УДК 517.968.73

ГАРМОНИКАЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН ДЕҢГЭЭЛ СЫЗЫКТАРЫ ЖАНА АЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШУ

Алыбаев К.С. – д.ф.-м.н., профессор,
E-mail:alybaevkurmanbek@rambler.ru
Эрматали уулу Баяман – магистрант,
Б.Осмонов атындагы ЖАМУ., Кыргызстан,
Жалал-Абад ш., Ленин к. 57
E-mail:ermatalievbayaman@gmail.com

Аннотация: *Бул макалада гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктарына карата мисалдар, бутактанган деңгээл сызыктар, бутактанбаган деңгээл сызыктар жана өзгөчө чекитүү деңгээл сызыктардын сүрөттөлүштөрү жана гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктарын сингулярдык козголгон сызыктуу турактуу коэффициенттүү теңдемелердин чечимдерин изилдөөдө колдонулушу каралды.*

Ачкыч сөздөр: *гармоникалык функция, Лапластын теңдемеси, бутактанган деңгээл сызыктар, бутактанбаган деңгээл сызыктар, өзгөчө чекитүү деңгээл сызыктар, сингулярдуу козголгон турактуу коэффициенттүү теңдемелер,бир байламталуу область, чектик катмар.*

ЛИНИИ УРОВНЕЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Алыбаев К.С. – д.ф.-м.н., профессор,
E-mail:alybaevkurmanbek@rambler.ru
Эрматали уулу Баяман, магистрант,
ЖАГУ им. Б.Осмонова, Кыргызстан,
г.Джалал-Абад, ул. Ленина 57.
E-mail:ermatalievbayaman@gmail.com

Аннотация: *В данной статье рассматриваются примеры линий уровня гармонических функций, разветвленных линий уровня, не разветвленных линий уровня и изображений линий уровня с особой точкой и использование линий уровня гармонических функций для изучения решений линейных уравнений с постоянными коэффициентами с сингулярным возбуждением.*

Ключевые слова: *гармоническая функция, уравнение Лапласа, разветвленные линии уровня, неразветвленные линии уровня, особые линии уровня точки, уравнения с постоянными коэффициентами с сингулярным возбуждением,односвязная функция, погранслой.*

LINE OF HARMONIC FUNCTIONS LEVELS AND THEIR APPLICATION

Alybaev K.S. – doctor of phys.-math., sciences, professor,
E-mail:alybaevkurmanbek@rambler.ru
Ermatali uulu Bayaman, master student
JASU named after B.Osmonov, Kyrgyzstan,
city Jalal-Abad, Lenin street 57.
E-mail:ermatalievbayaman@gmail.com

Abstract: *This article examines examples of level lines of harmonic functions, branched level lines, non-branched level lines and images of level lines with a singular point and the use of level lines of harmonic functions to study solutions of linear equations with constant coefficients with singular excitation.*

Key words: *harmonic function, Laplace equation, branched level lines, unbranched level lines, special point level lines, equations with constant coefficients with singular excitation, simply connected function, limit layer.*

$u(x,y)$ функциясы $D \in R^2$ областында аныкталсын.

Аныктама 1. $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

теңдеме Лапластын теңдемеси деп аталат. Гармоникалык функциялар боюнча маалыматтар [1], [2], [3], [4], [5], [6] адабияттарда каралган.

Аныктама 2. $u(x,y)$ функциясы D областында Лапластын теңдемесин канааттандырса, анда $u(x,y)$ функциясы D областында гармоникалык деп аталат.

Мисалдар.

1. $u(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in R^2$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

болгондуктан бул функция Лапластын теңдемесин канаатандыргандыктан, гармоникалык болот.

2. $u(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in R^2$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \Rightarrow 2 + 2 = 4 \neq 0$$

бул функция Лапластын теңдемесин канаатандырбагандыктан, гармоникалык болбойт.

3. $u(x,y) = e^x \cdot cosy$, $(x,y) \in R^2$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cdot cosy, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cdot cosy \Rightarrow e^x \cdot cosy - e^x \cdot cosy = 0$$

Демек берилген функция гармоникалык.

4. $u(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\quad (x,y) \in R^2 - (0,0)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Мындай болгондуктан бул функция гармоникалык.

5. $u(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $\quad (x,y) \in R^2 - (0,0)$

функциясы гармоникалык болоору ушундай эле далилденет.

Аныктама 3. $u(x,y), (x,y) \in D$ гармоникалык функция берилсин. $(p) = \{(x,y) \in D, u(x,y) = p - const\}$ көптүк $u(x,y)$ функциясынын деңгээл сызыгы деп аталат.

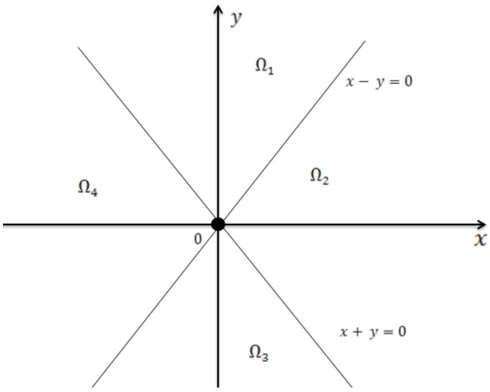
Мисалдар.

1. $u(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in R^2$.

Гармоникалык функция берилсин. Бул функциянын деңгээл сызыгын сүрөттөйлү

$$(p_0) = \{(x,y) \in R^2, x^2 - y^2 = 0\}$$

деңгээл сызыкты карайлы. (p_0) сызыгы $(0,0)$ чекитинде бутактанат. Бутактардын теңдемеси $x - y = 0, x + y = 0$ түрдө аныкталат жана алар өз ара перпендикуляр болгон түз сызыктар болушат (сүрөт 1).



Сүрөт 1. Бутактанган деңгээл сызыктар

(p_0) деңгээл сызык R^2 тегиздигин төрт бөлүккө бөлөт. Бөлүктөрдү $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ деп белгилейли (сүрөт 1).

$\forall (x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_3 (u(x, y) \leq 0)$,

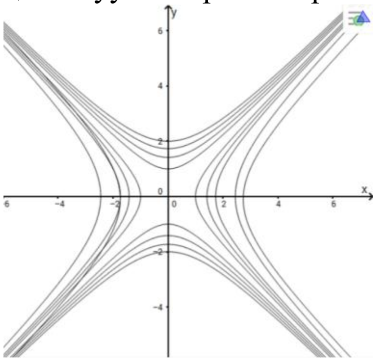
$\forall (x, y) \in \Omega_2 \cup \Omega_4 (u(x, y) \geq 0)$

катыштар орун алат.

Ар бир бөлүктөгү деңгээл сызыктар

$$x^2 - y^2 = p \neq 0$$

теңдеме аркылуу аныкталган тең жактуу гиперболалар болушат (сүрөт 2).

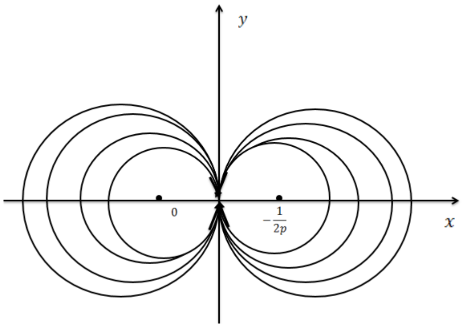


Сүрөт 2. Бутактанбаган деңгээл сызыктар

$$2. u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \in R^2 - (0, 0) \equiv D$$

$$(p_0) = \{(x, y) \in D, u(x, y) = 0\}$$

деңгээл сызыгы, (0, 0) чекитине тирелүүчү y огунун бөлүктөрүнөн турат (сүрөт 3).



Сүрөт 3. Өзгөчө чекиттүү деңгээл сызыктар

$\frac{y}{x^2 + y^2} = p \ (p \neq 0)$ деңгээл сызыктарды аныктайлы.

$$\frac{1}{p} x = x^2 + y^2, \qquad (x - \frac{1}{2p})^2 + y^2 = \frac{1}{4p^2}$$

ээ болобуз. Бул теңдеме борбору (- $\frac{1}{2p}$; 0) чекитинде, радиусу $r = \frac{1}{|2p|}$ жана жаалары (0, 0) чекитине тирелген айлананы аныктайт (сүрөт 3).

Гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктарын сингулярдык козголгон сызыктуу турактуу коэффициенттүү теңдемелердин чечимдерин изилдөөдө колдонолу.

1. $$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = az(t,\varepsilon) \quad (1)$$

теңдеме

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = az(t,\varepsilon) \quad (2)$$

баштапкы шарты менен берилсин.

(1) де $0 < \varepsilon$-чыныгы кичине параметр; $t \in D \subset C$-комплекстик сандардын көптүгү, ал эми D-бир байламталуу ачык область; $z(t,\varepsilon)$ −белгисиз функция; $a \in C$ жана $a_1 + ia_2$, $a_1, a_2 \in R, i = \sqrt{-1}$.

(1)-(2) маселенин чечимин $t \in D$ үчүн $\varepsilon \to 0$да изилдөө маселесин коёлу.

(1)-(2) маселенин чечимин төмөнкүдөй туюнтууга болот.

$$z(t,\varepsilon) = z^0 e^{\frac{a(t-t_0)}{\varepsilon}} \quad (3)$$

$t = t_1 + it_2, t_0 = t_{10} + it_{20}, t_1, t_2$-чыныгы өзгөрмөлөр, t_{10}, t_{20}-чыныгы сандар.

Белгилөөлөрдү эске алып (3)нү төмөнкүдөй жаза алабыз

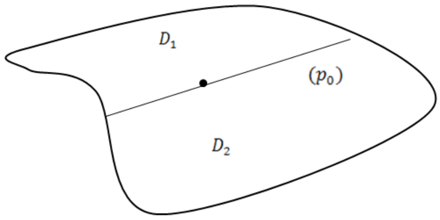
$$z(t,\varepsilon) = z^0 e^{\frac{1}{\varepsilon}[\, a_1(t_1-t_{10}) - a_2(t_2-t_{20}) + i(\, a_2(t_1-t_{10}) + a_1(t_2-t_{20}))]} \quad (4)$$

$A_1(t_1,t_2) = \ a_1(t_1 - t_{10}) - \ a_2(t_2 - t_{20})$ функция аркылуу аныкталган

$$(p_0) = \{t \in D, A_1(t_1,t_2) = 0\}$$

деңгээл сызыкты карайлы.

(p_0) −сызыгы (t_{10}, t_{20}) чекити аркылуу өткөн түз сызыкты аныктайт жана ал D областын D_1, D_2 бөлүктөргө бөлөт (сүрөт 4).



Сүрөт 4.

$A_1(t_1,t_2)$ функциянын белгилерин D_1, D_2 областтарында аныктайлы. Бул функциянын белгилери a_1, a_2 сандардан көз каранды.

Эгерде: $\frac{a_1}{a_2} > 0$ болсо, анда $\forall\, t \in D_1(A_1(t_1,t_2) \le 0)$, $\forall\, t \in D_2(A_1(t_1,t_2) \ge 0)$, $\frac{a_1}{a_2} < 0$ болгондо тескерисинче болот. Барабардык D_1, D_2 областтарынын чек араларында ((p_0)) гана орун алат.

$\frac{a_1}{a_2} > 0$ болсун, анда $\forall\, t \in D_1(|z(t,\varepsilon)| \le |z_0|)$.

$$(p_{0\varepsilon}^-) = \{t \in D, A_1(t_1,t_2) = \varepsilon ln\varepsilon\}$$

деңгээл сызыкты алалы.

(p_0) жана $(p_{0\varepsilon}^-)$ сызыктар менен чектелген областты $D_{1\varepsilon}$, ал эми $D_1 \backslash D_{1\varepsilon} = D_{10}$ деп белгилейли. $(p_{0\varepsilon}^-)$ сызыгы D_{10} го таандык болсун.

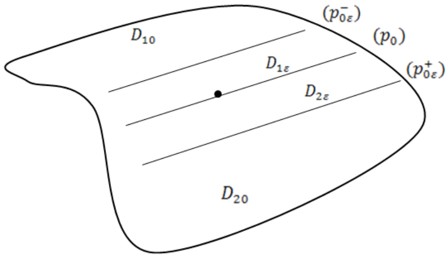
Эгерде: $t \in D_{1\varepsilon}$ болсо $|z(t,\varepsilon)| \le |z_0|$, $t \in D_{10}$ $(z(t,\varepsilon) \to 0)$ б.а. бул учурда (1)-(2) маселенин чечими козголбогон теңдеменин чечимине умтулат. $D_{1\varepsilon}$- чектик катмар областы болот.

Жогорудагыдай эле жол менен

$(p_{0\varepsilon}^+) = \{t \in D, A_1(t_1,t_2) = -\varepsilon ln\varepsilon\}$

сызыкты (p_0) жана $(p_{0\varepsilon}^+)$ сызыктар менен чектелген областы $D_{2\varepsilon}, D_2 \backslash D_{2\varepsilon} = D_{20}$ белгилесек, анда $t \in D_{2\varepsilon}(\, |z(t,\varepsilon)| \le |z_0|)$,

$t \in D_{20}(z(t,\varepsilon) \to \infty)$ катыштар орун алат. Демек, $D_{2\varepsilon}$ −чектик катмар областы, ал эми D_{20}-чечим чектелбеген область болот (сүрөт 5).



Сүрөт 5. Чектик катмар областтары

Колдонулган адабияттар:

1. Евграфов М.А. Аналитические функции/М.А. Евграфов – М.: Наука, 1968.
2. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат , Методы теории функций комплексного переменного-М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1973. — 749 с.
3. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. – М.: 1968.-208 с.
4. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1973, стр. 272.
5. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – Москва:Наука, 1973. – 272 с.
6. Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – Москва: Высшая школа, 1990. – 208 с.
7. Васильева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – Москва: Изд-во МГУ, 1978. – 106 с.