

УДК 517.928

## ГАРМОНИКАЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН ДЕҢГЭЭЛ СЫЗЫКТАРЫНА МИСАЛДАР

*Нарымбетов Талантбек Канатбекович, улук окутуучу  
Медико-социалдык илим изилдөө институту,  
Жалал-Абад шаары, КР  
[talant83@mail.ru](mailto:talant83@mail.ru)*

**Аннотация.** Бул жумушта аналитикалык функциялар тарабынан жаратылган гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктарына мисалдар келтирилди. Аналитикалык функциялар нөлдөргө, полюстарга ээ болгон учурларда деңгээл сызыктардын өзгөчөлүктөрү көрсөтүлдү.

**Түйүн сөздөр.** Аналитикалык жана гармоникалык функциялар, деңгээл сызыктар, нөлдөр, полюстар.

## ПРИМЕРЫ ЛИНИИ УРОВНЕЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

*Нарымбетов Талантбек Канатбекович,  
старший преподаватель  
Научно-исследовательский медико-социальный институт,  
г. Жалал-Абад, КР  
[talant83@mail.ru](mailto:talant83@mail.ru)*

**Аннотация.** В данной работе приведены примеры линии уровня гармонических функций порождаемые аналитическими функциями. Показано особенность линии уровней при наличии у аналитических функций нулей и полюсов.

**Ключевые слова.** Аналитические и гармонические функции, линии уровня, нули, полюса.

## EXAMPLES OF LINE OF HARMONIC FUNCTIONS LEVELS

*Narymbetov Talantbek Kanatbekovich, senior lecturer  
Research medical and social institute,  
Jalal-Abad, KR  
[talant83@mail.ru](mailto:talant83@mail.ru)*

**Annotation.** This paper gives examples of the level line of harmonic functions generated by analytical functions. The feature of the level line is shown in the presence of zeros and poles in analytic functions.

**Keywords.** Analytical and harmonic functions, level lines, zeros, poles.

[1-3] жумуштар көрсөткөндөй, аналитикалык функциялуу сингулярдык козголгон тендемелердин чечимдерин асимптотикалык изилдөөдө аналитикалык функциялар тарабынан жаратылган гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктары өзгөчө маанилүү экендиги көрсөтүлгөн.

Бул жумушта айрым учурлардагы гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктарына мисалдарды карайбыз.

$C$  – комплекстик сандардын көптүгү,

$D \subset C$  жана  $D$  – бир байламталуу, чектелген, ачык область болсун.

$Q(D)$  –  $D$  областында аналитикалык болгон функциялардын мейкиндиги.

$t = t_1 + it_2$ ,  $t_1, t_2$  – чыныгы өзгөрмөлөр,  $i = \sqrt{-1}$ .

$A(t) \in Q(\mathcal{D})$  берилсин. Мындай шартта  $ReA(t)$ ,  $ImA(t)$  функциялар  $\mathcal{D}$  областында гармоникалык функциялар болушат.

Аныктама.  $(p) = \{t \in \mathcal{D}, ReA(t) = p - const\}$  көптүгүн  $ReA(t)$  функциянын  $\mathcal{D}$  областындагы деңгээл сызыгы деп атайлы.

$(q) = \{t \in \mathcal{D}, ImA(t) = q - const\}$  көптүк  $ImA(t)$  функциянын деңгээл сызыгы деп аталат.

$\forall t \in \mathcal{D}, A'(t) \neq 0$  шарт орун алса, анда  $ReA(t)$ ,  $ImA(t)$  функциялар  $\mathcal{D}$  областында бутактанбаган деңгээл сызыктарга ээ болушат [4-5].

$(p)$  жана  $(q)$  сызыктар кесилиш чекитинде ортогоналдуу жана  $\mathcal{D}$  областы мындай ортогоналдуу сызыктардын торчосу менен толук капталат [4-5].

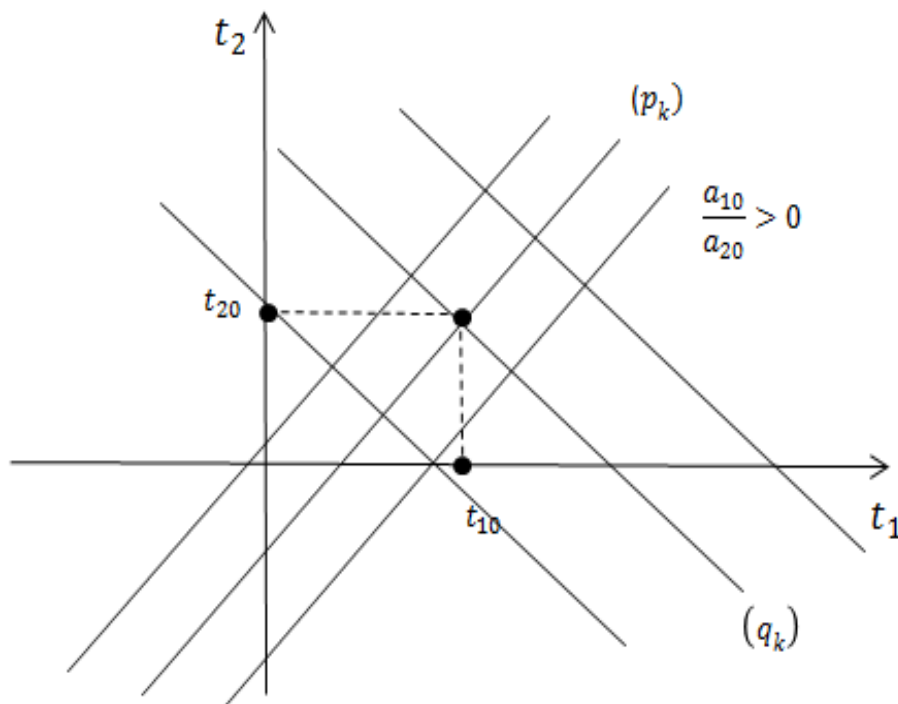
Төмөндө  $A(t)$  функциясы өзгөчөлүктөргө ээ болгон учурлардагы  $ReA(t)$ ,  $ImA(t)$  функциялардын деңгээл сызыктарына мисалдар келтирели.

1.  $A(t) = a_0(t - t_0)$ ,  $t_0, t \in \mathbb{C}$  берилсин.  $a_0 = a_{10} + ia_{20}$ , мында  $a_{10}, a_{20} \in \mathbb{R}$  жана  $a_{20} > 0$ .

$$ReA(t) = a_{10}(t_1 - t_{10}) - a_{20}(t_2 - t_{20}),$$

$$ImA(t) = a_{20}(t_1 - t_{10}) + a_{10}(t_2 - t_{20}).$$

$ReA(t)$ ,  $ImA(t)$  функциялардын деңгээл сызыктары Сүрөт 1а де келтирилди.



Сүрөт 1а. Бутактанбаган деңгээл сызыктар

2.  $A(t) = \ln t$ ,  $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Мындан

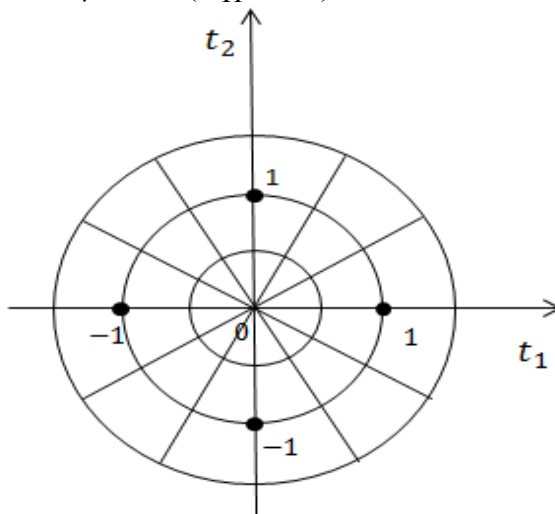
$$ReA(t) = \frac{1}{2} \ln(t_1^2 + t_2^2),$$

$$ImA(t) = \arg t + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

ээ болобуз.

$\frac{1}{2} \ln(t_1^2 + t_2^2) = p_k$  деп алсак, анда  $t_1^2 + t_2^2 = e^{2p_k}$  болот. Демек  $(p_k)$  деңгээл сызыктар борбору  $(0; 0)$  чекитинде радиусу  $r = \exp p_k$  болгон айланалар болушат, ал эми

$(q_k)$  деңгээл сызыктар  $(0; 0)$  чекитинен чыккан  $t_1$  огу менен  $tg\varphi = \frac{t_2}{t_1}$  болгон,  $\varphi$  бурчун түзгөн шоолалар болушат  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  (Сүрөт 1б).



Сүрөт 1б. Бутактанбаган деңгээл сызыктар

3.  $A(t) = t^2$ ,  $t \in \mathbb{C}$  берилсин.

Мындан

$$ReA(t) = t_1^2 - t_2^2, ImA(t) = 2t_1t_2.$$

$\{(p_k)\}$  деңгээл сызыктардын көптүгүн карайлы. Бул көптүктөн

$$(p_0) = \{t \in \mathbb{C}, t_1^2 - t_2^2 = 0\}$$

деңгээл сызыкты бөлүп алалы.

$(p_0)$  деңгээл сызык  $(0; 0)$  чекитинде бутактанат  $(t_1^2 - t_2^2 = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = 0)$  жана ар бир бутак  $t_1 - t_2 = 0, t_1 + t_2 = 0$  теңдемелер аркылуу аныкталат.

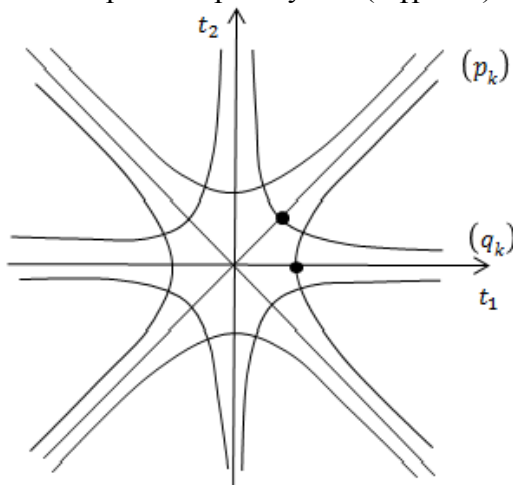
Калган  $(p_k)$  деңгээл сызыктар теңдемеси  $t_1^2 - t_2^2 = p_k$  болгон гиперболалар болушат.

$\{(q_k)\}$  деңгээл сызыктардын көптүгүнөн

$$(q_0) = \{t \in \mathbb{C}, 2t_1t_2 = 0\}$$

деңгээл сызыкты карай турган болсок, бул деңгээл сызык да  $(0; 0)$  чекитинде бутактанат.

Бутактар  $t_1$  жана  $t_2$  октору болушат. Ал эми  $\{(q_k)\}$  көптүгүнүн калган деңгээл сызыктары  $2t_1t_2 = q_k$  теңдеме аныктаган гиперболалар болушат (Сүрөт 2).



Сүрөт 2. Бутактануучу деңгээл сызыктар

$$4. A(t) = \ln \frac{t}{t_0}, t, t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

функцияны аныктайлы.

$$t = t_1 + it_2, t_0 = t_{10} + it_{20} \text{ деп алсак,}$$

$$A(t) = \ln \frac{t}{t_0} = \left| \ln \frac{t}{t_0} \right| + i \left( \arg \frac{t}{t_0} + 2m\pi \right), m \in \mathbb{Z}$$

ээ болобуз. Мындан

$$\operatorname{Re}A(t) = \ln \left| \frac{t}{t_0} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_{10}^2 + t_{20}^2},$$

$$\operatorname{Im}A(t) = \arg \frac{t}{t_0} + 2m\pi.$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_{10}^2 + t_{20}^2} = p_k \text{ деп алсак,}$$

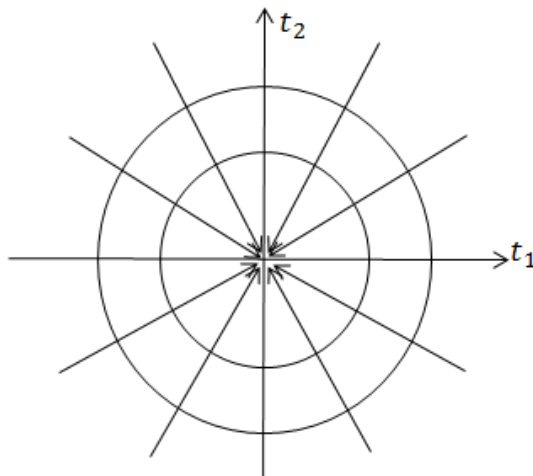
$$t_1^2 + t_2^2 = (t_{10}^2 + t_{20}^2) e^{2p_k} \text{ ээ болобуз.}$$

Демек  $(p_k)$  деңгээл сызыктар борбору  $(0; 0)$  чекити, радиусу

$$r = \sqrt{(t_{10}^2 + t_{20}^2) e^{2p_k}}$$

болгон айланалар болушат.

$\operatorname{Im}A_k(t) = q_k$  деңгээл сызыктар  $(0; 0)$  чекитине тирелген шоолалар болушат (сүрөт 2а).



Сүрөт 2а. Өзгөчө чекиттүү деңгээл сызыктар

$$5. A(t) = \frac{t+i}{t-i}, t \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \text{ болсун.}$$

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{t_1+i(t_2+1)}{t_1+i(t_2-1)} = \frac{(t_1+i(t_2+1))(t_1-i(t_2-1))}{t_1^2+(t_2-1)^2} = \\ &= \frac{t_1^2+(t_2^2-1)+it_1(t_2+1-t_2+1)}{t_1^2+(t_2-1)^2} = \frac{t_1^2+(t_2^2-1)+2it_1}{t_1^2+(t_2-1)^2} \end{aligned}$$

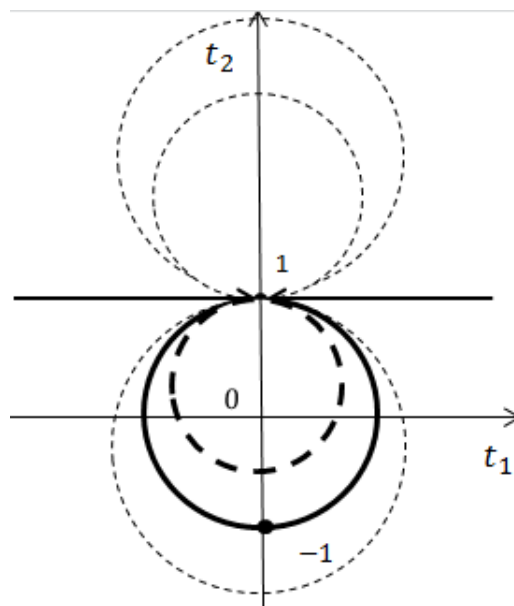
болгондуктан,

$$\operatorname{Re}A(t) = \frac{t_1^2+(t_2^2-1)}{t_1^2+(t_2-1)^2}$$

$$\operatorname{Im}A(t) = \frac{2t_1}{t_1^2+(t_2-1)^2}.$$

$\operatorname{Re}A(t) = 0$  деңгээл сызык борбору  $(0, 0)$ , радиусу  $r = 1$  болгон, бутактары  $(0, 1)$  чекитине тирелген айлана түспөл болот (сүрөт 3).

$\operatorname{Re}A(t) = 1$  деңгээл сызыгы  $(0, 1)$  чекитине тирелген  $t_2 = 1$  түз сызыктын бутактарынан турат (сүрөт 3).



Сүрөт 3. Нөл жана полюс болгон учурдагы деңгээл сызыктар  $p \neq 0$  жана  $p \neq 1$  болгон учурларды карайлы.

$$\frac{t_1^2 + (t_2 - 1)^2}{t_1^2 + (t_2 - 1)^2} = p$$

болсун. Мындан

$$t_1^2 + \left(t_2 - \frac{p}{p-1}\right)^2 = \frac{1}{(p-1)^2}$$

теңдемеге ээ болобуз. Демек каралып жаткан учурларда деңгээл сызыктар борбору  $\left(0, \frac{p}{p-1}\right)$  чекитинде, ал эми радиусу  $\frac{1}{|p-1|}$ , бутактары  $(0, 1)$  чекитине тирелген айланалар түспөлдө болушат.

#### Адабияттар:

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001. – С. 190-200.
2. Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б. Метод погранслойных линий построения регулярных и сингулярных областей для линейных сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями. XLVII междунар. науч.-практ. конф. № 10(45). – Новосибирск: СибАК, 2016. – С. 59-66. ISSN 2309-3560
3. Алыбаев К.С., Мурзабаева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения с аналитическими функциями теряющие единственность при вырождении // Итоги науки в теории и практике 2017: сб. научных трудов Евразийского Научного Объединения по материалам XXXIV международной научной конференции. № 12 (34). Москва, 2017. – С. 15-20.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит. 1973. С.749
5. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. – 366 с.