УДК: 517.928

КОЗГОЛУУ УСУЛДАРЫНЫН ОПТИКАДАГЫ КОЛДОНУЛУШТАРЫ

Шакиров К.К. – улук окутуучу
ОшМУ, Ош, Кыргыз Республикасы
Акматов А.А. – улук окутуучу
ОшМУ, Ош, Кыргыз Республикасы
E-mail: abdilaziz_akmatov@mail.ru
Замирбек кызы Наргиза. – окутуучу
ОшМУ, Ош, Кыргыз Республикасы

Аннотация: *Жумушта электр талаасынын таасиринде кыймылга келүүчү электрондун кыймылынын теңдемеси каралат. Эгерде тең салмактуулук абалы сакталса анда ал Гуктун мыйзамы боюнча каралат. Тескерисинче тең салмактуулук абалы сакталбаса, анда Гуктун мыйзамы иш ке ашпайт. Бул учурдагы козголуу сызыктуу эмес болуп, ал козголууну кичине параметр усулу же козголуу усулу деген аталышка ээ болгон ыкма менен жогорку тактыкка чейин изилдөө каралган. Изилдөө ыкмасы толугу менен жумушта сүрөттөлгөн. Жумуш өз учурунда теориялык усул болгон кичине параметр усулунун практикалык колдонулушу катары саналат.*

Түйүндүү сөздөр: *дифференциалдык теңдеме, катар, козголуу, кыймыл, электрон, жыйналуучулук, чечим, оптика, кичине параметр, электр талаасы, термелүү.*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕОРИИ ОПТИКИ

Шакиров К.К. – старший преподаватель
Ош ГУ, Ош, Кыргызская Республика
Акматов А.А. – старший преподаватель
ОшГУ, Ош, Кыргызская Республика **E-mail: abdilaziz_akmatov@mail.ru**
Замирбек кызы Наргиза. – преподаватель
ОшГУ, Ош, Кыргызская Республика

Аннотация: *В работе рассмотрено уравнения движения электрона под действием электрического поля. Если сохраняется условия равновесия то это подчиняется закону Гука. В обратном случае закон Гука не выполняется и колебание будет нелинейным. В этом случае применим метод малого параметра и исследуем до высшего приближения. Правила исследования полностью иллюстрировано в работе. Малый параметр считается чисто теоретическим. Но использования этого метода к уравнению движения электрона при неподчинение закона Гука считается практическим применением.*

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, ряд, возмущения, движения, электрон, сходимость, решение, оптика, малый параметр, электрические поля, колебания.*

APPLICATION OF PERTURBATION METHOD IN OPTICS THEORY

Shakirov K.K. – Senior lecturer
Osh State University Osh, Kyrgyz Republic
AkmatovAbdilazizAlievich Senior lecturer
Osh State University Osh, Kyrgyz Republic
E-mail: abdilaziz_akmatov@mail.ru

Zamirbek kyzy Nargiza teacher
Osh State University Osh, Kyrgyz Republic

Abstract: *The paper considers the equations of motion of an electron under the action of an electric field. If the equilibrium conditions are maintained, then this obeys Hooke's law. Otherwise, Hooke's law is not fulfilled and the oscillations will be nonlinear. In this case, we apply the small parameter method and investigate to the highest approximation. The research rules are fully illustrated at work. The small parameter is considered purely theoretical. But the use of this method to the equation of motion of an electron when disobeying Hooke's law is considered a practical application.*

Key words: *differential equations, series, disturbances, motions, electron, convergence, solution, optics, small parameter, electric fields, oscillations.*

Введение. В работе рассматривается уравнения движения упругосвязанного электрона, находящегося под действием электрического поля E [3,4]. Когда удерживающая электрон около положения равновесия сила $f(x) = -mw_0^2 x(t)$ не подчиняется закону Гука, колебания становится нелинейным. Исследуем эту явлению с помощью метода малого параметра или методом возмущений.

Формулировка проблемы или задачи. Уравнение движения упругосвязанного электрона, находящегося под действием электрического поля E, имеет вид

$$mx''(t) + \gamma m x'(t) + mw_0^2 x(t) = eE, \tag{1}$$

где предполагается, что напряженность E направлена по оси X. Удерживающий электрон около положения равновесия сила $f(x) = -mw_0^2 x(t)$ подчиняется закону Гука лишь при не слишком больших $x(t)$. При больших $x(t)$ наблюдается отступления от закона Гука и колебания становятся нелинейным[4]. Функция $f(x)$ в общем случае может быть представлена в виде ряда Маклорена:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n-1)}(0) + ... \tag{2}$$

Для описания движения электрона в поле световой волны с учетом нелинейности можно написать уравнение (1) в виде

$$mx''(t) + m\gamma x'(t) = eE + f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + ..., \tag{3}$$

где $m = 9.1 \times 10^{-31}$ *кг*-масса электрона, w_0-круговая частота колебаний, имеющая для оптической области спектра излучения порядок $10^{15} \times c^{-1}$, $\gamma -$затухание.

Так как точка $x = 0$ является равновесной или в пределе устойчивой[лит], то $f(0) = 0$. Сила $f(x)$ всегда направлена к точке равновесия и, следовательно, $f'(0) < 0$. Полагая $f'(0) = -mw_0^2$ перепишем (3) в виде

$$mx''(t) + m\gamma x'(t) + mw_0^2 x(t) = eE + f(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + ... \tag{4}$$

Если в (4) можно пренебречь членами, квадратичными кубическими и т.д. по $x(t)$, то приходим к уравнению движения (1) линейного осциллятора. При учете этих членов осциллятор называется ангармоническим, а его колебания- ангармоническим колебаниями. Ясно, что для ангармонических колебаний зависимость $x(E)$, в линейном случае выраженной формулой (1) усложняется и не будет линейной. Поэтому поляризованность которую удобно представить в виде

$$P = N|e|x(t)\,, \tag{5}$$

перестает быть линейной функцией от E.

Если $f''(0) \neq 0$, то нелинейность колебаний проявляется в первую очередь за счет квадратичного по $x(t)$ члена. Уравнение (4) записывается в виде

$$x''(t) + \gamma x'(t) + w_0^2 x(t) = \left(\frac{e}{m}\right)E + \xi x^2(t)\,, \tag{6}$$

где $\xi = \dfrac{f''(0)}{2m}$. Поскольку величина $\xi x^2(t)$ предполагается малой, решать уравнение (6) следует методом возмущений [1,2]. Представим искомое решение в виде ряда

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + ... + x_n(t) + ...\,, \tag{7}$$

где $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t),...$-малые величины порядка $\xi, \xi^2,..., \xi^n,...$ относительно $x_0(t)$. Подставив (7) в (6) и приравняв между собой члены одинакового порядка по ξ, получим уравнения

$$x_0''(t) + \gamma x_0'(t) + w_0^2 x_0(t) = \left(\frac{e}{m}\right)E, \tag{8}$$

$$x_1''(t) + \gamma x_1'(t) + w_0^2 x_1(t) = \xi x_0^2(t), \tag{9}$$

$$x_2''(t) + \gamma x_2'(t) + w_0^2 x_2(t) = 2\xi x_0(t)x_1(t), \tag{10}$$

$$x_3''(t) + \gamma x_3'(t) + w_0^2 x_3(t) = \xi[x_1^2(t) + 2x_0(t)x_2(t)], \tag{11}$$

$$x_4''(t) + \gamma x_4'(t) + w_0^2 x_4(t) = 2\xi[x_0(t)x_3(t) + x_1(t)x_2(t)], \tag{12}$$

…………………………………,

$$x_{n-1}''(t) + \gamma x_{n-1}'(t) + w_0^2 x_{n-1}(t) = \xi\left[x_{\frac{n-1}{2}}^2(t) + 2x_0(t)x_{n-1}(t) + ... + 2x_{k-1}(t)x_{n-k-1}(t)\right], \tag{13}$$

$$x_n''(t) + \gamma x_n'(t) + w_0^2 x_n(t) = 2\xi[x_0(t)x_{n-2}(t) + x_1(t)x_{n-3}(t) + ... + x_{k-1}(t)x_{n-k-2}(t)]. \tag{14}$$

…………………………………….. .

Здесь $k \in N, n \in N,\ k < n$.

С учетом нелинейности решаем уравнения (8), здесь предполагается, что напряженность E направлена по оси X. Если

$$E(t) = E_0 e^{iwt}\,, \tag{15}$$

то в установившемся режиме $x(t)$ является гармонической функцией с той же частотой w:

$$x(t) = x_0 e^{iwt}. \tag{16}$$

Имеем

$$x_0(t) = \frac{e}{m} \times \frac{E}{w_0^2 - w^2 + iw\gamma}\ . \tag{17}$$

Колеблющийся электрон является источником излучения, причем энергия ему передается падающей волной. Следовательно, происходит поглощение энергии упругосвязанным электроном. Интенсивность поглощения пропорциональна квадрату амплитуды (17) колебаний электрона.

Поэтому

$$x_0(t) = \frac{e}{m} \times \frac{E}{(w_0^2 - w^2)^2 - w^2\gamma^2}\,. \tag{18}$$

С учетом равенство (18) решаем уравнения (9), тогда

$$x_1(t)=\left[\frac{e}{m}\times\frac{E}{(w_0^2-w^2)^2-w^2\gamma^2}\right]^2\times\frac{1}{w_0^2-w^2+i\gamma w}, \tag{19}$$

или учитывая интенсивность поглощения

$$x_1(t)=\left[\frac{e}{m}\times\frac{E}{(w_0^2-w^2)^2-w^2\gamma^2}\right]^2\times\frac{1}{(w_0^2-w^2)^2-\gamma^2 w^2}. \tag{20}$$

Выполняя, некоторые упрощения имеем

$$x_1(t)=\left[\frac{e}{m}\right]^2\times\frac{E^2}{((w_0^2-w^2)^2-\gamma^2 w^2)^3}. \tag{21}$$

Учитывая равенство (18), (21) и выполняя некоторые преобразование определим решение уравнения (10)

$$x_2(t)=2\left[\frac{e}{m}\right]^3\times\frac{E^3}{((w_0^2-w^2)^2-\gamma^2 w^2)^5}. \tag{22}$$

Аналогично с учетом (18),(21),(22) определим решение уравнения (11)

$$x_3(t)=5\left[\frac{e}{m}\right]^4\times\frac{E^4}{((w_0^2-w^2)^2-\gamma^2 w^2)^7}. \tag{23}$$

Поступая также используя равенства (18), (21), (22), и (23) определим решение уравнения (12)

$$x_4(t)=14\left[\frac{e}{m}\right]^5\times\frac{E^5}{((w_0^2-w^2)^2-\gamma^2 w^2)^9}. \tag{24}$$

Продолжая этот процесс аналогичным образом для решения уравнения (13) получим

$$x_{n-1}(t)=\left[\frac{e}{m}\right]^n\times\frac{F_{n-1}E^n}{\left((w_0^2-w^2)^2-\gamma^2 w^2\right)^{2n-1}}. \tag{25}$$

Здесь, постоянные число F_{n-1} определяется рекуррентно от предыдущих уравнениях.

Аналогично предыдущего имеем

$$x_n(t)=\left[\frac{e}{m}\right]^{n+1}\times\frac{F_nE^{n+1}}{\left((w_0^2-w^2)^2-\gamma^2 w^2\right)^{2n+1}}, \tag{26}$$

где, постоянные число F_n определяется аналогично как в F_{n-1}. Подставляя значение (21)-(26) к (7) имеем:

$$x_n(t)=\left[\frac{e}{m}\right]\times\frac{E}{\left(w_0^2-w^2\right)-\gamma^2 w^2}+\left[\frac{e}{m}\right]^2\times\frac{E^2}{\left(\left(w_0^2-w^2\right)-\gamma^2 w^2\right)^3}+\left[\frac{e}{m}\right]^3\times\frac{2E^3}{\left(\left(w_0^2-w^2\right)^2-\gamma^2 w^2\right)^5}+$$
$$+\left[\frac{e}{m}\right]^4\times\frac{5E^4}{\left(\left(w_0^2-w^2\right)^2-\gamma^2 w^2\right)^7}+\left[\frac{e}{m}\right]^5\times\frac{14E^5}{\left(\left(w_0^2-w^2\right)^2-\gamma^2 w^2\right)^9}+\ldots+\left[\frac{e}{m}\right]^n\times\frac{F_{n-1}E^n}{\left(\left(w_0^2-w^2\right)^2-\gamma^2 w^2\right)^{2n-1}}+$$
$$+\left[\frac{e}{m}\right]^{n+1}\times\frac{F_nE^{n+1}}{\left(\left(w_0^2-w^2\right)^2-\gamma^2 w^2\right)^{2n+1}}+\ldots. \tag{27}$$

Здесь каждое слагаемое бесконечно малая высокого порядка, чем предыдущих слагаемых или $x_n(t)=x_{n-1}(t),\ n\in N.$

Используя обозначения (5), решение задачи (3) записываем в виде

$$P = N|e|x_0(t) + N|e|x_1(t) + N|e|x_2(t) + N|e|x_3(t) + N|e|x_4(t) + ... + \\ + N|e|x_{n-1}(t) + N|e|x_n(t) + ... \qquad (28)$$

Вводя обозначения $P_л = N|e|x_0(t) = \varepsilon_0 ae^{(1)}E;\ P_н^{(n)} = N|e|x_n(t) = \varepsilon_0 ae^{(n)}E^n,\ n \in N$. Тогда равенство (28):

$$P = P_л + P_н^{(n)},\ (n \in N). \qquad (29)$$

Учитывая (7) и малой ξ можно найти предел решения (27)

$$\lim_{\xi \to 0} x(t) = x_0(t). \qquad (30)$$

Результаты и обсуждения. Физически это означает, что при малых $x(t)$ поляризация будет линейной, в противном случае нелинейной. А математически это решение возмущенной задачи стремится к решению невозмущенной задачи. Мы видим что, математически к любым степеням малого параметра можно охарактеризовать природы рассматриваемой физической явлении.

Выводы. Выше указанного примера видно, что с помощью метода возмущений можно исследовать природы движения электрона. Особенность в том, что метода возмущений с точностью охарактеризует всю поведению электрона при движении.

Литература

1). Абрамовица М., И. Стиган(1979). Справочник по специальным функциям. – Москва. – С. 254-261.

2).А.Б. Азимов(2017) Асимптотика решения бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений со слабой особой точкой:-Дисс. к-да физ.-мат. наук: 01.01.02. –Ош, 96 с.

3). Г.С. Ландсберг(1976) Оптика. – Москва. – С.150-168.

4). А. Н. Матвеев(1985). Оптика. – Москва. - С. 232-234.