УДК 517.928

ГАРМОНИКАЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН ДЕҢГЭЭЛИН СЫЗЫКТАРЫН КОЛДОНУУ АРКЫЛУУ КОМПЛЕКСТИК ТЕГИЗДИКТЕ ОБЛАСТТАРДЫ ТҮЗҮҮ

Нарымбетов Талантбек Канатбекович, улук окутуучу
Медико-социалдык илим изилдөө институту, Жалал-Абад шаары, КР
talant83@mail.ru

Аннотация: *Аналитикалык функциялуу сингулярдык козголгон теңдемелерди изилдөөдө негизги проблемалардын бири болуп, сингулярдык козголгон теңдеменин чечиминин козголбогон теңдеменин чечимине тартылуу областынын жашашын далилдөө эсептелет. Бул жумушта гармоникалык функциялардын дэңгээл сызыктарын колдонуу аркылуу областтарды түзүүнүн методу иштелип чыгылды. Метод тартылуу областтардын жашашын далилдөөдө колдонулушу мүмкүн.*

Түйүндүү сөздөр. *Сингулярдык козголуу, козголбогон теңдемелер, тартылуу областы аналитикалык жана гармоникалык функция, деңгээл сызыктар.*

ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИМЕНЕНИЕМ ЛИНИИ УРОВНЕЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Нарымбетов Талантбек Канатбекович, старший преподаватель
Научно-исследовательский медико-социальный институт, г. Жалал-Абад, КР
talant83@mail.ru

Аннотация: *При исследовании сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями одним из основных проблем является доказательство существования области притяжения решения сингулярно возмущенного уравнения к решению невозмущенного уравнения. В данной работе с применением линии уровней гармонических функций разработан метод построения областей. Метод может быть использован для доказательства существования областей притяжений.*

Ключевые слова. *Сингулярное возмущение, невозмущенные уровнения, область притяжения аналитическая и гармоническая функция, линии уровня.*

CONSTRUCTION OF AREAS IN THE INTEGRATED APPLICATION OF A LINE OF LEVELS OF HARMONIC FUNCTIONS

Narymbetov Talantbek Kanatbekovich, senior lecturer
Research medical and social institute, Jalal-Abad, KR
talant83@mail.ru

Abstract: *In the study of singularly perturbed equations with analytic functions, one of the main problems is to prove the existence of the domain of attraction of the solution of the singularly perturbed equation to the solution of the unperturbed equation. In this work, using the line of levels of harmonic functions, a method for constructing regions is developed. The method can be used to prove the existence of areas of attraction.*

Keywords. *Singular perturbation, unperturbed equations, gravity analytic and harmonic function, level lines.*

Маселенин коюлушу

$$\varepsilon x_k'\,(t,\varepsilon) = f_k\,(t, x_1(t,\varepsilon), \dots, x_n(t,\varepsilon)), k = 1, \dots n, \tag{1}$$

мында $0 < \varepsilon$ – кичине чыныгы параметр; $t \epsilon \mathcal{D} \subset C$ – комплекстик сандардын көптүгү, $\mathcal{D}$ – бир байламталуу, ачык, чектелген область; сингулярдык козголгон теңдемелердин системасы берилсин. $\varepsilon = 0$ болгондо (1) системага тиешелеш болгон

$$f_k\big(t,\xi_1(t),\dots,\xi_n(t)\big)=0, k=1,\dots,n, \qquad (2)$$

козголбогон системага ээ болобуз.

(3) система

$$\xi^j(t)=colon\left(\xi_{1j}(t),\dots\xi_{nj}(t)\right), j=1,\dots m$$

чечимдерге ээ болсун.

Аныктама. $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}$ областы жана бул областта аныкталган (1) системанын

$$x^j(t_0,\varepsilon)=x_0^j=colon\,(x_{1j},\dots,x_{nj})$$

баштапкы шартты канааттандырган

$$x^j(t,\varepsilon)=colon\,(x_{1j}^0,\dots,x_{nj}^0)$$

чечими жашап жана $\forall t\epsilon\mathcal{D}_0\ (x^j(t,\varepsilon)\longrightarrow\xi^j(t))$ болсо, анда $\mathcal{D}_0$ областы $x^j(t,\varepsilon)$ чечимдин $\xi^j(t)$ чечимге тартылуу областы деп аталат.

Аныктамага ылайык тартылуу областтын жашашын далилдөө негизги маселелерден болуп эсептелет.

Тартылуу областтардын жашашын далилдөө үчүн (1) системадан аныкталган кандайдыр бир аналитикалык функциялар аркылуу пайда болгон гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктарын колдонуу менен комплекстик тегиздикте областтарды түзүү максатка ылайык болоору [1-3] изилдөөлөрдө айрым жекече учурлар үчүн көрсөтүлгөн. Бул баяндоодо жалпы учур үчүн областтарды түзүү мүмкүнчүлүктөрүн карайбыз.

Областтарды түзүү

$a_r(t)(r=1,\dots,n_0)$ комплекстик өзгөрмөлүү функциялардын системасы берилсин.

Төмөнкү шарттар аткарылсын:

Ш 1. $a_r(t)\epsilon Q(\mathcal{D})$ $-\mathcal{D}$ областында аналитикалык болгон функциялардын мейкиндиги.

Ш 2. $\forall t\epsilon\mathcal{D}$ ($\mathfrak{J}m a_r(t)>0$)

$A_r(t)=\int_{t_0}^{t}\alpha_r(\tau)d\tau$, мында $t_0\,\epsilon\mathcal{D}$ функцияны аныктайлы.

Ш 2. ылайык $A_r(t)$ функциялар $\mathcal{D}$ областынын t_0чекитинде жөнөкөй нөлгө ээ болот жана бул функциянын эселүү нөлдөрү жашабайт.

$A_r(t)$ функцияны бекемделген r үчүн карайлы.

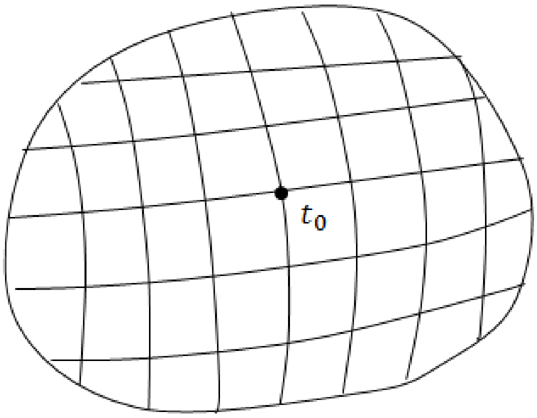
$ReA_r(t)$, $\mathfrak{J}mA_r(t)$ функцияларды аныктайлы.

Аныктама. $(p)=\{t\in\mathcal{D}, ReA_r(t)=p-const\}\}$ көптүктү $ReA_r(t)$ функциясынын деңгээл сызыгы деп атайлы.

$\mathfrak{J}mA_r(t)$ функциянын деңгээл сызыгы ушундай эле аныкталат:

$$(q)=\{t\in\mathcal{D},\mathfrak{J}mA_r(t)=q-const\}$$

Ш 1. ылайык $ReA_r(t)$, $\mathfrak{J}mA_r(t)$ функциялар гармоникалык болушат жана $\{(p)\}$ көптүгүнөн алынган каалаган деңгээл сызык $\{(q)\}$ көптүгүнөн алынган каалаган деңгээл сызык менен бир гана чекитте кесилишет. Демек $\mathcal{D}$ областы $\{(p)\}$ жана $\{(q)\}$ деңгээл сызыктардан пайда болгон торчолор менен толук капталат (сүрөт 1) [4].

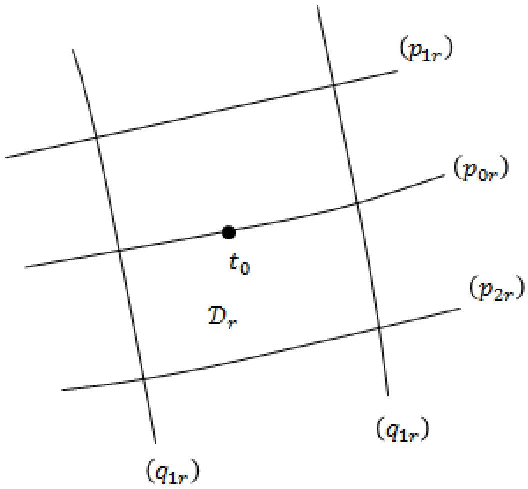


Сүрөт 1. $\mathcal{D}$ областынын торчолор аркылуу каптоо

t_0 чекитин камтыган торчону алалы. Аны $\mathcal{D}_r$ аркылуу белгилейли. $\mathcal{D}$ ачык область болгондуктан, мындай торчо ар дайым жашайт. t_0 чекити аркылуу өткөн $\{(p)\}$ көптүгүнүн деңгээл сызыгын (p_{0r}) аркылуу белгилейли.

$$(p_{or}) = \{t \in \mathcal{D}, ReA_r\ (t) = 0\}.$$

$\mathcal{D}_r$ торчо каптал жактарынан (p_{1r}), (p_{2r}), (q_{1r}), (q_{2r}) деңгээл сызыктары менен чектелсин (сүрөт 2).



Сүрөт 2. $\mathcal{D}_r$ торчонун чектери.

(p_{or}) деңгээл сызыгы $\mathcal{D}_r$ торчону $\mathcal{D}_{r1}$, $\mathcal{D}_{r2}$ бөлүктөргө бөлөт.

(p_{or})дөн $\mathcal{D}_r$ торчого таандык болгон $\tilde{t}$ чекитти алалы жана бул чекит аркылуу $\tilde{q}$ деңгээл сызыкты жүргүзөлү. $ReA_r\ (t)$ функцияны $(\tilde{q})$ сызыкта карайлы.

$t_0 \epsilon (p_{or}) \Longrightarrow ReA_r\ (t) = 0$ жана $\tilde{q}$ сызыгын бойлото $ReA_r\ (t)$ өтө монотондуу болгондуктан [5],

$$\forall t \epsilon \mathcal{D}_{r1}\ (ReA_r\ (t) < 0) \vee \forall t \epsilon \mathcal{D}_{r1} (ReA_r\ (t) > 0)$$

катыштардын бири гана орун алат.

Эгерде Ш 2. эске албасак, анда бул катыштар өз ара артыкчылыкка ээ болбойт.

$\tilde{t} = \tilde{t}_1 + \tilde{t}_2$ чекитинен

$$(\tilde{s})\ = \{t \epsilon \mathcal{D}, t_1 = \tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \leq t_2 + \infty\},$$

түз сызык жүргүзөлү.

Ш 2. ылайык $(\tilde{s})$ түз сызыгын бойлото $\mathrm{R}e\ \mathrm{A_r}(\mathrm{t})$ функция келүүчү болот. Чындыгында

$$\frac{\partial Re\ \ A_r(t)}{\partial t_2} = -\,\mathfrak{I}mA_r\ (t) < 0$$

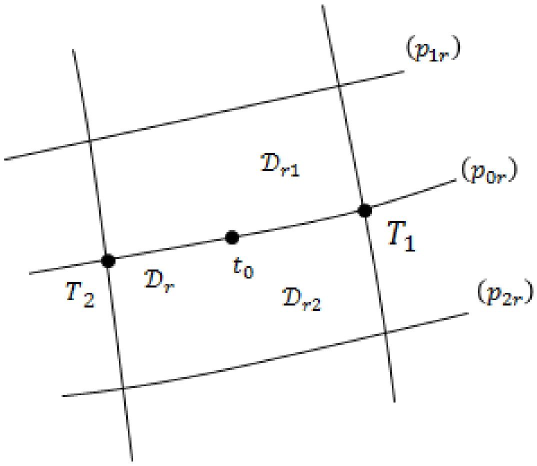
Демек $\forall t \epsilon \mathcal{D}_{r1}$ $(ReA_r(t) \leq 0)$ катыш орун алат.
Анда $\forall t \epsilon \mathcal{D}_{r2}$ $((ReA_r(t) \geq 0)$. Барабардык белги (p_{or}) сызыгынын $\mathcal{D}_r$ ге таандык бөлүгүндө гана аткарылат.

$\mathcal{D}_r$ торчосун аныктоодо (q_1), (q_2) сызыктары колдонулду. Кийинки түзүүлөргө ыңгайлуу болуш үчүн $\mathcal{D}_r$ торчосун кайрадан аныктайлы.
(p_{or}) сызыгынан $T_1 = T_{12} + i\,T_{12}$, $T_2 = T_{21} + i\,T_{22}$ чекиттерди алалы, жана бул чекиттер аркылуу

$$(s_1) = \{t\epsilon\mathcal{D}, t_1 = T_{11}, T_{12} \leq t_2 < +\infty\},$$
$$(s_2) = \{t\epsilon\mathcal{D}, t_1 = T_{21}, T_{22} \leq t_2 < +\infty\},$$

түз сызыктарды жүргүзөлү.

(p_1), (p_2), (s_1), (s_2), сызыктар менен чектелген торчону кайрадан эле $\mathcal{D}_r$ деп белгилейли. (сүрөт 3).



Сүрөт 3. $\mathcal{D}_r$ торчону жаңыча аныктоо

Мурдагы белгилөөлөрдү эске алсак $\forall t \epsilon \mathcal{D}_{r1}$ $(ReA_r(t) \leq 0)$, $\forall t \epsilon \mathcal{D}_{r2}$ $((Re\ \ A_r(t) \geq 0)$.
$\mathcal{D}_r$ торчосун аныктоодо r ди бекемделген деп эсептедик. Эгерде $r = 1, \dots, n_0$ маанилерди кабыл алса, n_0 сандагы $\mathcal{D}_r$ областына ээ болобуз.

Бизди $\forall t \epsilon \mathcal{D}_{r1}(ReA_r(t) \leq 0)$ катыш орун алган бөлүкчөлөр гана кызыктырат.

$\mathcal{D}_{r1}(\ r = 1, \dots n_0)$ бөлүкчөлөрдүн жалпы бөлүгү жашайбы?

$\mathcal{D}_{r1}$ бөлүкчөнү карай турган болсок, анын каптал чектери (s_1), (s_2) түз сызыктардын бөлүктөрүнөн турат. $\mathcal{D}_{r1}$ бөлүкчөнү жогор жагынан чектеген (p_{12}) эске албай койсо да болот (Ш 2 боюнча), $\mathcal{D}_{r1}(\ \mathrm{r} = 1, \dots n_0)$ бөлүкчөлөрдү бирдикте карасак, алардын каптал чектери жалпы учурда (s_1), (s_2) түз сызыктардын бөлүктөрүнөн турат деп алалы б.а. баардык $\mathcal{D}_{r1}$ бөлүкчөлөрдүн каптал чектери бирдей. Каптал чектер эрктүү болгондуктан, бул шарт аткарылат.

Коюлган суроого кайрылалы.

Ш 1, Ш 2 лер боюнча бул маселени чечүү мүмкүн эмес болгондуктан төмөндөгүдөй шарт коелу:

Ш 3. (p_{0r}) сызыктар $\mathcal{D}$ областында t_0 чекитинен башка жалпы чекиттерге ээ болбосун.

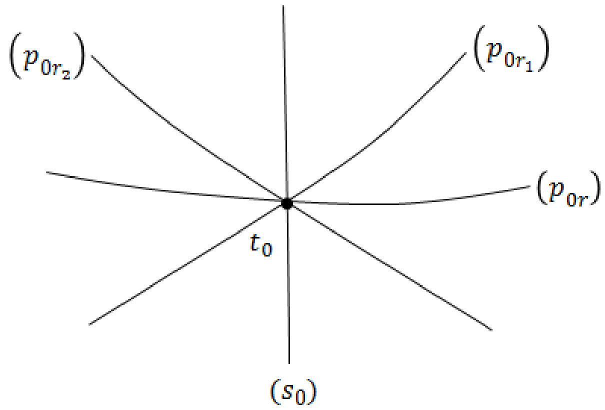
Ш 3 кө ылайык $\{(p_{0r})\}$ көптүгүнүн каалаган экөөсү $\mathcal{D}$ областында t_0 чекитинен башка жалпы чекитке ээ болбойт.

Бул шарт $\{(p_{0r})\}$ көптүгүнүн элементтерин жайгашуусу боюнча иреттейт. t_0 чекити аркылуу

$$(s_0) = t\epsilon\mathcal{D}, t = t_{10}, t_{20} \leq t_2 < +\infty\}$$

түз сызыгын жүргүзөлү.

Ш 2, Ш 3 кө ылайык $\{(p_{0r})\}$ көптүгүнүн каалаган (p_{0r}) сызыгынын бутактары (s_0) сызыгы бөлгөн бөлүктөрдө жатат (сүрөт 4).



Сүрөт 4. (p_{0r}) сызыктардын бутактарынын жайгашуусу

(s_0) сызыктын оң жагындагы бөлүктүн жогору жагында p_{0r_1} сызыктын бутагы, сол жак бөлүктүн жогору жагында p_{0r_2} сызыктын бутагы жайгашсын. Бул бутактар менен чектелген бөлүктү $\mathcal{D}_0$ деп белгилейли.

Ш 2 ылайык $\forall t\epsilon\mathcal{D}_0$ $(ReA_r(t) \leq 0, r = 1, \ldots, n_0)$ аткарылат. Барабардык $r = r_1, r = r_2$ учурда гана орун алат, башкача айтканда $\bigcap_{r_1} \mathcal{D}_{r_1} = \mathcal{D}_0$.

Жыйынтык

Бул макалада бир нече аналитикалык функциялар жана алар жараткан гармоникалык функциялар каралды. Алгач бир гана гармоникалык функциянын деңгээл сызыктарын колдонуу менен комплекстик тегиздикте область аныкталды. Бардык гармоникалык функциялар бирдикте каралып, ар бир гармоникалык функция тарабынан аныкталган областтардын жалпы бөлүгүнүн жашашы көрсөтүлдү. Жүргүзүлгөн изилдөөлөр сингулярдык козголгон ананлитикалык функциялуу теңдемелердин чечимдеринин козголбогон теңдеменин чечимдерине тартылуу областарынын жашашын далилдөөдө колдонулат.

Адабияттар:

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости //Вестник КГНУ. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001. – С. 190-200.
2. Алыбаев К.С, Тампагаров К.Б. Метод погранслойных линий построения регулярных и сингулярных областей для линейных сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями. XLVII междунар. науч.-практ. конф. № 10(45). – Новосибирск: СибАК, 2016. – С. 59-66. ISSN 2309-3560
3. Алыбаев К.С., Мурзабаева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения с аналитическими функциями теряющие единственность при вырождении // Итоги науки в теории и практике 2017: сб. научных трудов Евразийского Научного Объединения по материалам XXXIV международной научной конференции. № 12 (34). Москва, 2017. – С. 15-2**0.**
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит. 1973. С.749
5. Федорюк М.*В*. Метод перевала. М.*:* Наука, 1977. - 366 с.