УДК: 371.214

Мамыров Ж., доцент,
Келдикеева М.Ж., магистрант,
Маданбекова Э.Э., Эркинбаев М.А.,
К.Тыныстанов ат. ЫМУ

МАТЕМАТИКАНЫН МЕКТЕП КУРСУНДАГЫ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫН ОКУТУУДА СИММЕТРИЯЛУУ КӨП МҮЧӨЛӨРДҮ КОЛДОНУУ

Макалада мектеп математикасынын орчундуу окуу материалдарынын бири болгон теңдеме түшүнүгү, анын ичинен теңдемелер системасын чыгарууда симметриялык көп мүчөлөрдүнколдонулушунун методдору каралган. Ал методдорду кароодон мурда симметриялуу теңдемелер системасы жана элементардык симметриялык көп мүчөлөр тууралуу окуу материалдары каралган. Бул окуу материалдары кайсы класстарда окутулары жана окуучулардын билим деңгээлине тийгизген таасири сөзгө алынат. Теңдемелерди окутууда теңдемелердин эки касиети менен окучууларды тааныштыруунун мааниси айтылган. Ошондой эле теңдеме түшүнүгүнүн мектептин математика боюнча кыргыз тилиндеги да, орус тилиндеги да окуу китептеринде, илимий–методикалык адабияттарда кездешүүчү аныктамаларына кыскача талдоо жүргүзүлгөн. Бир өзгөрмөсү барах=в түрүндөгү сызыктуу теңдеме жана эки өзгөрмөсү бар ах+ву=с түрүндөгү сызыктуу теңдемени чыгаруунун методдоруна талдоо жүргүзүү менен, теңдемелер системасын жана симметриялуу теңдемелер системасын чыгаруунун методдору талдоого алынат.

Өзөктүү сөздөр: *мектеп, мугалим, окуучу, класс, математика, алгебра, аныктама, окуу материалдары, окуу китептер, окуу куралдары, теория, практика, билим, теңдеме, чыгаруу, метод, түшүнүк, элементардык, симметрия, система, көп мүчө,өзгөрмө, барабардык, белгисиз.*

Мамыров Ж., доцент
Келдикеева М.Ж., магистрант
Маданбекова Э.Э., Эркинбаев М.А.
ИГУ им.К.Тыныстанова.

ПРИМЕНЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В ОБУЧЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

В этой статье рассмотрены методы решения систем уравнений с использованием симметричных многочленов, являющихся одной из основных учебных материалов в школьном курсе математики. Перед рассмотрением вышеуказанных материалов, даются такие понятия как, симметричные системы уравнений и элементарные симметричные многочлены. В работе указано, в каком классе должны изучаться эти учебные материалы и какое влияние они оказывают на знание учеников. Также говорится о значении двух свойств уравнений. Анализировано определение уравнений, приведенных в учебниках инаучно-методической литературе на кыргызском и на русском языках. А также сделаны анализы методов решения уравнений с одним неизвестным, вида ax=b и уравнения двумя неизвестными, вида ax+by=c. При решении симметричных систем уравнений применен метод элементарных симметричных многочленов.

Ключевые слова: *школа, учитель, ученик, класс, математика, алгебра, определение, учебные материалы, учебники, учебное пособие, теория, практика, знание, уравнение, решение, метод, понятие, элементарный, симметрия, система, многочлен, переменный, равенства, неизвестный.*

Mamyrov J., associate professor,
Keldikeeva M.J., master student
Madanbekova E.E., Erkinbaev M.A.
IKSU named after K.Tynystanov

THE USE OF SYMMETRIC POLYNOMIALS IN TEACHING A SYSTEM OF EQUATIONS IN A SCHOOL MATHEMATICS COURSE

This article deals with methods for solving systems of equations using symmetric polynomials, which are one of the main educational materials in a school course of mathematics. Before considering the above materials, such concepts are given as: symmetric systems of equations and elementary symmetric polynomials. Also, the paper indicates in which class these educational materials are studied and what effect it has on the students' knowledge. It is a question of the meaning of two properties of equations. The definitions of equations given in textbooks and scientific and methodological literature in Kyrgyz and Russian are analyzed. And also analyzes were made of methods for solving equations with one unknown, of the form ax = b and the equations of two unknowns, of the type ax + by = c. When solving symmetric systems of equations, the method of elementary symmetric polynomials is applied.

***Key words**: school, teacher, student, class, mathematics, algebra, definition, teaching materials, textbooks, teaching aid, theory, practice, knowledge, equation, solution, method, concept, elementary, symmetry, system, polynomial, variable, equation, unknown.*

Биз теңдемелер системасын окутууда симметриялуу көп мүчөлөрдүн колдонулушун кароодонмурда теңдеме түшүнүгүнүн кайсы класстардан баштап окутулушуна кыскача токтолуп, андан кийин теңдемелер системасын окутуунун методоруна жана теңдемелер системасын чыгарууда симметриялуу көп мүчөлөрдүн маанисине токтололу.Мектепте теңдеме түшүнүгүнүн баштапкы курсу 3-4-класстарда каралган. Логиканын талабынажооп берген аныктамасы 7- класстын алгебра курсунда киргизилип, андан ары бир өзгөрмөсү бар сызыктуу теңдемелер каралып, аларды чыгаруу жолдору берилген.Башталгыч класстарда 5+x =7, x+7=9+2, (6-5)x=8 ж.б.у.с. жөнөкөй сызыктуу теңдемелер каралат да, аларды адегенде талдоо методу менен, андан кийин арифметикалык амалдардын натыйжалары жана компоненттеринин ортосундагы көз карандылыктар боюнча чыгаруу өздөштүрүлөт. Мисалы, 5+x =7берилсе, анда белгисиз кошулуучуну аныктоо үчүн барабардыктын оң жагынан, б.а.,7денбарабардыктын сол жагындагысуммадагы кошулуучу 5ти кемитип, x=2 деген маанини алышат.

5-6-класстарда теңдемелерди, негизинен, жогоркудай эле чыгарышат, бирок алдын ала жөнөкөйлөтүү сунуш кылынат. Мисалы, 2x +5x = 28, $\frac{1}{2}$x+1,5x =2,4 +5,1 ж.б. теңдемелерди алдын ала жөнөкөйлөтүп,б.а; окшош мүчөлөрүн топтоп чыгаруу жүргүзүлөт. Башталгыч класстан айырмаланып, 6-класста |x| =5, |a| =-4 сыяктуу сызыктуу эмес айрым теңдемелерди чыгаруу менен окуучуларды тааныштыруу каралган. Ал эми 7-класста теңдемелер боюнча билимдери тереңдетилип, системалаштыруу жүргүзүлөт. Ошондой эле 5-6-класстардын “Математика” курсунда бир эле теңдемени ар түрдүү жол менен чыгарууну көрсөтүү аркылуу окуучулардын кызыгуусун арттыруу менен билгичтигин жана билим деңгээлин жогорулатууга болот. Мисалы, -x=5 теңдемесин төмөнкүдөй методдор менен чыгарууга болорун көрсөтөбүз:

1) бул теңдемени оң жагындагы белгисиз болобу же сан болобу, барабардык белгисинин сол жагына жана ошондой эле сол жагындагы белгисиз болобу же сан болобу, барабардык белгисинин оң жагына алып чыгууда алардын белгиси карама-каршысына алмашат деген математикалык чындыкты колдонуп, белгисизди табабыз: x =5.

2) карама-каршы сандардын аныктамасын колдонуу менен, белгисиз x саны 5

санына карама-каршы болгондуктан, $x = -5$ болот.

3) бул теңдеме 7- класста сунуш кылынса, анда тең күчтүү теңдемелер жөнүндөгү теореманы колдонуу менен $-x(-1) = 5(-1)$. Мындан $x = -5$ экенин табабыз.

Окуучуларда теңдеме жана анын тамырлары жөнүндөгү түшүнүктү калыптандырууда методикалык адабияттарда [8] жана окуу китебинде [7] тексттик маселени кароодон баштоону сунуш кылат. Мисалы: “Биринчи кутуда экинчи кутуга караганда 3 эсеге көп карандаш бар. Эгерде биринчи кутудан 10 карандашты экинчи кутуга салсак, анда кутулардагы карандаштардын саны бирдей болуп калат. Экинчи кутуда канча карандаш болгон?” Чыгаруу: Экинчи кутудагы карандаштардын санын x менен белгилейли, анда биринчи кутудагы карандаштардын саны 3x ке барабар. Ал эми маселенин шарты боюнча биринчи кутудан 10 карандашты экинчи кутуга салсак, анда биринчи кутуда $3x-10$ карандаш калат, анда экинчи кутуда $x+10$ карандаш болот. Эки кутудагы карандаштардын саны бирдей болуп калат. Анда $3x-10 = x+10$ барабардыгын алабыз. Бул коюлган маселенин математикалык модели экендигин окуучуларга айта кетсек да болот, бул түшүнүктү айтуу менен дидактиканын негизги принциптеринин бири болгон илимийлүүлүк принцибинтеңдемелерди окутууда колдонгон болобуз.

Китептердин белгисиз санын табуу үчүн биз өзгөрмөсү бар барабардыкты түздүк. Ушундай даярдоо иштеринен кийин “Өзгөрмөсү бар барабардык теңдеме деп аталат” деген аныктаманы окуучуларга берсек болот. Андан ары маселени чыгарууда түзүлгөн $3x-10=x+10$ теңдемесин туура барабардыкка айланта турган сан теңдеменин чыгарылышы же теңдеменин тамыры болорун айтып, төмөнкү аныктаманы берсе болот:

Аныктама. Теңдеме туура барабардыкка айлана турган өзгөрмөнүн мааниси теңдеменин тамыры деп аталат.

$3x-10 = x+10$ теңдемесин чыгаруу менен теңдемежалгыз бир тамырга ээ болорун көрсөтөбүз, ал 10 саны болот. Бул жерден эки, үч жана андан көп тамырга ээ болгон же тамырларга ээ болбогон теңдемелердин мисалдарын келтирүүгө болот.

Мисалы: $x^3-6x^2+11x-6=0$ теңдемесин $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ теңдемесине өзгөртүп, үч тамыры бар экендигин чыгарабыз: 1,2 жана 3. Чындыгында эле бул сандардын ар бири $(x-1)$ $(x-2)$ $(x-3)$ көбөйтүндүсүнүн бирөөнү нөлгө айландырат. Башка сандардын бири да жогорку туюнтманынын көбөйтүүчүлөрүнүнбирин да нөлгө айландырбайт, демек, теңдеменин үч тамыры бар экендигин айтсак болот жана дидактиканын илимийлүүлүк принцибине таянып, теңдеменин даража көрсөткүчүнүн саны менен тамырларынын саны барабар экендигин айта кетсе болот. Ал эми $x=x+10$ теңдемесинин тамыры болбойт, себеби x тин каалаган маанисинде теңдеме теңдештикке айланбайт.

Теңдемелерди окутууда теңдемелердин эки касиети менен тааныштыруу талапка ылайык, алар төмөндөгүлөр:

- эгер теңдемелерде кошулуучуну анын белгисин өзгөртүп, теңдеменин бир бөлүгүнөн экинчи бөлүгүнө көчүрсөк, анда берилген теңдемеге тең күчтүү теңдеме келип чыгат;
- эгер теңдеменин эки бөлүгүн тең нөлгө барабар эмес бир эле санга көбөйтсөк, анда берилген теңдемеге тең күчтүү теңдеме келип чыгат.

Мисалы:

$2x-3=7$ жана $2x=7+3$ тең күчтүү теңдемелер, ошондой эле

$5x=2x+6$ жана $10x=4x+12$теңдемелери да тең күчтүү.

Теңдемелердин көрсөтүлгөн касиеттерин туура сан барабардыктарынын касиеттерине таянып далилдөөгө болот. Эгерде туура барабардыктын эки бөлүгүнө тең бир эле санды кошсок же туура барабардыктын эки бөлүгүн тең нөл эмес бир эле санга көбөйтсөк же бөлсөк, анда туура барабардык келип чыгат.

Эми теңдеме түшүнүгүнүн мектептин математика боюнча окуу китептеринде, илими-методикалык адабияттарда кездешүүчү аныктамаларына кыскача талдоо жүргүзөлү.Д.К. Фадеев, И.С. Соминский авторлор болушкан орто мектептин жана техникумдун мугалимдери үчүн 1964-жылы чыккан “Алгебра” деген окуу-методикалык колдонмосунда теңдемеге мындай аныктама берет:

Аныктама: Тамгалардын мүмкүн болгон бардык маанилери үчүн туура сан барабардыгына дайыма эле айлана бербеген тамгалуу барабардыкты айтабыз. Ушул эле аныктамага окшош эле экинчи аныктаманы берсек болот.

Аныктама: Кармап турган тамгалардын кээ бир маанилеринде гана турган туура болуучу барабардык теңдеме деп аталат.

А.Н.Бекаревичтин 1968 жылы жарык көргөн ”Мектептин математика курсундагы теңдемелер” деген окуу куралында мындай аныктама берет:

*Аныктама:*Теңдеме деп тамгаларынын мүмкүн болгон бардык маанилеринде теңдештикке айланбай турган, кээ бир эле маанилеринде теңдештикке айланатурган барабардыкты айтабыз.

Ошондой эле Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, Ю.В.Сидоров, М.В.Ткачева, Н.Е.Федорова, М.И.Шебунин авторлору болушкан 2011-жылы чыккан “Алгебра, 7-класс” деген окуу китебинде теңдемеге мындай аныктама беришет:

Аныктама: Тамга менен белгиленген белгисиз санды кармаган барабардыкты теңдеме деп айтабыз.

Ал эми белгилүү методист И.А.Гибш1963-жылы чыккан методика боюнча окуу китебиндетеңдемеге мындай аныктама берет:

Аныктама: Маанисин табууну талап кылуучу белгисизди кармап турган барабардык теңдеме деп аталат.

Н.Я.Виленкин ж.б. чыгаан методист-математиктер мындай да аныктаманы сунушташкан:

Аныктама: Теңдеме – була(х)=в(х) түрүндөгү айтылыштык форма (предикат).

Кыргызстандын окумуштуу-педагогдору тарабынан кыргыз тилинде иштелип чыккан окуу китептерине көз чаптырсак, авторлору И.Бекбоев, А.Абдиев, А.Айылчиева, Н.Ибраева, А.Касымов болушкан 2015-жылы чыккан “Математика. 5-класс” деген окуу китебинде теңдемеге мындай аныктама берет:

*Аныктама:*Теңдеме – бул тамгалуу барабардык. Барабардыктагы тамга белгисиз санды туюнтат. Анын маанисин издөөнү теңдемени чыгаруу дейбиз.

Ошондой эле авторлору И.Бекбоев, А.Абдиев, А.Айылчиева, Д.Андашев болушкан 2012 жылы жарыкка чыккан “Математика.6-класс” деген окуу китебинде теңдемеге мындай аныктама берет.

Аныктама: Теңдеме – бул өзгөрүлмөлүү туюнтма катышкан барабардык экен.

Ал эмиавторлору Н. Ибраева, А. Касымов болушкан 2009 жылы жарыкка чыккан “Алгебра. 7-класс” деген окуу китебинде теңдемеге мындай аныктама беришет:

Аныктама: Теңдеме деп тамгалуу барабардыкты айтып жүрөбүз.

Мына ошентип, теңдеме түшүнүгүнүн маңызын ачып берүүдө функционалдык жана матлогиканын аныктамаларына таянган (айтылыш формасы) сыяктуу эки жолду колдонуу мүмкүн. Бирок бул эки мүмкүнчүлүктү бири-бирине карама-каршы коюу туура эмес иш болор эле. Алардын ар бири, белгилүү өлчөмдө, теңдемелерди чыгаруунун теориялык да, практикалык да маселелерине таасир калтырат.

Конкреттүү-индуктивдик жолду колдонуу менен, ал 7-класстын окуучуларынын жаш өзгөчөлүктөрүнө көбүрөөк ылайык келүүчү, бир өзгөрмөсү бар теңдеме түшүнүгүн киргизип, аны чыгаруу алгоритимине окуучуларды ээ кылабыз. Бул ишти төмөндөгүчө аткарууга болот.

$3х=6$, $-0.6х=0$, $-х=-7.5$ теңдемелеринин ар бири $ах=в$ түрүндө болот, мында х-өзгөрмө, а жана в- сандар. Биринчи теңдемеде а=3, в=6, экинчисинде а= -0.6, в=0, үчүнчүсүндө а=-1, в=-7.5.

Аныктама: ах=в түрүндөгү теңдеме бир өзгөрмөсү бар сызыктуу теңдеме деп аталат. Мында х өзгөрмө, а жана в- кандайдыр бир сандар жана а жана в ны коэффициенттер деп да коюшат.

Сызыктуу теңдеме канча тамырга ээ болорун изилдейли. Мейли, а коэффициенти нөлгө барабар болбогон ах=в сызыктуу теңдемесин карайлы. Теңдеменин эки бөлүгүн тең а га бөлүп, $x=\frac{в}{a}$ ны алабыз. Демек, а≠0 болгондо, ах=в сызыктуу теңдемеси жалгыз тамыр $\frac{в}{a}$ га ээ болот.Эми а коэффициенти нөлгө барабар болгон ах=в сызыктуу теңдемесин карайбыз. Эгер а=0 жана в≠ 0 болсо, анда ах=в теңдемесинин тамыры болбойт, себеби ах=в барабардыгы эч качан х те туура болбойт. Эгер а=0 жана в=0 болсо, анда х тин каалаган мааниси теңдеменин тамыры болот, себеби 0х=0 барабардыгы х тин каалагандай маанисинде туура болот.

Ошентип, ах=в сызыктуу теңдемеси а=0 болгондо бир тамырга ээ, а=0 жана в≠ 0 болгондо тамырга ээ эмес, а=0 жана в=0 болгондо чексиз көп тамырга ээ болорун көрдүк.

Андан ары бир катар мисалдарды максатка ылайык келтирели. 4(х+7) =3-х теңдемесин чыгаралы. Кашааларды ачабыз:

$$4x+28=3-x$$

Окшош кошулуучуларын жыйнайбыз:

$$5x=-25$$

Эки бөлүгүн тең 5 ке бөлөбүз:

$$x=-5$$

Теңдемелердин касиеттерин пайдаланып жана теңдеш өзгөртүүлөрдү аткарып, биз удаалаш түрдө бир теңдемени ага тең күчтүү болгон экинчи теңдеме менен алмаштырдык. Демек, 4(х+7) =3-х теңдемесинин тамыры -5 саны болот.

Программанын талабына ылайык, 7- класстын алгебрасынын акыркы бөлүмүндө сызыктуу теңдемелердин системасын окуп үйрөнүү каралган. Бөлүмдүн мазмуну төмөндөгүчө: эки өзгөрмөсү бар сызыктуу теңдемелер, эки өзгөрмөсү бар сызыктуу теңдемелер жана аларды чыгаруу ыкмалары, теңдемелер системасын түзүү аркылуу маселелерди чыгаруу. Тарыхый маалыматтар.

Эки өзгөрмөсү бар сызыктуу теңдеме түшүнүгүнө конкреттүү индуктивдик ыкманы колдонуп, төмөнкүдөй жөнөкөй эле маселени кароо менен окуучуларды жаңы түшүнүктүн аныктамасына алып келүүгө болот.

Эки сандын бирөө экинчисинен 5 ке чоң экени белгилүү дейли. Эгерде биринчи санды х тамгасы менен, ал эми экинчисин у тамгасы менен белгилесек, анда алардын арасындагы байланышты эки өзгөрмөсү бар х-у=5 барабардыгы түрүндө жазууга болот. Мындай барабарсыздыктар эки өзгөрмөсү бар теңдемелер же эки белгисизи бар теңдемелер деп аталат.

Эки өзгөрмөсү бар теңдемелердин башка мисалдарын келтирели: 5х+2у=10, -7х+у=5, $x^2+y^2=20$, ху =12. Бул теңдемелердин ичинен биринчи экөө ах+ву=с түрүнө ээ болот, мында а,в жана с - сандар. Мындай теңдемелер эки өзгөрмөсү бар сызыктуу теңдемелер деп аталат.

Аныктама: Эки өзгөрмөсү бар сызыктуу теңдеме деп ах+ву=с түрүндөгү теңдеме аталат, мында х жана у - өзгөрмөлөр, ал эми а,в жана с - белгилүү сандар.

х-у=5 теңдемеси х=8, у=3 болгондо, 8-3=5 туура барабардыка айланат. Өзгөрмөлөрдүн түгөй маанилери х=8, у=3 ушул теңдеменин чыгарылышы деп аталат.

Аныктама: Эки өзгөрмөсү бар теңдеменин чыгарылышы деп ушул теңдемени туура барабардыкка айландыруучу өзгөрмөлөрдүн түгөй маанилери аталат.

Ошондой эле төмөнкү түгөйлөр $x-y=5$ теңдемесинин чыгарылышы болорун текшерүү кыйын эмес: $x=105$, $y=100$, $x=4$, $y=-1$, $x=3,5$, $y=-1,5$. Кээде өзгөрмөлөрдүн түгөй маанилерин кыскача мындай жазышат, (105; 100), (4; -1), (3,5; -1,5).

Аналогия методун колдонуу аркылуу окуучулардын активдүү акыл иш-аракеттерине таянуу менен, андан ары эки өзгөрмөлүү теңдемелердин тең күчтүүлүгү жөнүндөгү төмөнкүдөй ырастоолорду берүүгө болот.

Бир өзгөрмөсү бар теңдемелер кандай касиеттерге ээ болушса, эки өзгөрмөсү бар теңдемелер ошондой эле касиеттерге ээ болушат:

1) эгерде теңдемеде кошулуучуну анын белгисин өзгөртүп, теңдеменин бир бөлүгүнөн экинчи бөлүгүнө көчүрсөк, анда берилген теңдемеге тең күчтүү теңдеме келип чыгат.

2) эгерде теңдеменин эки бөлүгүн тең нөлдөн башка бир эле санга көбөйтсөк же бөлсөк, анда берилген теңдемеге тең күчтүү теңдеме келип чыгат.

Төмөнкү теңдемени карап көрөбүз:

$$5x+2y=12 \qquad (1)$$

Теңдемелердин касиеттерин пайдаланып, бул теңдемеден бир өзгөрмөнү экинчиси аркылуу, маселен, өзгөрмө у ти х аркылуу туюнтабыз. Ал үчүн кошулуучу 5х ти, анын белгисин өзгөртүп, теңдеменин оң бөлүгүнө көчүрөбүз:

$$2y=-5x+12,$$

Бул теңдеменин эки бөлүгүн тең 2 ге бөлөбүз:

$$y=-2,5x+6 \qquad (2)$$

(2) теңдеме (1) теңдемеге тең күчтүү. $y=-2,5x+6$ формуласын пайдаланып, (1) теңдеменин көп чыгарылыштарын табууга болот. Аны үчүн каалагандай х ти алуу жана ага туура келген у тин маанисин эсептөө жетиштүү.

Маселен,

эгер $x=2$, анда $y=-2,5\cdot2+6=1$;

эгер $x=0,4$ болсо, анда $y=-2,5\cdot 0,4+6=5$

Түгөй сандар (2;1), (0,4; 5) (1) теңдеменин чыгарылыштары. Теңдеме чексиз көп чыгарылыштарга ээ болот (1).

Кийинки темада $3x+2y=6 \sim y=-1,5x+3$ сыяктуу конкреттүү мисалды кароо менен, окуучулардын сызыктуу функция жөнүндөгү билимине таянуу аркылуу өзгөрмөлөрдүн коэффициенттеринин жок дегенде бирөө нөлгө барабар болбогон эки өзгөрмөсү бар сызыктуу теңдеменин графиги түз сызык болот деген корутундуга келебиз.

Эми окуучуларды жогоркудай даярдоо иштеринен кийин алар эки өзгөрмөсү бар сызыктуу теңдемелердин системасы жана анын чыгарылыштарын өздөштүрүүгө толук мүмкүнчүлүктөрү бар. Маселе кароодон жана ага ылайык теңдемелерди түздүрүүдөн баштайбыз.

Эки сандын суммасы 12 ге барабар, ал эми алардын айырмасы 2 ге барабар. Ушул сандарды тапкыла.

Биринчи санды х тамгасы, ал эми экинчисин у тамгасы менен белгилейбиз. Маселенин шарты боюнча эки сандын суммасы 12 ге барабар, б.а.,

$$x+y=12$$

Сандардын айырмасы 2 ге барабар болгондуктан, $x-y=2$ болот.

Биз эки өзгөрмөсү бар эки теңдеме түздүк. Маселенин суроосуна жооп берүү үчүн $x+y=12$ жана $x-y=2$ теңдемелеринин ар бирин туура барабардыкка айландыруучу өзгөрмөлөрдүн маанилерин, б.а., ушул теңдемелердин жалпы чыгарылыштарын табуу керек. Мындай учурда теңдемелердин системасын чыгаруу талап кылынат деп айтышат.

Теңдемелердин системасын фигуралык кашаанын жардамы менен жазуу кабыл алынган. Түзүлгөн теңдемелердин системасын мындай жазууга болот:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Өзгөрмөлөрдүн түгөй маанилери x=7, y=5 системасынын ар бир теңдемесинин чыгарылышы болот, себеби 7+5=12 жана 7-5 =2 эки барабардыгы тең туура барабардыктар болот. Мындай түгөйдү (7;5) системанын чыгарылышы деп аташат.

Эки өзгөрмөсү бар теңдемелердин системасынын чыгарылышы деп системанын ар бир теңдемесин туура барабардыкка айландыруучу өзгөрмөлөрдүн түгөй маанилери аталат.

Сызыктуу теңдемелердин системасын чыгаруунун ордуна коюу жана кошуу жолдорун берүү программада талап кылынат. Бул ыкмалардын маңызы мисалдар аркылуу төмөндөгүчө ачылып берилет.

Эки өзгөрмөсү бар сызыктуу теңдеменин системасын ордуна коюу жолу менен чыгарууда төмөнкүдөй иштешет:

1) системанын кандайдыр бир теңдемесинде бир өзгөрмөнү экинчи аркылуу туюндурушат;

2) алынган туюнтманы системанын башка теңдемелериндеги ушул өзгөрмөнүн ордуна коюшат;

3) келип чыккан бир өзгөрмөсү бар теңдемени чыгарышат;

4) экинчи өзгөрмөнүн тиешелүү маанисин табышат.

Мисал. Төмөнкү теңдемелердин системасын чыгарабыз:

$$\begin{cases} 7x + 6y = 6 \\ 3x + 4y = 9 \end{cases}$$

Экинчи теңдемеден x ти y аркылуу туюнтабыз:

$$3x = 9 - 4y, \quad x = \frac{9 - 4y}{3}$$

Биринчи теңдемеге x тин ордуна $\frac{9 - 4y}{3}$ туюнтмасын коёбуз:

$$7 \cdot \frac{9 - 4y}{3} + 6y = 6$$

Келип чыккан бир y өзгөрмөсү бар теңдемени чыгарабыз:

$$7 \cdot (9-4y) + 3 \cdot 6y = 3 \cdot 6$$
$$63 - 28y + 18y = 18,$$
$$-10y = -45,$$
$$y = 4{,}5$$

$x = \frac{9 - 4y}{3}$ теңдемесиндеги y тин ордуна 4,5 санын коёбуз:

$$x = \frac{9 - 4 \cdot 4{,}5}{3}, \quad x = -3$$

Жообу: x=-3,y=4,5

Кошуу жолу менен системаларды чыгарууда ордуна коюу жолу менен чыгаргандай эле биз берилген системадан ага тең күчтүү болгон башка системага өтөбүз, бул системада теңдемеде бир гана өзгөрмө болот.

Төмөнкү системаны чыгартабыз:

$$\begin{cases} 5x + 11y = 8 \\ 10x + 7y = 74 \end{cases}$$

Системанын теңдемелерин мүчөлөп кошуу өзгөрмөлөрдүн бирөөнү жок кылууга алып келбейт. Эгер биринчи теңдеменин бардык мүчөлөрүн -2 ге көбөйтсөк, ал эми экинчи теңдемени өзгөртүүсүз калтырсак, анда алынган теңдемелерде x тин коэффициенттери карама-каршы сандар болушат:

$$\begin{cases} -10x-22y=-16 \\ 10x-7y=74 \end{cases}$$

Эки мүчөлөп кошуу бир өзгөрмөсү бар -29y = 58 теңдемесине алып келет. Бул теңдемеден y =-2 санын таап, x тин маанисин табабыз:

$$10x-7\cdot(-2)=74,$$
$$10x=60,$$
$$x=6.$$

Жообу: x=6, y=-2.

Теңдемелер системасын чыгарууда симметриялуу көп мүчөлөрдүн өзүнчө орду бар. Симметриялуу көп мүчө деген эмне? Мектептин алгебрасындагы алган ордуна кыскача токтололу.

Аныктама: Эки өзгөрмөлүү P(x,y) көп мүчөсүнүн өзгөрмөлөрүн орун алмаштыруудан P(x,y) көп мүчөсү өзгөрүлбөсө, анда ал көп мүчөнү симметриялуу деп айтабыз.

Мисалы: $x+y$, xy, x^2+y^2, $x^2+2xy+y^2$, $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. Эң жөнөкөй симметриялуу көп мүчө болуп $x+y$, xyкөп мүчөлөрү эсептелет, аларды $\sigma_1=x+y$, $\sigma_2=xy$ атайын белгилөө менен белгилешет жана σ_1 , σ_2 элементардык симметриялуу көп мүчөлөр деп аталат. Каалагандай эле симметриялуу көп мүчөлөрдү σ_1, σ_2 элементардык симметриялуу көп мүчөлөр менен туюнтуларын карайлы. Мейли,симметриялуу көп мүчөx^2y+y^2x берилсин. $x^2y+y^2x=xy(x+y)=\sigma_1\sigma_2$.

$x+y-x^2y-y^2x=(x+y)(1-xy)=\sigma_1-\sigma_1\sigma_2$.

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\sigma_1{}^2-2\sigma_2$.

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)((x+y)^2-3xy)=\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2$.

Төмөндөгү маанилүү теореманы далилдейли.

Теорема. Калагаандай эле P(x,y) симметриялуу көп мүчөсүн $\sigma_1=x+y$, $\sigma_2=xy$ элементардык көп мүчөлөр менен туюнтууга болот.

Бул теореманы далилдөөдөн мурда, төмөнкү лемманы далилдөөгө туура келет.

Лемма. Ар бир даражалуу сумма, σ_1жана σ_2элементардык симметриялуу көп мүчөлөр менен туюнтулат.

Далилдөө. Бир канча даражалуу суммаларды карайлы:

$S_1=x+y=\sigma_1$

$S_2=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\sigma_1{}^2-2\sigma_2$

$S_3=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)((x+y)^2-3xy)=\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2$

Ушул сыяктуу эле $S_n=x^n+y^n$ndаражалуу сумманы σ_1жана σ_2 элементардык симметриялуу көп мүчөлөр менен туюнталы, ал үчүн $S_{k-1}=x^{k-1}+y^{k-1}$ суммасынын эки жагын $\sigma_1=x+y$ элементардык симметриялык көп мүчөгө көбөйтөлү

$$(x+y)S_{k-1}=(x+y)(x^{k-1}+y^{k-1})=x^k+xy^{k-1}+yx^{k-1}+y^k$$
$$=S_k+xy(y^{k-2}+x^{x-2})=S_k+\sigma_2S_{k-2}$$

$\sigma_1S_{k-1}=S_k+\sigma_2S_{k-2}$ $\qquad S_k=\sigma_1S_{k-1}-\sigma_2S_{k-2}$ Леммадалилденди.

Теореманын далилдөөсүн карайлы. Каалагандай эле симметриялуу көп мүчө эки типтеги кошулуучуларды өзүнө кармары белгилүү. Биринчи типтеги кошулуучу kx^ly^l түрүндө болот жана $kx^ly^l=k\sigma_2{}^l$ элементардык симметриялуу көп мүчө менен туюнтулат.

Экинчи типтеги кошулуучу$kx^{l_1}y^{l_2}$ $(l_1\neq l_2)$ түрүндө болот, бирок көп мүчө симметриялуу болгондуктан, $ky^{l_1}x^{l_2}$ бир мүчөсүн да кармайт. Анда көп мүчөгө $k(y^{l_1}x^{l_2}+x^{l_1}y^{l_2})$ түрүндөгү эки мүчө да кирет. Тактык үчүн $l_1<l_2$; деп алып жогорку эки мүчөнү мындай жазалы $k(y^{l_1}x^{l_2}+x^{l_1}y^{l_2})=k(xy)^{l_1}(y^{l_2-l_1}+x^{l_2-l_1})=k\sigma_2{}^{l_1}S_{l_2-l_1}$. Лемма боюнча $S_{l_2-l_1}$ даражалуу суммасы элементардык симметриялуу көп мүчө менен туюнтулат. Теорема толугу менен далилденди.

Мисалдарды карайлы. Мейли, төмөндөгүдөй теңдемелер системасы берилсин: 1-мисал $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$

Чыгаруу үчүн $a=x+y$, $b=xy$ белгилөөсүн киргизели. Анда теңдемелер системасы

$\begin{cases} a=5 \\ a^2-3b=7 \end{cases}$ түрүнө келет жана $25-3b=7 \Rightarrow b=6$ Жыйынтыгында

$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$ жоопторун алабыз.

2-мисал. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+xy+y=2. \end{cases}$ бултеңдеме симметриялуу болгондуктан, $\sigma_1=x+y,\ \sigma_2=xy.$ Элементардык симметриялуу көп мүчө менен туюнтабыз, анда

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=\sigma_1{}^2-\sigma_2$ жана $x+xy+y=\sigma_1+\sigma_2$ болот.

Демек, $\begin{cases} \sigma_1{}^2-\sigma_2=4, \\ \sigma_1+\sigma_2=2. \end{cases}$ теңдемелер системасына ээ болобуз. Алынган теңдемелерди кошуп, $\sigma_1{}^2+\sigma_1-6=0$. σ_1 карата квадраттык теңдемеге ээ болобуз, аны чыгарып $\sigma_1=2$ $,\sigma_1^{'}=-3$ деген тамырларын алабыз жана $\sigma_1+\sigma_2=2$, $\sigma_2=0$, $\sigma_2^{'}=5$ $\sigma_1=x+y, \sigma_2=xy$ болгондуктан, $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=0 \end{cases}$ же $\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=5 \end{cases}$ системаларына ээ болобуз. Бул системаларды чыгарып, эки чыгарышты алабыз: $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=0, \\ y_2=2. \end{cases}$

Жыйынтыктап айтканда, мектептин алгебра курсу боюнча окуу китебинде окуучулардын жаш өзгөчөлүгүн эске алуу менен теңдеме түшүнүгү киргизилген жана сызыктуу теңдеме, квадраттык теңдеме, рационалдуу теңдеме, иррационалдуу теңдеме,көрсөткүчтүү теңдеме, логарифмалык теңдеме, тригонометриялык теңдеме жана теңдемелер системасы ар кайсы класстарда окутулат. Окуучулар теңдемелерди чыгаруу жолдорун өздөштүрүүнү улантышат. Мугалим окутуунун тиешелүү деңгээлине жетүү боюнча программанын талабын аткаруу багытында системалуу түрдө иш-аракеттерди жүргүзүүгө милдеттүү.

Адабияттар:

1. Алгебра: Орто мектептердин 7-классы үчүн окуу китеби /С.А.Теляковскийдин редакциясы астында. -Б., 1998.
2. Ибраева Н.И., Касымов А.А. Алгебра: Жалпы билим берүүчү орто мектептердин 7-кл.үчүн окуу китеби. -Б.: ”Aditi” басмасы, 2009.-168 б.
3. Алгебра: Орто мектептин 8-классы үчүн окуу китеби./ С. А. Теляковскийдин редакциясы астында. -Б., 1995.
4. БайзаковА., СаадабаевА., Ыбыкеева Ж.Алгебра: Жалпы билим берүүчү орто мектептердин 8-кл.үчүн окуу китеби. 1-бас. -Б.: ”Aditi” басмасы, 2009.-208 б.
5. Алгебра Орто мектептин 9-классы үчүн окуу китеби. /С.А.Теляковскийдин редакциясы астында. -Б., 1997.
6. . ИманалиевМ., АсановА., ЖусуповК., Искандаров С.Алгебра: Жалпы билим берүүчү орто мектептердин 9-кл.үчүн окуу китеби. 1-бас. -Б.: Педагогика, 2002.-204 б.
7. Алгебра в 6-8 классах: пособие для учителя /Сост. Ю.Н.Макарычев,

Н.Г.Миндюк. -М.: Просвещение, 1988.
8. Бекбоев И.Б. ж.б. Математика: Орто мектептин 5-кл. үчүн окуу китеби. -Б.: Педагогика, 2003.
9. Бекбоев И.Б. ж.б. Математика: Орто мектептин 6-кл. үчүн окуу китеби. -Б.: Шам, 1999.
10. Бекбоев И.Б.,Айылчиев А.А.,Абдиев А.,Салыков С.Математиканы 5-6-кл. окутуу: Мугалимдер үчүн методикалык колдонмо.-Б.: Педагогика, 2003.