УДК 517.968.73

АНАЛИТИКАЛЫК ФУНКЦИЯЛУУ СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИН ИЗИЛДӨӨДӨ ГАРМОНИКАЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН ДЕҢГЭЭЛ СЫЗЫКТАРЫНЫН КОЛДОНУЛУШУ

Эрматали уулу Баяман, Ибрагим кызы Асел,
Анарбеков А. – магистранттар,
Б.Осмонов атындагы ЖАМУ., Кыргызстан,
Жалал-Абад ш., Ленин к. 57
E-mail:Ermatalievbayaman@gmail.com

Аннотация: *Бул жумушта ашуу чекитине ээ болгон сызыктуу сингулярдык козголгон сызыктуу теңдеменин чечиминин асимптотикалык өзгөрүшү комплекстик тегиздикте изилденди. Изилдөө үчүн гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктары колдонулду. Деңгээл сызыктардын жардамында тегизидик бир нече бөлүктөргө бөлүнүп, ар бир бөлүктө чечимдин асимптотикалык өзгөрүшү изилденди.*

Ачкыч сөздөр: *сингулярдык козголуу, козголбогон теңдеме, пределге өтүү, гармоникалык функция, деңгээл сызыктар, асимптотика.*

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНИЙ УРОВНЕЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЩМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Эрматали уулу Баяман,
Ибрагим кызы Асел,
Анарбеков А. – магистранты,
ЖАГУ им. Б.Осмонова, Кыргызстан,
г.Джалал-Абад, ул. Ленина 57.
E-mail: Ermatalievbayaman@gmail.com

Аннотация: *В данной работе исследовано асимптотические поведение решений сингулярно возмущенное уравнение с точкой перевала. Исследование проведено с применением линии уровня гармонических функций. Линиями уровней плоскость разделена на несколько частей и в каждой части исследована асимптотическое поведение решения.*

Ключевые слова: *сингулярное возмущение, невозмущенное уравнение, гармонические функции, линии уровня, асимптотика.*

APPLICATION OF LEVEL LINES OF HARMONIC FUNCTIONS IN THE STUDY OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED LINEAR EQUATIONS WITH ANALYTIC FUNCTIONS

Ermatali uulu Bayaman, Ibrahim kyzy Asel,
Anarbekov A. – master students
JASU named after B.Osmonov, Kyrgyzstan,
city Jalal-Abad, Lenin street 57.
E-mail: Ermatalievbayaman@gmail.com

Abstract: *In this paper, the asymptotic behavior of solutions of a singularly perturbed equation with a pass point is investigated. The study was carried out using the harmonic function level line. The plane is divided into several parts by lines of levels and the asymptotic behavior of the solution is investigated in each part.*

Key words: *singular perturbation, unperturbed equation, harmonic functions, level lines, asymptotics.*

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\varphi(t) \qquad (1)$$

теңдеме

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0 \qquad (2)$$

баштапкы шарты менен берилсин.
(1)-(2) көрүнүштөгү маселе айрым учурларда $[1-2]$ эмгектерде каралган.
(1) теңдемеде $a(t) = t - b$, мында $b \in c$. $\mathrm{D} = \{t \in C, |t-b| < r\}$ болсун.

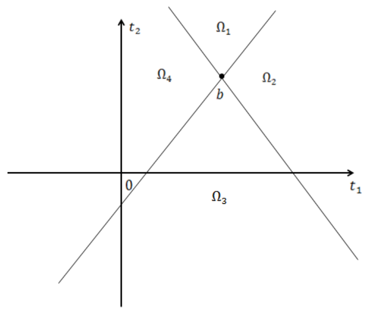
Төмөнкү шарт аткарылсын:
(1) де ε=0 деп алуу менен

$$(t+b)\xi(t) = 0$$

козголбогон теңдемеге ээ болобуз.
Бул теңдеме $\xi(t) \equiv 0$ чечимге ээ.

Маселе. $\lim_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = 0$ катыш орун алган област жашайбы? Мында $x(t,\varepsilon)$-(1)-(2) маселенин чечими.
Коюлган маселени чечүү үчүн (1)-(2) маселени төмөндөгүдөй теңдеме менен алмаштырабыз $x(t,\varepsilon) = x^0 exp\frac{(t-b)^2-(t_0-b)^2}{2\varepsilon} + \int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)exp\frac{(t-b)^2-(\tau-b)^2}{2\varepsilon}d\tau.$ (3)

$t_0 = b$ деп эсептейли.
$F(t) = (t-b)^2$ функцияны карайлы. $b = b_1 + ib_2$, мында $b_1, b_2 \in R^+$ болсун, $R^+ = (0; +\infty)$ $t = t_1 + it_2$ деп алалы жана $ReF(t) = (t_1-b_1)^2 - (t_2-b_2)^2$ функцияны аныктайлы. (3) теңдеменин чечимин изилдөө үчүн $ReF(t)$ функциянын деңгээл сызыктарын колдонобуз.
$(p_0) = \{t \in C, ReF(t) = 0\}$ деңгээл сызыкты карайлы. Бул деңгээл сызык $t = b$ чекитинде бутактанат жана бутактар C тегиздигин төрт бөлүккө бөлөт $[3-4]$ (сүрөт 1).



Сүрөт 1. C тегиздигинин бөлүнүшү.

Бөлүктөрдү Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 деп белгилейли. $t_1 - b_1 - t_2 + b_2 = 0$ жана $t_1 - b_1 + t_2 - b_2 = 0$ теңдемелер аркылуу бутактар аныкталат. $ReF(t)$ функциясынын $\Omega_j (j = 1, \dots, 4)$ бөлүктөрдөгү белгилерин аныктайлы.

$\forall t \in \Omega_1 \cup \Omega_3 (ReF(t) \le 0), \forall t \in \Omega_2 \cup \Omega_4 (ReF(t) \ge 0)$

катыштар орун алат. Барабардык белгилер (p_0) сызыгында гана орун алат.

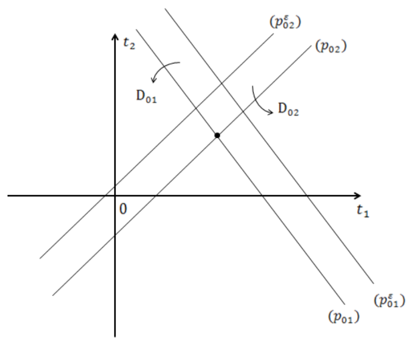
1. $t \in \Omega_1$ учурду карайлы. (3) функциядагы интеграл үчүн интегралдоонун жолун тандайлы. Интегралдоонун жолу $t_1 - b_1 - t_2 + b_2 = 0$ түз сызыктын b жана $\tilde{t} = \tilde{t}_1 + i\tilde{t}_2$ чекиттерди туташтыруучу жана $t_1 - b_1 + t_2 - b_2 = q$ $(q > 0)$ түз сызыктын $\tilde{t}$, t чекиттерин туташтыруучу бөлүктөрүнөн турат.

$$(p_{01}^{\varepsilon}) = \{t \in C, t_1 - b_1 + t_2 - b_2 = -\varepsilon ln\varepsilon\},$$
$$(p_{02}^{\varepsilon}) = \{t \in C, t_1 - b_1 - t_2 + b_2 = \varepsilon ln\varepsilon\}$$

сызыктарды карайлы.

$$(p_{01}) = \{t \in C, t_1 - b_1 + t_2 - b_2 = 0\},$$
$$(p_{02}) = \{t \in C, t_1 - b_1 - t_2 + b_2 = 0\}$$

белгилөөлөрдү киргизели.
(p_{01}) жана (p_{01}^{ε}) сызыктары менен чектелип Ω_1 ге таандык болгон областы Ω_{10}; (p_{02}), (p_{02}^{ε}) сызыктары аркылуу чектелип Ω_1 де жаткан областы Ω_{20} аркылуу белгилейли (сүрөт 2).



Сүрөт 2. D_{01}, D_{02} областтар

$D_0 = D \setminus (D_{01} \cup D_{02}),\ (D_{01} \cup D_{02}) = D_\varepsilon$ болсун.

(3) функцияны $D_\varepsilon, D_{01}, D_{02}, D_0$ областарда жана $(p_{01}), (p_{02})$ сызыктарда карайлы.

1.1 $t \in (p_{01})$ болсун. (3) барабардыктан төмөндөгүгө ээ болобуз

$$x(t,\varepsilon) = x^0 exp\frac{i(t_1-b_1)(t_2-b_2)}{\varepsilon} +$$

$$+\int_{b_2}^{t_2}\varphi(\tau)exp\frac{i(t_1-b_1)(t_2-b_2)-i(\tau_1-b_1)(\tau_2-b_2)}{\varepsilon}(1+i)d\tau_2, \qquad (4)$$

мында $t_1 = t_2 + b_1 - b_2,\ \tau_1 = \tau_2 + b_1 - b_2$.

(4) функциянын интегралын карайлы.

(p_{01}) жана (p_{02}^{ε}) сызыктардын кесилиш чекитин табалы:

$$t_1 - b_1 + t_2 - b_2 = t_1 - b_1 - t_2 + b_2 - \varepsilon ln\varepsilon.$$

Мындан

$$t_2 = b_2 - \frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon.$$

Бул табылган маанини (p_{01}) сызыктын теңдемесине койсок

$$t_1 = b_1 + \frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon.$$

Демек кесилиш чекит

$$\left(b_1 + \frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon, b_2 - \frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon\right).$$

Алгач интегралды $b_2 \le t_2 < b_2 - \frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon$ аралыкта карайлы.

Бул учурда

$$|J_0(t,\varepsilon)| \le M_1\int_{b_2}^{t_2} d\tau_2 = |x^0| + M_1(t_2 - b_2) = M_1(-\varepsilon ln\varepsilon).$$

Демек $b_2 \le t_2 < b_2 - \frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon$ аралыкта

$$|x(t,\varepsilon)| \le |x^0| + M_1(-\varepsilon ln\varepsilon).$$

$(t_1, t_2) \in D$ жана $b_2 - \frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon < t_2$ болсун.

$$J_0(t,\varepsilon) = \int_{b_2}^{t_2}\varphi(\tau)exp\frac{i(t_1-b_1)(t_2-b_2)-i(\tau_1-b_1)(\tau_2-b_2)}{\varepsilon}(1+i)d\tau_2 =$$

$$= \int_{b_2}^{b_2-\frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon}\varphi(\tau)exp\frac{i(t_1-b_1)(t_2-b_2)-i(\tau_1-b_1)(\tau_2-b_2)}{\varepsilon}(1+i)d\tau_2 +$$

$$+\int_{b_2-\frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon}^{t_2}\varphi(\tau)exp\frac{i(t_1-b_1)(t_2-b_2)-i(\tau_1-b_1)(\tau_2-b_2)}{\varepsilon}(1+i)d\tau_2.$$

$J_0(t,\varepsilon)$ интегралы үчүн алынган барабардыктагы биринчи интеграл $O(-\varepsilon ln\varepsilon)$ тартипте. Экинчи интегралга бөлүктөп интегралдоо методун колдонолу.

$$J_{02} = \int_{b_2-\frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon}^{t_2}(1+i)\left(\frac{i\varepsilon}{2(\tau_2-b_2)}\varphi(\tau)\right)d exp\frac{i(t_1-b_1)(t_2-b_2)-i(\tau_2-b_2)^2}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{i(1+i)\varepsilon}{2(\tau_2-b_2)}\cdot\varphi(\tau)\Big|_{b_2-\frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon}^{t_2} - i(1+i)\varepsilon\int_{b_2-\frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon}^{t_2}\left(\frac{\varphi(\tau)}{\tau_2-b_2}\right)'\times$$

$$\times exp\frac{i(t_2-b_2)^2-i(\tau_2-b_2)^2}{\varepsilon}d\tau_2 =$$

$$=\frac{i(1+i)\varepsilon}{2(\tau_2-b_2)}\cdot\varphi\big((1+i)t_2+b_1-b_2\big)-\frac{i(1+i)\varepsilon}{\varepsilon ln\varepsilon}\cdot\varphi\big((1+i)\tau_2+b_1-b_2\big)-$$

$$-i(1+i)\varepsilon\int_{b_2-\frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon}^{t_2}\frac{\varphi'(\tau)(\tau_2-b_2)(1+i)-\varphi(\tau)}{(\tau_2-b_2)^2}\times\times\, exp\frac{i(t_2-b_2)^2-i(\tau_2-b_2)^2}{\varepsilon}d\tau_2.$$

Алынган барабардыкта модулга көчсөк

$$|J_{02}|\le \mathrm{M}_2\varepsilon\left[\frac{1}{t_2-b_2}-\frac{1}{\varepsilon ln\varepsilon}\right]+\mathrm{M}_3\varepsilon\int_{b_2-\frac{1}{2}\varepsilon ln\varepsilon}^{t_2}\frac{1}{(\tau_2-b_2)^2}d\tau_2 =$$

$$=\mathrm{M}_2\left(\frac{\varepsilon}{t_2-b_2}-\frac{1}{ln\varepsilon}\right)+\mathrm{M}_3\varepsilon\left(-\frac{1}{t_2-b_2}+\frac{2}{ln\varepsilon}\right)\le \mathrm{M}_4\frac{\varepsilon}{t_2-b_2}.$$

Демек $b_2<t_2$ маанилер үчүн $|J_0(t,\varepsilon)|\le \mathrm{M}_5(-\varepsilon ln\varepsilon)$. Алынган баалоолорду эске алсак $t\in(p_{01})$ үчүн $|x(t,\varepsilon)|\le \mathrm{M}_6$ жана $\lim_{\varepsilon\to 0}x(t,\varepsilon)$ жашабайт.

1.2. $t\in(p_{02})$ сызык учур 1.1 учурдагыдай эле далилденет.

1.3. $t\in \mathrm{D}_\varepsilon$ болсун интегралдоонун жолдорун эске алуу менен (3) дөн төмөндөгүнү алабыз.

$$x(t,\varepsilon)=x^0exp\frac{(t-b)^2}{2\varepsilon}-\int_{b_2}^{\tilde t_2}\varphi(\tau)exp\frac{(t-b)^2-i(\tau_2-b_2)^2}{2\varepsilon}(1+i)d\tau_2+$$

$$+\int_{\tilde t_2}^{t^2}\varphi(\tau)exp\frac{(t-b)^2-i(\tau_2-b_2)^2}{2\varepsilon}(i-1)d\tau_2. \qquad (5)$$

(5) туюнтмада

$$t=t_1+it_2=(i-1)t_2+b_1+b_2+q,$$

$$\tau=(i-1)\tau_2+b_1+b_2+q$$

(5) де модулга көчсөк

$$|x(t,\varepsilon)|\le|x^0|+\mathrm{M}_6[(\tilde t_2-b_2)+\mathrm{M}_7(t_2-\tilde t_2)]\le|x^0|+\mathrm{M}_7(-\varepsilon ln\varepsilon).$$

Натыйжада $t\in \mathrm{D}_\varepsilon$ үчүн

$$|x(t,\varepsilon)|\le|x^0|-\mathrm{M}_8(\varepsilon ln\varepsilon)$$

баалоо туура болот.

1.4. $t\in \mathrm{D}_{01}\cup \mathrm{D}_{02}$ учур үчүн да 1.3 учурдагыдай эле баалоо туура болот.

1.5. $t\in \mathrm{D}_0$. Бул учурда, интегралдоонун жолун эске алуу менен (5) алабыз, бирок $ReF(t)=Re(t-b)^2\le O(\varepsilon ln\varepsilon)$ болгондуктан (ε→0) да

$$|x^0|exp\frac{ReF(t)}{\varepsilon}\to 0,$$

$$\left|\int_{b_2}^{\tilde t_2}\varphi(\tau)exp\frac{(t-b)^2-i(\tau_2-b_2)^2}{2\varepsilon}d\tau_2\right|\to 0,$$

$$\left|\int_{\tilde t_2}^{t^2}\varphi(\tau)exp\frac{(t-b)^2-i(\tau-b)^2}{2\varepsilon}(i-1)d\tau_2\right|\to 0.$$

Жыйынтык: Коюлган маселенин чечими D_0 областы болот.

$t\in \mathrm{D}_3$ учур 1 учурдагыдан орчундуу өзгөчөлүксүз эле изилденет. Бул учурда да $\mathrm{D}_0\subset \mathrm{D}_3$ областы жашап, бул областа $\lim_{\varepsilon\to 0}x(t,\varepsilon)=0$ катыш орун алат.

3. $t\in \mathrm{D}_2\cup \mathrm{D}_4$ болсун.

$$|x(t,\varepsilon)|\ge exp\frac{Re(t-b)^2}{2\varepsilon}\left[|x^0|-\int_{t_0}^{t}|\varphi(\tau)|exp\frac{-Re(\tau-b)^2}{2\varepsilon}|d\tau|\right]$$

ээ болобуз.

$t\in \mathrm{D}_2\cup \mathrm{D}_4$ үчүн $Re(t-b)^2>0$ болгондуктан (мында t өзгөрмө $\mathrm{D}_2\cup \mathrm{D}_4$ областарынын чек аралары болгон (p_{01}), (p_{02}) сызыктардан алысыраак жайгашкан деп эсептейбиз)

$exp\frac{Re(t-b)^2}{2\varepsilon}\to+\infty$ $(\varepsilon\to 0\ да)$, ал эми [...] кашанын ичиндеги интеграл $O(\varepsilon)$ тартипте болот. Мындай болгондо

$$|x(t,\varepsilon)|\to+\infty.$$

$D_2 \cup D_4$ областарында маселенин чечими жашабайт.

Колдонулган адабияттар:

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник Кыргызского государственного национального университета. – Серия 3, Выпуск 6, 2001. – С. 190–200.
2. М. А. Шишкова, Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных, Докл. АН СССР, 1973, том 209, номер 3, 576–579
3. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат , Методы теории функций комплексного переменного- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1973. — 749 с.
4. М.В. Федорюк / Метод перевала // Наука. ГРФМЛ Москва. 1977. 368 стр.