УДК: 517.(075.8)

Шарипов С., физ.-мат. илим. канд., доцент,
Турдиев Д., магистрант,
Бапа кызы Айнура, bapakyzya@iksu.kg
К.Тыныстанов ат. ЫМУ

НЬЮТОН-ЛЕЙБНИЦ БОЮНЧА ДИФФЕРЕНЦИЯЛАНБООЧУ ФУНКЦИЯЛАР ҮЧҮН ЛАГРАНЖ ТИБИНДЕГИ ТЕОРЕМАНЫ МИСАЛДАР МЕНЕН БЫШЫКТОО

Үзгүлтүксүз функцияларды изилдөөнүн негизги инструменти болгон Ньютон-Лейбниц боюнча туундусун колдонуу сферасына үзгүлтүксүз, бирок Ньютон-Лейбниц боюнча туундуга ээ эмес функциялар кирбейт.

Мындай функцияларды изилдөө С.Шариповдун эмгектеринде түзөтүлгөн туунду түшүнүгүн киргизүү менен оң жагына чечилип, урчуктуу функциялардын классына Ньютон-Лейбниц негиздеген дифференциалдык эсептөөнүн негизги жоболорун жайылтуу ишке ашырылып жатат.

$$C(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 \le t \le a \\ \psi(t), & a \le t \le T \end{cases}$$

функциясы берилсин жана ал төмөнкүдөй шарттарды канааттандырсын:

$$\varphi(a-0) = \psi(a+0) \qquad \varphi'(a-0) \neq \psi'(a+0).$$

Макалада жогоруда көрсөтүлгөн урчуктуу деп аталган, үзгүлтүксүз, бирок айрым чекиттерде Ньютон-Лейбниц боюнча туундуга ээ эмес функциялардын түзөтүлгөн туундусу жана бул функциялардын дифференциалдык эсептөөлөрүнө тийиштүү маселелер каралган. Дифференциалдык эсептөөлөрдүн негизги теоремаларынын бири болуп саналган Лагранж тибиндеги теореманын урчуктуу функциянын түзөтүлгөн туундусу үчүн орун алышы, үзгүлтүктүү функция үчүн коюлган дифференциалдык теңдеменин жардамы менен Шарипов тарабынан каралган, макалада ал мисалдар менен бышыкталган.

***Өзөктүү сөздөр**: урчуктуу функция, Ньютон-Лейбниц боюнча туундуга ээ эмес функция, Шарипов боюнча түзөтүлгөн туунду, үзгүлтүктүү функциялар үчүн дифференциалдык теңдеме, Лагранж тибиндеги теорема.*

Шарипов С. канд. физ.-мат. наук, доцент

Турдиев Д., магистрант
Бапа кызы Айнура, bapakyzya@iksu.kg
ИГУ им. К.Тыныстанова

ПОДКРЕПЛЕНИЕ ПРИМЕРАМИ ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛАГРАНЖ ДЛЯ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ПО НЬЮТОНУ-ЛЕЙБНИЦУ

В сферу применения производных по Ньютону-Лейбницу, являющихся основным инструментом при исследовании непрерывных функций, не входят функции, которые непрерывны, но не имеют производную по Ньютону-Лейбницу.

Исследование таких функций проводится в работах Шарипова С., с введением нового понятия исправленной производной и в классе, так называемых урчуктных функций распространяются основные положения дифференциального исчисления, обоснованные Ньютоном-Лейбницом.

Пусть задана функция: $$C(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 \le t \le a \\ \psi(t), & a \le t \le T \end{cases},$$

которая удовлетворяет условиям:

$$\varphi(a-0) = \psi(a+0) \qquad \varphi'(a-0) \neq \psi'(a+0).$$

В данной статье авторами рассмотрены исправленные производные и задачи дифференциального исчисления для вышеуказанных функций, непрерывных, но не имеющих производную по Ньютону-Лейбницу, которые называются урчуктными функциями. Теорема в *смысле Лагранжа, именуемая основной теоремой дифференциального исчисления, которая имеет место для исправленных производных урчуктных функций, рассмотрена Шариповым с помощью дифференциального уравнения для урчуктных функций, в статье она подтверждается примерами.*

Ключевые слова: *урчуктная функция, функция, не имеющая производной по Ньютону-Лейбницу, исправленная производная по Шарипову, дифференциальное уравнение для разрывных функций, теорема в смысле Лагранжа.*

Sharipov S., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Turdiev D., master student
Bapa Kyzy Ainura, E-mail: bapakyzya@iksu.kg
IKSU named after K.Tynystanov

FIXING THE LANRANGE TYPE THEOREM FOR UNDIFFERENTIATED NEWTON LEIBNIZ FUNCTIONS WITH EXAMPLES

Newton Leibniz derivatives, which are the main tool for the study of continuous functions, do not include functions that are continuous but do not have a Newton Leibniz derivative.

The study of such functions is carried out in the works of Sharipov S., with the introduction of the new concept of a corrected derivative and in the class of so-called urchukt functions, the basic provisions of differential calculus justified by Newton-Leibniz apply.

Let the function be given: $C(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 \le t \le a \\ \psi(t), & a \le t \le T \end{cases}$,

which satisfies the conditions:

$$ц(a-0) = \psi(a+0) \qquad ц'(a-0) \neq \psi'(a+0).$$

In this article, the authors consider the corrected derivatives and problems of differential calculus for the above functions, continuous, but not having a Newton-Leibniz derivative, which are called urchuk functions. The theorem in the sense of Lagrange, called the main theorem of differential calculus, which takes place for corrected derivatives of urchuk functions, is considered by Sharipov using a differential equation for urchuk functions, in the article it is confirmed by examples.

Key words: *urchuk function, a function, that does not have a Newton-Leibniz derivative, a corrected Sharipov derivative, a differential equation for discontinuous functions, a Lagrange theorem.*

Төмөндөгү барбардык менен туюнтулуучу, $[0,1]$ кесиндисинде аныкталган $y = f(x)$ функциясы берилсин:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Бул функция $x = \frac{1}{2}$ чекитинде үзгүлтүксүз:

$$f\left(\frac{1}{2}-0\right) = \frac{1}{2}, \qquad f\left(\frac{1}{2}+0\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

бирок ушул чекитте:

$$f'\left(\frac{1}{2}-0\right) = 1, \qquad f'\left(\frac{1}{2}+0\right) = -1$$

сол жактагы жана оң жактагы чектелген туундулар бар, бирок алар барабар эмес, демек, функция бул чекитте Ньютон-Лейбниц боюнча туундуга ээ эмес [1, 226].

Мындай функцияларды изилдөөчү С.Шарипов изилдеп чыгып, аларды **урчуктуу функциялар** деп атап, алар үчүн жогорудагы мисалдагы $x = \frac{1}{2}$ чекити сыяктуу урчук чекиттеринде түзөтүлгөн туунду түшүнүгүн киргизген [5], [6], [7].

С.Шарипов өзүнүн илимий эмгектеринде мындай урчуктуу функцияларды жана түзөтүлгөн туундуну экономикада, биологияда, башкаруу теориясында колдонууга мүмкүн экендигин ачып көрсөтүүдө.

$$C(t) = \begin{cases} \text{ц}(t), & t_0 \le t \le a \\ \psi(t), & a \le t \le T \end{cases} \qquad (1)$$

функциясы берилсин жана ал төмөнкүдөй шарттарды канааттандырсын:

$$\text{ц}(a-0) = \psi(a+0) \qquad (2)$$

$$\text{ц}'(a-0) \ne \psi'(a+0). \qquad (3)$$

Мында $\text{ц}(a-0) = \lim_{t\to a-0} \text{ц}(t)$, $\psi(a+0) = \lim_{t\to a+0} \psi(t)$

$$\text{ц}'(a-0) = \lim_{t\to a-0} \text{ц}'(t), \qquad \psi'(a+0) = \lim_{t\to a+0} \psi'(t)$$

(2) шарты $C(t)$ функциясы $t = a$ чекитинде үзгүлтүксүз экендигин, ал эми (3) шарты $C(t)$ функциясы $t = a$ чекитинде сол жак жана оң жак туундуларга ээ экендигин, бирок бул чекитте функция Ньютон-Лейбниц боюнча дифференцияланбоочу экендигин билдирет.

Туундуну аныктоо үчүн С.Шариповдун кёз карашы боюнча λ_1, λ_2 кичине оң чоңдуктары алынат: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ жана $\lambda_1 \to 0$, $\lambda_2 \to 0$.

Аныктама. Эгерде

$$\lim_{\substack{\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to 0}} \frac{C(t+\lambda_2) - C(t-\lambda_1)}{\lambda_1+\lambda_2} \qquad (4)$$

предели бар болсо, анда ал (1) – (3) функциясынын ***Шарипов боюнча түзөтүлгөн туундусу*** деп аталат жана $isC'(A,a,t)$ түрүндө белгиленет [2].

Бул предел төмөнкүгө барабар болот:

$$\lim_{\substack{\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to 0}} \frac{C(t+\lambda_2) - C(t-\lambda_1)}{\lambda_1+\lambda_2} = \begin{cases} \text{ц}'(t), & t_0 \le t < a \\ \text{ц}'(a-0)+[\psi'(a+0) - \text{ц}'(a-0)]A, & t = a \\ \psi'(t), & a < t \le T \end{cases}$$

Демек,

$$isC'(A,a,t) = \begin{cases} \text{ц}'(t), & t_0 \le t < a \\ \text{ц}'(a-0)+[\psi'(a+0) - \text{ц}'(a-0)]A, & t = a \\ \psi'(t), & a < t \le T \end{cases} \qquad (5)$$

Мында $\quad A = \lim_{\substack{\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to 0}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ жана $A \in [0,1]$ (6)

A чоңдугунун бир эле пределдик маанисин аныктаган (λ_1, λ_2) түгөйлөрү ***эквиваленттүү түгөйлөр*** деп аталышат. Мындай эквиваленттүү түгөйлөрдүн ар бир классы бир түзөтүлгөн туундуну аныктайт. Демек, $C(t)$ функциясы $t = a$ чекитинде чексиз көп түзөтүлгөн туундуларга ээ болот. Ал

$$isC'(A,a,a) = \text{ц}'(a-0) + [\psi'(a+0) - \text{ц}'(a-0)]A, \quad A \in [0,1] \quad t = a \qquad (7)$$

формуласы менен туюнтулат [2]. Ал эми $C(t)$ функциясынын графигинин $t = a$ чекити ***урчуктуу чекит*** деп аталат. Ньютон-Лейбниц боюнча дифференцияланбаган, ошондой эле түзөтүлгөн туундуга ээ болбогон үзгүлтүксүз функциялар бар болгондуктан, С.Шарипов төмөнкүдөй аныктама киргизет:

Аныктама. Эгерде функция түзөтүлгөн туундуга ээ болсо, аны ***урчуктуу функция*** деп атайбыз.

(1) үзгүлтүксүз урчуктуу функциясы чектүү түзөтүлгөн туундуга ээ болот. (5) түзөтүлгөн туундусу $[t_0, T]$ кесиндисинде А параметринен көз каранды болгон, б.а., $t = a$ чекитинде чексиз көп маанини кабыл алган биринчи түрдөгү үзгүлтүктүү функцияны берет.

С.Шарипов өзүнүн урчуктуу функциялардын түзөтүлгөн туундулары теориясында Лагранждын теоремасы сыяктуу маанилүү теорема дагы аткарыларын көрсөткөн [7].

$$C(t) = \begin{cases} ц(t), & t_0 \le t \le a \\ \psi(t), & a \le t \le T \end{cases} \quad (8)$$

функциясы берилсин жана ал төмөнкүдөй шарттарды канааттандырсын:

$$ц(a-0) = \psi(a+0) \quad (9)$$

$$ц'(a-0) \neq \psi'(a+0). \quad (10)$$

Анын түзөтүлгөн туундусу

$$isC'(A,a,t) = \begin{cases} ц'(t), & t_0 \le t < a \\ ц'(a-0) + [\psi'(a+0) - ц'(a-0)]A, & t = a \\ \psi'(t), & a < t \le T \end{cases}$$

$$isC'(A,a,t) = ц'(a-0) + [\psi'(a+0) - ц'(a-0)]A, \quad t = a$$

Үзгүлтүктүү функциялар үчүн төмөндөгүдөй түрдөгү дифференциалдык теңдемени карайлы:

$$y' = Csc'(A,a,t) - в\ ,\ t \in [t_0, T]\ ,\ A \in (0,1) \quad (11)$$

Мындай түрдөгү үзгүлтүктүү функциялар үчүн дифференциалдык теңдемелер С.Шарипов тарабынан биринчи жолу киргизилип, теориялык жактан изилденип жатат.

(11) теңдеменин чыгарылышы $y(t_0) = 0$, $y(T) = 0$ (12) четтик шарттарын канагаттандыра тургандай, азырынча белгисиз в саны жашаарын көрсөтөлү. Башкача айтканда бул теңдеменин жардамы менен Ньютон-Лейбниц боюнча дифференцияланбоочу функциялар үчүн Лагранж тибиндеги теореманын бар болушун көрсөтөлү жана аны мисалдарда бышыктайлы.

Чыгарылышты:

$$y = \int_{t_0}^{t} [isc'(A,a,s) - в\,]ds = c(t) - c(t_0) - в(t - t_0), \qquad t \in [t_0, T]$$

түрүндө издейбиз.

Демек, чыгарылыш $y = c(t) - c(t_0) - в(t - t_0), \quad t \in [t_0, T]$

түрүндө болот. Четтик шарттардан улам:

$$y(t_0) = c(t_0) - c(t_0) - в(t_0 - t_0) = 0$$

$$y(T) = c(T) - c(t_0) - в(T - t_0) = 0$$

$$в = \frac{c(T) - c(t_0)}{T - t_0} \quad (13)$$

болору келип чыгат. Анда (11) теңдеменин (12) четтик шарттарды канагаттандырган чыгарылышы:

$$y = c(t) - c(t_0) - \frac{c(T) - c(t_0)}{T - t_0}(t - t_0)\ , \quad t \in [t_0, T] \quad (14)$$

Бул чыгарылышка көңүл бурсак, мында кадимки классикалык Лагранж теоремасын далилдөөдө колдонулуучу жардамчы функция келип чыкты.

Бул жерде бизди $t = с$ чекити $t = a$ чекити менен дал келген учур, б.а., (14) функция Ньютон-Лейбниц боюнча туундуга ээ болбогон учур кызыктырат. Бул жерде үзгүлтүктүү функциялар үчүн маанилүү формулалардын бири болгон

$$is\ \langle'(A,a,a) = \frac{c(T) - c(t_0)}{T - t_0} \quad (15)$$ формуласын алабыз

Мындан Ньютон-Лейбниц боюнча дифференцияланбоочу функциялар үчүн Лагранж тибиндеги теореманы дифференциалдык теңдемелер үчүн коюлуучу Коши маселесин кеңейтүү аркылуу алууга боло тургандыгы бышыкталды.

Теорема 2. ***(С.Шарипов далилдеген урчуктуу функция үчүн Лагранж тибиндеги теорема)*** $C(t)$ функциясы төмөнкүдөй шарттарды канааттандырсын:

1) $C(t)$ функциясы $[t_0, T]$ кесиндисинде аныкталган урчуктуу функция болсун, $t = a,\ t_0 < a < T$ чекити урчук чекити болсун

2) $A = \frac{1}{\psi'(a+0) - \text{ц}'(a-0)} \left[\frac{c(T)-c(t_0)}{T-t_0} - \text{ц}'(a-0) \right]$

(0,1) кесиндисине тиешелүү болсо, анда $C(t)$ урчуктуу функциясы үчүн $t = a,\ t_0 < a < T$ чекитинде:

$$isC'(A,a,a) = \frac{c(T)-c(t_0)}{T-t_0}$$

формуласы орун алат.

Урчуктуу функция үчүн Лагранж тибиндеги маселени мисалдарда аткарыш үчүн, берилген негизги хордага параллель болгон жаныманы түзүшүбүз керек. Ал үчүн α, β чоңдуктарын киргизебиз:

Мейли, β> α болсун; в $\in (t_0, a)$ б $\in (a, T)$

Маселени чечүү үчүн төмөнкү формуланы колдонобуз:

$$\frac{\psi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\beta - \alpha} = \mathrm{isc}'(A, a, t)$$

б, в абсциссаларына таянган хорда берилген бурчтук коэффициенти $isc'(A, a, t)$ га барабар болгон жанымa сызыкка параллель болот.

Мисал 1. $C(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 1-t, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$

функциясы берилсин. Бул функция үчүн Лагранждын теоремасы аткарылбай турганы Г.М.Фихтегольцтун «Курс математического анализа» китебинин I томунда айтылган [1: 226].

Мында $\text{ц}(t) = t,\ t \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right],\quad \text{ц}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2},$

$$\psi(t) = 1 - t, \qquad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ \ \psi\left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{ц}'(t) = 1, \qquad \text{ц}'\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 1$$

$$\psi'(t) = -1,\ \ \psi'\left(\frac{1}{2} + 0\right) = -1.$$

Демек,

$$\text{ц}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \psi\left(\frac{1}{2} + 0\right) \ \text{ жана } \ \text{ц}'\left(\frac{1}{2} - 0\right) \ne \psi'\left(\frac{1}{2} + 0\right)$$

шарттары аткарылып жатат. Берилген функция $t=\frac{1}{2}$ чекитинде үзгүлтүксүз, бирок бул чекитте Ньютон-Лейбниц боюнча туундуга ээ эмес.

Демек, $C(t)$ – эки канаттуу урчуктуу функция. Түзөтүлгөн туунду:

$$isC'\left(\text{炮}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \lim_{\substack{\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_2 \to 0}} \frac{C\left(\frac{1}{2} + \lambda_2\right) - C\left(\frac{1}{2} - \lambda_1\right)}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$isC'\left(A, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \text{ц}'\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left[\psi'\left(\frac{1}{2} + 0\right) - \text{ц}'\left(\frac{1}{2} - 0\right)\right] A = 1 + [-1 - 1]A,\ \ t = \frac{1}{2}$$

Берилген функциянын түзөтүлгөн туундусун тургузалы:

$$isC'\left(A,\frac{1}{2},t\right)=\begin{cases}1, & 0\le t<\frac{1}{2},\\ 1-2A, & t=\frac{1}{2},\\ -1, & \frac{1}{2}<t\le 1.\end{cases}$$

$A=\frac{1}{4}$ маанисин берсек, $tg б_1=isC'\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$,
$A=\frac{3}{8}$ маанисин берсек, $tg б_2=isC'\left(\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1-2\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$,
$A=\frac{3}{5}$ маанисин берсек, $tg б_3=isC'\left(\frac{3}{5},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1-2\cdot\frac{3}{5}=-\frac{1}{5}$.

Функциянын графигине $t=\frac{1}{2}$ урчук чекитинде жүргүзүлгөн жанымалардын жыйындысынын теңдемеси:

$$y-C\left(\frac{1}{2}\right)=isC'\left(A,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right).$$

Ушул A нын маанилерине тиешелүү болгон жанымалардын төмөнкүдөй теңдемелерин алабыз:

$$A=\frac{1}{4}\quad \textit{болсо}:\ y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}$$
$$A=\frac{3}{8}\quad \textit{болсо}:\ y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{4}t+\frac{3}{8}$$
$$A=\frac{3}{5}\quad \textit{болсо}:\ y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}\left(t-\frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow\ y=-\frac{1}{5}t+\frac{3}{5}$$

Берилген функция үчүн Лагранждын теоремасы аткарылбайт, себеби теореманын 2-шарты бузулууда – функция $t=\frac{1}{2}$ чекитинде Ньютон-Лейбниц боюнча туундуга ээ эмес (1-чийме) [1].

Мейли, β> α болсун; $б\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ $в\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ боло тургандай $б=\frac{3}{10}$ жана $в=\frac{4}{5}$ чекиттерин тандап алалы.

Маселени чечүү үчүн төмөнкү формуланы колдонобуз:

$$\frac{\psi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}=\mathrm{isc}'(A,a,t)$$

$$ц\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{3}{10}\qquad ш\left(\frac{4}{5}\right)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{\frac{1}{5}-\frac{3}{10}}{\frac{4}{5}-\frac{3}{10}}=1-2A\qquad\Rightarrow\ A=\frac{3}{5}\ \epsilon(0,1)$$

$б=\frac{3}{10}$ жана $в=\frac{4}{5}$ абсциссаларына таянган теңдемеси $5t+25y-9=0$ болгон хордага параллель болгон жаныманын теңдемеси:

$$y-C\left(\frac{1}{2}\right)=\ isC'\left(\frac{3}{5},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right),\ \ t\in[0,1]$$

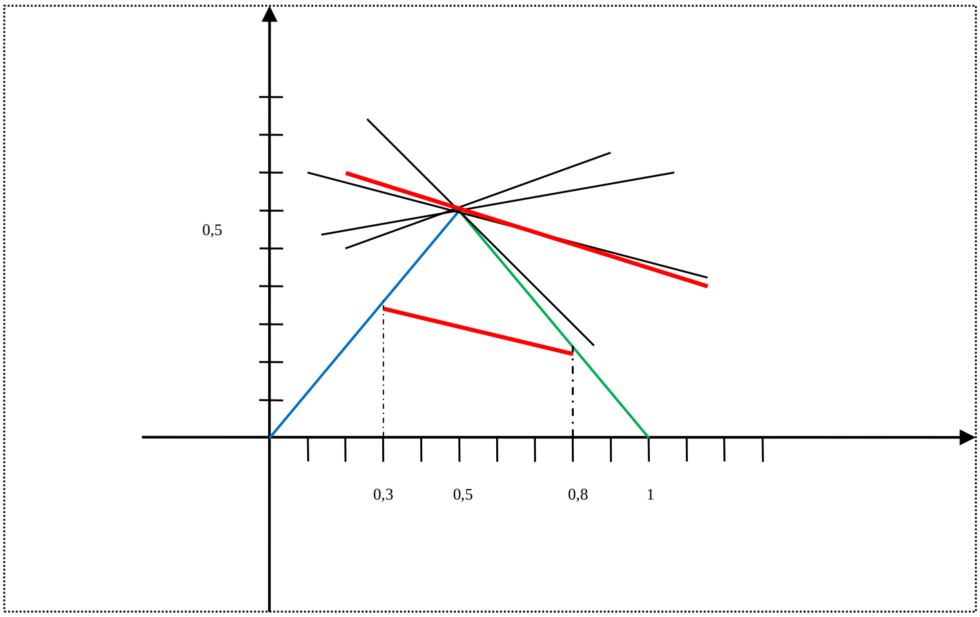
формуласы боюнча

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

$y=-\frac{t}{5}+\frac{3}{5}$ болору келип чыгат.

Бул түз сызык берилген $\mathrm{C}(t)$ урчуктуу функциясынын графигине $t=\frac{1}{2}$ урчуктуу чекиттинде жүргүзүлгөн, берилген $б, в$ абсциссаларына таянган негизги хордага параллель болгон жалгыз жаныма болот.

Функциянын графиги жана урчук чекитинде ага жүргүзүлгөн жанымалар чиймеде келтирилди.



Адабияттар:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. I том. -М.: Наука, 1969. -607 с.
2. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. -М.: Наука, 1980.
3. Шарипов С., Шарипов К.С. Уравнение с разделяющимися переменными в классе разрывных функций // Вестник ИГУ. 2001, №5. -С. 159-164.
4. Шарипов С., Шарипов К.С. Первообразная функция разрывной функции //Вестник ИГУ. 2002. -№7. -С. 19-24.
5. Шарипов С., Шарипов К.С. Интегрируемость разрывных функций //Вестник ИГУ. -2002. -№8. -С. 58-66.
6. Шарипов С., Шарипов К.С. Основные теоремы дифференциального исчисления урчуктных функций //Вестник ИГУ. -2003. -№9. -С. 55-66.
7. Шарипов С., Шарипов К.С. Об единственности производной урчуктной непрерывной функции //Вестник ИГУ. -2003. -№9. -С. 66-73.