Ош, Кыргыз Республикасы

Акматов Абдилазиз Алиевич

улук окутуучу

Ош Мамлекеттик Университети

Ош, Кыргыз Республикасы

E-mail: abdilaziz_akmatov@mail.ru

Аннотация: Жарыктын жакынкы чөйрөдө таралуусун изилдөө илимде Френель дифракциясы деп аталат. Жарык өзүнүн өлчөмүндөгү көзөнөкчө аркылуу өткөндө, толкун касиетине ээ болору илимде далилденген. Жумуш ушул эксперименталдык далилденген жарыктын касиетин өтө кеңири изилдөөгө дуушар болгон Бессель теңдемелеринин чечимдери аркылуу окуп үйрөнүүгө багытталат. Бул математикалык аппаратка жарыктын жакынкы чөйрөдөгү таралуусун алып келүү жараяны толугу менен жумушта баяндалат. Ал үчүн эң оболу жарыктын жакынкы чөйрөдөгү касиетин туюндуруучу Френель интегралдарын келтирип чыгарабыз. Андан соң ал интегралдарды Бессель теңдемесинин жекече чечимдери болгон бессель функциялары менен байланыштырабыз. Жыйынтыгында жарыктын жакынкы чөйрөдөгү касиетин окутуп үйрөтүүчү жана так мүнөздөөчү математикалык ыкмага ээ болобуз.

Түйүндүү сөздөр: дифференциалдык теңдеме, дифракция, көзөнөкчө, чечим, график, жарык, фотон, толкун, жыштык, бессель функциясы, френель интегралы, корно спиралы, математикалык аппарат.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ СВЕТА В БЛИЖНОЙ ЗОНЕ С ПОМОЩЬЮ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЕ

Мурзабаева Айтбу Бусурманкуловна доцент

Ошский Государственный Университет

Ош, Кыргызская Республика

Акматов Абдилазиз Алиевич

старший преподаватель

Ошский Государственный Университет

Ош, Кыргызская Республика

E-mail: abdilaziz_akmatov@mail.ru

Аннотация: В науке изучение природы света в ближней зоне известно под названием дифракции Френеля. Доказано что, при переходе отверстия соизмеримого размера света имеет волновую свойству. Цель работы заключается в том что на основе достаточно и хорошо изученной уравнении Бесселя, изучать свойства экспериментально

доказанной природы света в ближней зоне. Для того чтобы применить математический аппарат в работе, полностью показываем процесс создание математического модели. Первую очередь выводим интегралы Френеля, которая является математическим аппаратом для изучения природы света в ближней зоне. После этого интегралы Френеля связываем со сферическими функциями Бесселя, которые являются решением уравнения Бесселя. В итоге мы получаем математического аппарата, который с точностью иллюстрирует свойство света в ближней зоне.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, дифракция, отверстия, решение, график, свет, фотон, волна, частота, функция Бесселя, интегралы Френеля, спирали Корно, математические аппараты.

STUDY OF LIGHT DIFFRACTION IN THE NEAR ZONE WITH
HELPING MATHEMATICAL SIMULATION

Murzabaeva Aytbu Busurmankulovna
assistant professor

Osh State University
Osh, Kyrgyz Republic

Akmatov Abdilaziz Alievich
Senior Lecturer

Osh State University
Osh, Kyrgyz Republic

E-mail: abdilaziz_akmatov@mail.ru

Abstract: In science, the study of the nature of light in the near field is known as Fresnel diffraction. It is proved that, when light passes through a hole commensurate with the size of light, it has a wave property. The purpose of the work is that, on the basis of a sufficiently and well-studied Bessel equation, to study the properties of the experimentally proven nature of light in the near-field zone. In order to apply the mathematical apparatus in the work, we fully show the process of creating a mathematical model. First, we derive the Fresnel integrals, which is a mathematical apparatus for studying the nature of light in the near zone. After that, the Fresnel integrals are connected with the spherical Bessel functions, which is a solution to the Bessel equation. As a result, we get a mathematical apparatus that accurately illustrates the property of light in the near zone.

Key words: differential equations, diffraction, holes, solution, graph, light, photon, wave, frequency, Bessel function, Fresnel integrals, Korno spirals, mathematical apparatus.

Введение. В основу учения о распространении света Гюйгенсом положен принцип, носящий его имя[3,4]. Согласно представлениям Гюйгенса, свет, по аналогии со звуком, представляет собой волны, распространяющиеся в особой среде-эфире, занимающем все пространство, в частности заполняющем собой промежутки между частицами любого вещества, которые как бы погружены в океан эфира. С этой точки зрения естественно можно считать, что колебательное движение частиц эфира передается не только той частице, которая лежит на «пути» светового луча, т. е. на прямой, соединяющей источник

света L с рассматриваемой точкой A , но всем частицам, примыкающим к A , т.е. световая волна распространяется из A во все стороны, как если бы точка A служила источником света. Поверхность, огибающая эти вторичные волны, и представляет собой поверхность волнового фронта. Для случая, изображенного на рисунок 1, это огибающая представится частью шаровой поверхности с центром в L , ограниченный конусом, ведущим к краям круглого отверстия в экране MN .

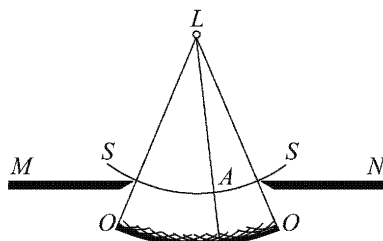


Рисунок 1. К принципу Гюйгенса: L - источник; SS - вспомогательная поверхность; OO - огибающая вторичных волн, исходящих из SS .

Но этот способ недостаточно, чтобы иллюстрировать природу света. Поэтому Френель выдвинул новую формулировку принципа Гюйгенса[3]. Исследовал действие световой волны, испущенной из точки A , в какой-либо точке наблюдения B . Согласно нового принципа заменим действия источника A действием воображаемых источников, расположенных на вспомогательной поверхности S . В качестве такой вспомогательной поверхности S выберем поверхность фронта волны, идущей A (рис. 2). вычисление результата интерференции вторичных волн упрощается, если применить указанный Френелем способа: для вычисления действия в точке B соединяем A с B и разбиваем поверхность S на зоны такого размера, чтобы расстояния от краев зоны до B отличались на $\frac{\lambda}{2}$, т.е.

$$M_1B - M_0B = M_2B - M_1B = M_3B - M_2B = \dots = \frac{\lambda}{2}.$$

Вычисляя для первой зоны (рисунок 3)

$$r^2 = a^2 - (a-x)^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b+x)^2.$$

По сравнению с a или b λ очень мало, то

$$2\pi ax = 2\pi a \frac{b}{a+b} \times \frac{\lambda}{2} = \frac{ab\lambda}{a+b}.$$

Построение Френеля разбивает поверхности сферической волны на равновеликие зоны, каждая имеет площадь $\frac{ab\lambda}{a+b}$. Теперь остается, используя формулу Грина определить математическую формулу дифракции Френеля.

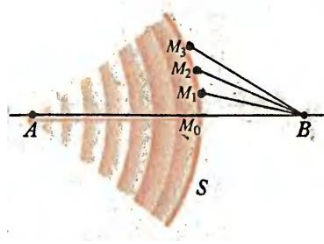


Рисунок 2. Определения зон Френеля.

Формулировка проблемы или задачи. Рассмотрим монохроматических волн. Тогда уравнения распространения световых волн зависящих только от пространственных координат

$$\Delta^2 \Phi + k^2 \Phi = 0, \quad (1)$$

где $k = \frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$, λ – длина волны.

Решение (1) в случае монохроматических волн

$$\Phi(r, t) = \Phi(r)e^{-i\omega t}.$$

Рассмотрим (рис. 3) объем V . К этому объему V и ограниченному поверхности S применим вторую формулу Грина

$$\int_V (\Phi \Delta^2 G - G \Delta^2 \Phi) dV = \oint_S \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS. \quad (2)$$

Обозначим P_0 фиксированную точку внутри объема, а P_1 переменную точку (любую точку пространства, отличную от P_0). Принимая P_0 за начала отсчета, координаты точки P_1 можно характеризовать радиусом-вектором r_{01} . Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция

$$G(P_1) = \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}, \quad (3)$$

удовлетворяет уравнению (1) для всех точек, отличных от P_0 . В обозначении $G(P_1)$ в (3) учтено, что точка P_0 принята за начало координат и нет необходимости ее указывать, а при подстановке $G(P_1)$ в (1) производные вычисляются по координатам точки P_1 . Функция Φ , описывающая электромагнитную волну, непрерывна во всех точках.

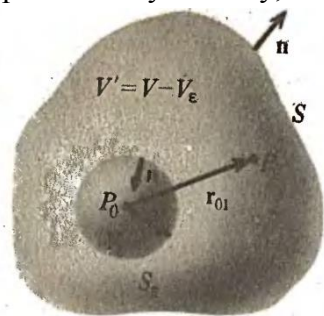


Рисунок 3. Применение к объему V вторую формулу Грина.

Поскольку в точке $P_1 = P_0$ функция $G(P_1)$ обращается в бесконечность, а ее производные терпят разрыв, к ней нельзя применить формулу Грина для всего объема V . Поэтому окружим точку P_0 небольшой сферой радиусом ε с центром в точке P_0 . Обозначим площадь поверхности сферы S_ε , а ограничиваемый ею объем - V_ε . Вне объема V_ε функция $G(P_1)$ удовлетворяет всем условиям применимости (2). Учитывая, что

$$\int_{V-V_\varepsilon} (\Phi \Delta^2 G - G \Delta^2 \Phi) dV = \int_{V-V_\varepsilon} (-k^2 \Phi G + k^2 \Phi G) dV = 0, \quad (4)$$

получаем

$$\int_{S+S_\varepsilon} \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Заметим, что внешняя нормаль n на поверхности S_ε , ограничивающей объем $V' = V - V_\varepsilon$, направлена внутрь объема V_ε (рисунок 3). Из (3) и (2) следует, что

$$-\int_{S_\varepsilon} \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS = \int_S \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS. \quad (5)$$

Для точек P_1 на поверхности S имеем

$$\frac{\partial r_{01}}{\partial n} = \text{grad}_1 r_{01} n = \cos \left(n, \hat{r}_{01} \right). \quad (6)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\cos \left(n, \hat{r}_{01} \right)}{r_{01}} (ik - 1)G.$$

В (6) индекс 1 в обозначении операции градиента показывает, что градиент вычисляется по координатам точки P_1 , т.е. $\text{grad}_1 r_{01} = \frac{\bar{r}_{01}}{r_{01}}$. Очевидно, что $\text{grad}_0 r_{01} = \frac{\bar{r}_{10}}{r_{10}}$ и, следовательно, $\text{grad}_1 r_{01} = -\text{grad}_0 r_{01}$. Для точек P_1 на поверхности S_ε

$$\int_{S_\varepsilon \rightarrow 0} \left(G \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = \left\{ \left[\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \times \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \times \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik \right) \right] \times 4\pi\varepsilon^2 \right\}_{\varepsilon \rightarrow 0} = -4\pi\Phi(P_0).$$

Поэтому из (5)

$$\Phi(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \times \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \times \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \right) \right] dS.$$

Эта формула позволяет вычислить значение функции Φ в любой точке внутри объема, если известны значения функции и ее производные по нормали на поверхности, ограничивающей этот объем.

Теперь внутри объема V рассмотрим параллельные плоскости. Конечно, в типичных условиях дифракционная картина наблюдается в плоскости, параллельной экрану с отверстиями. Плоскость, в которой наблюдается дифракционная картина, будем называть – плоскостью дифракционной картины, а другую плоскость – плоскость источников. В каждой плоскости введем прямоугольные декартовы системы координат,

оси X, Y которых параллельны, а оси Z совпадают, причем положительное направление оси Z согласуется по обычному правилу с направлениям осей X, Y (рис. 4).

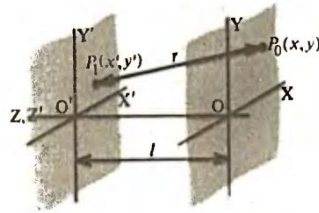


Рисунок 4. Расположение систем координат в плоскостях источника и дифракционной картины.

Единичный вектор нормали направлен в сторону, из которой приходит излучение.

Функция $\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$ описывает волну, движущуюся к точке P_0 . Обозначим (x, y) координаты

точки P_0 в плоскости дифракционной картины, (x', y') - координаты точки P_1 интегрирования в плоскости источников, $dS' = dx' dy'$ - элемент площади на поверхности источников, а

$$\psi(x', y') = A \times \frac{e^{ikr_{12}}}{r_{12}}.$$

-амплитуды источников. Тогда

$$\Phi(x, y) = -\frac{ik}{4\pi} \int_{S'} \psi(x', y') \times \frac{e^{ikr}}{r} \left[\cos(\hat{n}, \hat{r}_{12}) + \cos(\hat{n}, \hat{r}_{01}) \right] dS, \quad (7)$$

где

$$r = \sqrt{l^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}, \quad (8)$$

l - расстояние между плоскостями. Член с косинусами в подынтегральном выражении является медленно меняющейся функцией по сравнению с быстро осциллирующим множителем $\exp(ikr)$. Он не оказывает практического влияния на картину интерференции, не изменяя ее видимости, и лишь слабо влияет на среднюю яркость. Кроме того, в большинстве практически важных случаев углы $(\hat{n}, \hat{r}_{12}), (\hat{n}, \hat{r}_{01})$ изменяются в небольших

пределах вблизи нулевого значения. В этом предположении, называемом приближением малых углов, без существенного искажения результатов можно косинусы принять равными единице:

$$\cos(\hat{n}, \hat{r}_{12}) = 1, \cos(\hat{n}, \hat{r}_{01}) = 1, \quad (9)$$

и представить формулу (7) в виде, удобном для применений:

$$\Phi(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \int_{S'} \psi(x', y') \times \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) dx' y'. \quad (10)$$

Вынос $\cos\left(n, \hat{r}_{12}\right) + \cos\left(n, \hat{r}_{01}\right)$ из-под знака интеграла с использованием равенства (9) возможен благодаря тому, что эта функция меняется очень медленно по сравнению с быстро осциллирующим экспоненциальным множителем $\exp(ikr)$. Строго говоря, при выносе этой функции за знак интеграла необходимо заменить ее некоторым значением по теореме о среднем. Однако точное значение этой величины несущественно, поскольку, будучи множителем, она не оказывает влияние на видимость интерференционной картины и играет роль масштабного множителя. Расчет точного значения интенсивностей в дифференциальной картине в подавляющем большинстве случаев не представляет интереса. Поэтому целесообразно не загромождать формулы несущественными множителями и воспользоваться равенствами (9).

Дальнейшее упрощение формулы производится также в предположении малых углов, которое математически формулируется в виде неравенств

$$\frac{|x-x'|}{l} \ll 1, \quad \frac{|y-y'|}{l} \ll 1. \quad (11)$$

При выполнении условий (11) выражение (8) можно разложить в ряд по (11) и ограничиться членами второго порядка:

$$r = l \left[1 + \frac{(x-x')^2}{l^2} + \frac{(y-y')^2}{l^2} \right]^{\frac{1}{2}} = l + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2l}. \quad (12)$$

Поставляя разложение (12) в (10), находим

$$\Phi(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \times \frac{e^{ikl}}{l} \int_{s'} \psi(x', y') \exp \left\{ \frac{ik \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 \right]}{2l} \right\} dx' dy', \quad (13)$$

где медленно меняющаяся величина $r \approx l$ в знаменателе вынесена из-под знака интеграла, поскольку она не оказывает влияния на видимость интерференционной картины, а лишь очень слабо меняет ее общую яркость.

В большинстве практически важных случаев для описания дифракции достаточно пользоваться приближением (13), называемым приближением Френеля. Дифракция, рассматриваемая в этом приближении, называется дифракцией Френеля.

Расположение систем координат и размеры прямоугольного отверстия даны на рисунке 5.

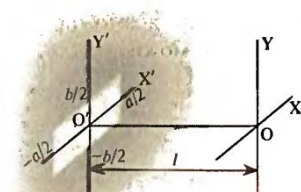


Рисунок 5. К расчету дифракции на прямоугольном отверстии.

Считая, что на отверстие падает плоская волна с амплитудой A_0 , полагаем в (13) $\psi = \frac{A_0}{(ab)}$

и записываем эту формулу в виде

$$A(x, y) = \left[\frac{A_0}{(ab)} \right] \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp \left[ik \times \frac{(x-x')^2}{2l} \right] dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp \left[ik \times \frac{(y-y')^2}{2l} \right] dy'.$$

Вычислим первый из перемножаемых интегралов:

$$Q = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp \left[\frac{ik(x-x')^2}{2l} \right] dx'.$$

Переходя к новой переменной интегрирования

$$\xi = (x-x')^2 \times \left[\frac{k}{\pi l} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad d\xi = -dx' \times \left[\frac{k}{\pi l} \right]^{\frac{1}{2}},$$

находим

$$Q = -\left(\frac{\pi l}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\left(x+\frac{a}{2} \right) \sqrt{\frac{k}{\pi l}}}^{\left(x-\frac{a}{2} \right) \sqrt{\frac{k}{\pi l}}} \exp \left(\frac{i\pi \xi^2}{2} \right) d\xi =$$

$$= \left(\frac{\pi l}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{\left(x+\frac{a}{2} \right) \sqrt{\frac{k}{\pi l}}} \exp \left(\frac{i\pi \xi^2}{2} \right) d\xi - \int_0^{\left(x-\frac{a}{2} \right) \sqrt{\frac{k}{\pi l}}} \exp \left(\frac{i\pi \xi^2}{2} \right) d\xi \right]. \quad (14)$$

Учитывая, что $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ и вводя обозначение $u = \left(x - \frac{a}{2} \right) \sqrt{\frac{k}{\pi l}}$ или

$u = \left(x + \frac{a}{2} \right) \sqrt{\frac{k}{\pi l}}$ из равенства (14) имеем

$$\int_0^u \exp \left(\frac{i\pi \xi^2}{2} \right) d\xi = \int_0^u \cos \left(\frac{i\pi \xi^2}{2} \right) d\xi + i \int_0^u \sin \left(\frac{i\pi \xi^2}{2} \right) d\xi. \quad (15)$$

В равенстве (15) обозначим

$$C(u) = \int_0^u \cos \left(\frac{i\pi \xi^2}{2} \right) d\xi, \quad S(u) = \int_0^u \sin \left(\frac{i\pi \xi^2}{2} \right) d\xi. \quad (16)$$

Называются интегралами Френеля и вычисляются численными методами. Имеются таблицы этих интегралов, которые графически представляются в виде спирали Корню (рис. 6).

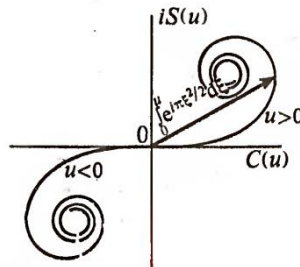


Рисунок 6. Построение спирали Корню с помощью интегралов Френеля.

А теперь интегралы Френеля связываем с сферическими функциями Бесселя. Тогда к равенству (16) сделаем подстановку и имеем

$$C_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt, \quad S_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt. \quad (17)$$

Известно что [1,2] равенству (11) имеем

$$C_2(u) = \frac{1}{2} \int_0^u J_{-\frac{1}{2}}(t) dt, \quad S_2(u) = \frac{1}{2} \int_0^u J_{\frac{1}{2}}(t) dt. \quad (18)$$

В свою очередь функции определяемые равенством (18) является решением уравнения Бесселя.

Результаты и обсуждения. В, этой работе построили математическую иллюстрацию дифракции ближней зоны. В итоге получили интегралы Френеля. Чтобы упростить изучение природы света в ближней зоне, эти интегралы связывали со сферическими функциями Бесселя

Выводы. Сферическими функциями Бесселя является решением уравнения Бесселя. В свою очередь решение уравнения Бесселя достаточно и хорошо изучены. Это гарантирует, что с помощью математического аппарата мы имеем возможность достаточно изучать природы света в ближней зоне.

Литературы

1. М. Абрамовица., И. Стиган(1979). Справочник по специальным функциям. – Москва. – С. 254-261.
2. Г. Н. Ватсон(1949). Теория бесселевых функций. – Москва. Часть 2.
3. Г.С. Ландсберг(1976) Оптика. – Москва. – С.150-168.
4. А. Н. Матвеев(1985). Оптика. – Москва. - С. 232-234.