

УДК 662.765.46

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА  
ИНСОЛЯЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СОЛНЕЧНОЙ ИНСОЛЯЦИИ ВЛИЯЮЩИХ  
НА РАБОТУ СОЛНЕЧНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

*Рыскулов И.Р., Акбарбек у Сагынбек,  
Алманбетов А.А. e-mail: [rir82@mail.ru](mailto:rir82@mail.ru)  
ЖАГУ им. Б. Осмонова Таш-Кумырский  
инженерно-педагогический факультет*

**Аннотация:** В данной работе представлены основные решения математических задач которые можно использовать для решения математических моделей определения солнечной инсоляции предложенные В.М.Щербаковым и другими зарубежными исследователями. Основные способы заключаются в экстраполяции данных с приведением их к условиям ближайшей метеорологической станции, при котором учитываются наблюдения за облачностью. Основные соотношения определяются для условий облачности небосвода которое является наиболее существенным фактором, определяющим разность инсоляционных характеристик на станциях и замеры местных натурных замеров.

**Ключевые слова:** математическая модель, солнечные теплоэнергетические установки, режимы работы, облачность, прямая солнечная радиация, косвенная солнечная радиация суммарная, солнечная радиация, эклиптика, коэффициентами пропускания света.

КҮН ЭНЕРГЕТИКАЛЫК ОРНОТМОЛОРУНУН ИШИНЕ ТААСИР ЭТҮҮЧҮ КҮН  
ИНСОЛЯЦИЯСЫНЫН ИНСОЛЯЦИЯЛЫК МҮНӨЗДӨМӨЛӨРҮН ЭСЕПТӨӨ ҮЧҮН  
НЕГИЗГИ МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛДӨӨ МЕТОДДОРУ

*Рыскулов И.Р., Акбарбек у Сагынбек  
Алманбетов А.А. e-mail: [rir82@mail.ru](mailto:rir82@mail.ru)  
Б.Осмонов атындагы ЖАМУ, Таш-Көмүр  
инженердик-педагогикалык факультети*

**Аннотация:** бул макалада В.М. Щербаков жана башка чет өлкөлүк изилдөөчүлөр тарабынан сунушталган күн инсоляциясын аныктоонун математикалык моделдерин чечүү үчүн колдонула турган негизги ыкмалары каралган. Күн инсоляциясын аныктоодогу математикалык маселелерди чечүүнү негизги ыкмаларынын бири бул керектүү маалыматтарды жакынкы метеорологиялык станцияларынан алуу менен экстраполяциялоодо турат, мында күн инсоляциясынын таралуусуна тоскоолдук таасир этүүчү булуттарга байкоо эсепке алынып күн инсоляциясын аныктоодогу математикалык маселелерди чечүүнү негизги ыкмалары каралган.

**Түйүндүү сөздөр:** математикалык модель, күн жылуулук энергетикасы, иштөө режим, булут, түз күн радиациясы, кыйыр күн радиациясы, суммалык күн нурунун кыйыр радиациясы, күн нурунун радиациясы, эклиптика,

THE MAIN METHODS OF MATHEMATICAL MODELING FOR CALCULATING THE  
INSULATION CHARACTERISTICS OF SOLAR INSOLATION AFFECTING THE  
OPERATION OF SOLAR POWER PLANTS

*Ryskulov I., Akbarbek uulu Sagynbek*

*Almanbetov Aibek e-mail: rir82@mail.ru  
JASU named after B.Osmonov Tash-Kumyr  
Engineering and Pedagogical Faculty*

**Abstract:** *This paper presents the main solutions of mathematical problems that can be used to solve mathematical models for determining solar insolation proposed by V. M.Shcherbakov and other foreign researchers. The main methods are to extrapolate the data and bring them to the conditions of the nearest meteorological station, which takes into account observations of clouds. The main ratios are determined for the conditions of cloud cover of the sky, which is the most significant factor determining the difference in insolation characteristics at stations and measurements of local measurements.*

**Key words:** *mathematical model, solar thermal power plants, operating modes, cloud cover, direct solar radiation, indirect total solar radiation, solar radiation, ecliptic, light transmission coefficients.*

Солнечная радиация является одним из важнейших энергии для процессов, протекающих на поверхности эко биосферы земного шара. Количественные и качественные характеристики ее поступления, измеряемые для определенной местности, позволяют отразить климатические особенности территории, являющиеся результатом влияния географической широты, сезонной изменчивости, а так же других факторов которые должны учитываться при анализе исследования солнечной инсоляции. Температуры и тепловые потоки, имеющие место в работе установок ВИЭ непосредственно зависят от температуры и тепловых потоков окружающей среды. Конкретно, величина потоков энергии в окружающей среде зависит в первую очередь от параметров рельефа местности, от времени восхода и зката солнца и конечно же не маловажную роль имеет микроклимат в зоне установки солнечных установок.

Анализируя выше изложенное нужно разделить исследуемую территорию на элементарные участки горных плоскостей и склонов, поверхности которых можно считать условно плоскими, то реальные суммы радиации, достигающие каждого такого участка, будут определяться его пространственной ориентацией относительно небесного светила, и в зависимости от нее, могут в той или иной степени отличаться от сумм, измеренных экспериментальным методом.

В основе моделирования инсоляции лежит классический метод расчета инсоляционных характеристик [1,2]. Основой для расчета являются значения суточных сумм солнечной радиации, падающей на горизонтальную поверхность (суммарной  $Q_g$ , прямой  $S_g$  и рассеянной  $D_g$ ). Данные суммы радиации являются функциями от географической широты местности  $\varphi$ , атмосферных условий и положения Солнца, определяемого солнечным склонением  $\delta$ .

Основой решения математических задач можно использовать методы решения предложенные В. М.Щербаковым [3] способе экстраполяции данных с приведением их к условиям ближайшей метеорологической станции (число которых значительно больше), при котором учитываются наблюдения за облачностью. Соотношение условий облачности в данном случае является наиболее существенным фактором, определяющим разность инсоляционных характеристик на станциях и замеры местных замеров.

Как указано выше, параметром, определяющим в модели положение Солнца, является его склонение ( $\delta$ ). Величина  $\delta$  циклически изменяется в течение всего года. Вследствие прецессии земной оси, нутации полюсов и других астрономических процессов склонению Солнца свойственна также и изменчивость из года в год. Из этого следует необходимость вычисления  $\delta$  для каждой моделируемой даты заданного года. Существует

ряд подходов к определению склонения Солнца с различной степенью зависимости от табличных данных:

1) Использование эфемерид Солнца из астрономических ежегодников имеющих в свободном доступе. При этом значения склонения на каждые сутки наблюдения берутся непосредственно из таблицы. Этот способ является точным, но трудоемким и практически нецелесообразным.

2) Один из способов определения  $\delta$ , используемых в предложенном методе расчета инсоляции [3], состоит в аппроксимации изменчивости склонения с использованием значения на день летнего солнцестояния: – дни года нумеруются, начиная с 22 декабря (1 января, таким образом, становится 11-м днем). – год разбивается на четыре сезона, разграниченных днями солнцестояний (зимнего и летнего) и равноденствий (осеннего и весеннего). – внутри сезонов для каждого дня рассчитывается значение промежуточного параметра  $\tau$ :

$$\tau = \begin{cases} (n - 90)/90, \text{ если } n < 88 & n/93, \text{ если } n < 184 \\ (92 - n/92), \text{ если } n < 277 & - n/88, \text{ если } n < 366 \end{cases}$$

где  $n$  — порядковый номер дня в году; – находим солнечное склонение [3]:

$$\delta = \sin^{-1} [\sin(\delta_0) \cdot \sin(\tau \cdot \pi/2)],$$

где  $\delta_0$  — склонение в день летнего солнцестояния.

Так как данный метод требует задания значения  $\delta_0$ , он является частично зависимым от табличных значений. Второй недостаток данного метода заключается в том, что он использует фиксированную дату дня летнего солнцестояния; реальная же дата меняется из года в год.

3) Следующий предложенный метод основан на подборе аппроксимирующей функции по некоторым усредненным значениям  $\delta$ :

– дни года нумеруются аналогично первому методу.

– рассчитывается параметр  $\tau$  по формуле:

$$\begin{cases} \tau = 2\pi(N - 1)/365 \text{ для невисокосного года} \\ \tau = 2\pi(N - 1)/366 \text{ для високосного года,} \end{cases}$$

где  $N$  — номер дня в году; – вычисляется склонение [3]:

$$\delta = 0,006918 - 0,399912 \cos(\tau) + 0,070257 \sin(\tau) - 0,006758 \cos(2\tau) + 0,000907 \sin(3\tau) - 0,002697 \cos(3\tau) + 0,001480 \sin(3\tau).$$

Этот метод является независимым от табличных значений, но имеет существенный недостаток — невысокую точность.

4) Независимое от значений эфемерид вычисление  $\delta$  возможно и с более высокой точностью. Данный метод, используемый в прикладной астрономии, учитывает прецессию земной оси и нутацию полюсов. Вычисление производится в следующем порядке. Определяется:

– разность относительно 1 января 2000 г. (в столетиях):

$$T = (JD - 2451545)/36525;$$

где  $JD$  — юлианская дата;

– средняя аномалия Солнца:

$$M_0 = 357,52910 + 35999,05030 \cdot T - 0,0001559 \cdot T^2 - 0,00000048 \cdot T^3;$$

– истинная аномалия Солнца:

$$M = M_0 + 360/\pi \cdot \sin(M_0) \cdot e;$$

где  $e=0,016709$  — эксцентриситет орбиты Солнца;

– средняя эклиптическая долгота Солнца:

$$L_0 = 280,46645 + 36000,76983 \cdot T + 0,0003032 \cdot T^2,$$

– положение центра солнечного диска:

$$C = (1,914600 - 0,004817 \cdot T - 0,00014 \cdot T^2) \cdot \sin(M_0) + (0,019993 - 0,000101) \cdot T \cdot \sin(2M_0) + 0,000290 \cdot \sin(3M_0),$$

– истинная эклиптическая долгота Солнца:

$$L_S = L_0 + C,$$

– наклон эклиптики к экватору:

$$K = 23 + 26/60 + 21,448/3600 - 46,8150/3600 \cdot T - 0,00059/3600 \cdot T^2 + 0,001813 \cdot T^3$$

– склонение Солнца [3]:

$$\delta = \sin^{-1}(\sin(K) \cdot \sin(L_S)).$$

Данный метод позволяет определять солнечное склонение с высокой точностью (до  $0,01^\circ$ ) и учитывает его годичную изменчивость.

При расчете солнечной радиации в первую очередь для каждого дня определяется время восхода, зенита и заката Солнца на рассматриваемой территории.

Номер дня

$$n = n_1 - (n_2 n_3) + N_d - 30;$$

$$n_1 = (275 N_m / 9);$$

$$n_2 = (N_m + 9) / 12;$$

$$n_3 = (1 + ((N_y - 4(N_y / 4) + 2) / 3)),$$

где  $N_d$  - номер дня в году;  $N_m$  - номер месяца;  $N_y$  - номер расчетного года.

Средняя аномалия Солнца

$$M_s = (0,9856 t_i) - 3,289,$$

если восход:  $t_i = n + ((6 - (\text{lon} / 15)) / 24),$

если закат:  $t_i = n + ((18 - (\text{lon} / 15)) / 24),$

Истинная долгота Солнца

$$L_s = M_s + (1,916 \sin(M_s)) + (0,020 \sin(2 M_s)) + 282,634.$$

Прямое восхождение Солнца

$$R_s = (\tan^{-1}(0,91764 \tan(L_s)) + 360) / 15.$$

Склонение Солнца

$$\sin dec = 0,39782 \sin(L_s); \quad \cos dec = \cos(\sin^{-1}(\sin dec)).$$

Местный часовой угол Солнца

$$\cos H_s = \left( \cos - \left( \frac{\sin dec \sin(lat)}{\cos dec \cos(lat)} \right) \right);$$

$$H_s = (360 - \cos^{-1}(\cos(H_s))) / 15.$$

Местное время восхода и захода Солнца

$$T_s = H + R - (0,06571 t_i) - 6,622.$$

Перевод полученных значений на долготу местности

$$U_t = T_s - (\text{lon} / 15).$$

Определение времени восхода и захода Солнца на рассматриваемой территории

$$L_t = U_t + \text{UTC} \pm 24.$$

Более детально с описанием алгоритма расчета времени восхода и захода Солнца можно ознакомиться в [5].

После того как определены временные интервалы, в рамках которых  $H_s > 0$ , производится расчет прямой, рассеянной и суммарной солнечной радиации на рассматриваемой территории. В работе используются основные положения, представленные в математической модели Iqbal [6].

$$\dot{I}_n = 0,9751 E_0 i_{sc} \tau_r \tau_o \tau_g \tau_w \tau_a$$

где  $E_0$  - корреляционный коэффициент эксцентриситета орбиты Земли

$$E_0 = 1,00011 + 0,0034221 + 0,00128 \sin \Gamma + 0,000719 \cos 2\Gamma + 0,000077 \sin 2\Gamma;$$

$$\Gamma = 2\pi((N_d - 1) / 365),$$

$\tau_r \tau_o \tau_g \tau_w \tau_a$  - являются коэффициентами пропускания света, которые представлены Релеевским рассеиванием, рассеиванием в озоновом слое, наличием газа и капель воды в атмосфере, а также аэрозолями.

$$\tau_r = e^{-0,0903 m_a^{0,84} (1 + m_a - m_a^{0,01})}$$

$$\tau_o = [0,1611 U_3 (1 + 139,48 U_3)^{-0,3035} - 0,002715 U_3 (1 + 0,044 U_3^2 + 0,0003 U_3^2)^{-1}]$$

$$\tau_g = e^{-0,0127 m_a^{0,26}}$$

$$\tau_w = 1 - 2,4959 U_1 [(1 + 79,034 U_1)^{0,6828} + 6,385 U_1]^{-1}$$

$$1 - [0,1611 U_3 (1 + 139,48 U_3)^{-0,3035} - 0,002715 U_3 (1 + 0,044 U_3^2 + 0,0003 U_3^2)^{-1}]$$

$$\tau_a = e^{-l_{ao}^{0,873} (1 + l_{ao} - l_{ao}^{0,7808}) m_a^{0,9708}}$$

где  $m_a$  - атмосферная масса с учетом поправки на давление окружающей среды

$$m_a = \tau_z (p_{air} / 1013,25)$$

где  $p_{air}$  (мбар) - местное атмосферное давление и атмосферная масса  $m_r = 1 / \sin \delta$ .

Угол склонения Солнца

$$\delta = \sin^{-1} (\sin(23,45) \sin(360 / 365 (n_d - 81)))$$

Угол возвышения Солнца

$$\alpha = 90 - \varphi + \delta.$$

Оптическая длина пути в озоновом слое атмосферы с учетом поправки на давление окружающей среды (eД)

$$U_3 = I_{oz} m_a$$

где  $I_{oz}$  - (eД) вертикальная величина озонового слоя.

World Ozone and Ultraviolet Radiation Data Centre (WOURDC) имеет открытую базу данных по  $I_{oz}$  [7].

$$U_1 = w m_r,$$

где  $w$  (см) - осадочная толщина водяного пара и капель воды в атмосфере.  $w$  рассчитывается с учетом поправки на температуру и давление окружающей среды  $w_i$  (см)

$$w = w' (p_{air} / 1013,25)^{3/4} (273 / T_{air})^{1/2}.$$

Оптическая глубина аэрозолей

$$I_{ao} = 0,2758 l_{ao; \lambda \lambda = 0,38 \mu m} + 0,351 l_{ao; \lambda \lambda = 0,5 \mu m}$$

AEROSOL ROBOTIC NETWORK (AERONET) позволяет получить многолетние данные по  $w', ao; \lambda \lambda = 0,38 \mu m, l_{ao; \lambda \lambda = 0,5 \mu m}$  [8,9].

$$I_b = \sin \alpha I_n C_{c-dr}$$

где  $\sin \alpha$  (градусы) угол возвышения и  $C_{c-dr}$  коэффициент уменьшения прямой солнечной радиации за счет облачности.

$$C_{c-dr} = 1 - 0,75 (N / 8)^{3,4},$$

где  $N$  зависит от степени покрытия неба облаками в определенный момент времени (3 часовой интервал) - измеряется в октантах (oktas) [53, 54]

Рассеянная солнечная радиация образуется в результате рассеивания солнечных лучей в нижних слоях атмосферы и отражённая от земной поверхности земли.

$$\dot{I}_d = (\dot{D}_r + \dot{D}_a + \dot{D}_m) C_{c-df},$$

где  $\dot{D}_r$  - Релеевское рассеивание солнечной радиации после прохода атмосферы.

$$\dot{D}_r = \frac{0,79 \dot{I}_d \sin \alpha \tau_a \tau_g \tau_w \tau_{aa} 0,5 (1 - \tau_r)}{1 - m_a + m_a^{1,02}}$$

где

$$\tau_{aa} = 1 - (1 - w_0)(1 - m_a + m_a^{1.06})(1 - \tau_a)$$

Аэрозольное рассеивание солнечной радиации при проходе через атмосферу

$$\dot{D}_a = \frac{0.79 \dot{I}_d \sin \alpha \tau_a \tau_g \tau_w \tau_{aa} 0.84 (1 - \tau_r)}{1 - m_a + m_a^{1.02}}$$

$$\tau_{as} = \frac{\tau_a}{\tau_{aa}}$$

Рассеянная солнечная радиация, многократно отраженная между поверхностью Земли и нижними слоями атмосферы,

$$\dot{D}_m = \frac{(\dot{I}_n \sin \alpha + \dot{D}_r + \dot{D}_a) \rho_g \rho_a}{1 - \rho_g \rho_a}$$

$$\rho_a = 0,0685 + (1 - \rho_a^{ct})(1 - \tau_{as})$$

где  $\rho_a^{ct}$  - альbedo облаков относительно каждого временного интервала, %. Зависит от типа и состава облаков [10].

Суммарная солнечная радиация, Вт-м<sup>2</sup>

$$\dot{I}_t = \dot{I}_b - \dot{I}_d$$

Данную методику расчета желательно вести с помощью программно-вычислительного комплекса Matlab R2017a или более новой версии этого же программно-вычислительного комплекса.

Вывод

Исходя из этого, математическое моделирование инсоляции склонов требует редукции измеренных значений приходящей радиации на участки поверхности различной ориентации. Вышеуказанный подход к математическому моделированию инсоляции в общем виде сводится к двум задачам:

- выделению определенных участков поверхности;
- расчет сумм радиации для каждого из них.

Для этих учетов, учитывается большой объем математических вычислений, в этом случае необходимо применение вычислительной техники с соответствующими программно-инструментными обеспечениями с набором геоинформационного программного инструментария для решения требуемых поставленных задач. Кроме того, выбор среды моделирования определяет и возможности дальнейшей обработки математической модели.

#### Список использованных источников

1. Кондратьев К. Я., Пивоварова З.И., Федорова М. П. Радиационный режим наклонных поверхностей. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 232 с.
2. Сивков С. И. Методы расчета характеристик солнечной радиации. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 215 с.
3. Щербаков В. М. Оценка и картографирование радиационного эффекта рельефа / Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 7. Геология, география. 1993. Вып. 3. С. 143–146
4. Meeus J. Astronomical Algorithms. Richmond: Willmann-Bell, 1991. 435 p.
5. Sunrise/Sunset Algorithm. Almanac for Computers, 1990 published by Nautical Almanac Office United States Naval Observatory Washington, DC 20392. URL: [http://www.edwilliams.org/sunrise\\_sunset\\_algorithm.htm](http://www.edwilliams.org/sunrise_sunset_algorithm.htm) (дата обращения: 25.03.2017).
6. Vertical ozonelayer thickness. URL: <http://woudc.org> (дата обращения: 25.03.2017).
7. AERONET. AERosol RObotic NETwork. URL: <http://aeronet.gsfc.nasa.gov/> (дата обращения: 25.03.2017).

8. Parameterization of solar radiation from model and observations / K. Lengfield, A. Macke, U. Feister, J. Ghdner // Meteorologische Zeitschrift. – 2010. – V. 19. – P. 25–33.
9. Kasten F., Czeplak G. Solar and terrestrial radiation dependent on the amount and type of cloud // Solar Energy. – 1980. – V. 24. – P. 177–189.
10. Global patterns in daytime cloud properties derived from GOME backscatter UVVIS measurements / R. Loyola, W. Thomas, R. Spurr, B. Mayer // International Journal of Remote Sensing. – 2010. – V. 31. – P. 4295–4318