УДК 622.831 (575.2) (04)

ОБОСНОВАНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ “КОНТАКТНОГО ЭЛЕМЕНТА” ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ НАРУШЕНИЯ СПЛОШНОСТИ МАССИВА И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Б.А. Чукин – канд. техн. наук,

Т.С. Саркулов – директор Госгортехнадзора,

Э.А. Ким – канд. техн. наук,

Мамбеткул кызы Айзада – студентка

The special contact element has examined for accounting of structural failure that suggested by American scientists S. Krauch and A.Starfild and using of physical conditions have cited for problem solving on mode of deformation of heterogeneous bodies that are in contact by the method of boundary elements.

Учет влияния структурных нарушений на распределение напряжений и деформаций в исследуемом объекте возможен на основании включения в расчетную процедуру специального элемента. Специальный элемент должен влиять на напряженно-деформированное состояние (НДС) исследуемого объекта. При этом следует учитывать: деформационные и прочностные свойства материала заполнителя, смещения берегов структурных нарушений, внешние и внутренние усилия, которые возникают по берегам структурных нарушений.

Американские ученые С.Крауч и А.Старфилд предложили для учета структурного нарушения специальный контактный элемент. Структурные нарушения представляются в виде трещины со сжимаемым заполнителем[1]. Поверхности разрыва связаны пружиной. Нормальная и касательная жесткости пружины отражают свойства материала заполнителя. Эта модель описывает одномерные соотношения напряжения – деформации для сжатия и сдвига. Такие соотношения становятся понятными из рис.1 (a– сжатие, b – сдвиг).

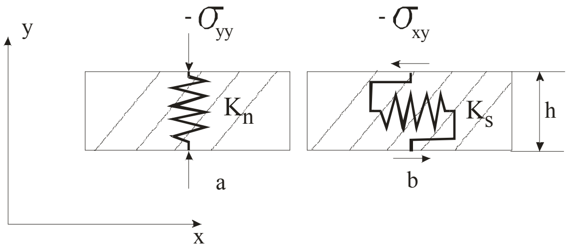

Рис. 1. Представление контактного элемента: a – сжатие, b – сдвиг.

Контактный элемент имеет две степени свободы. Толщина элемента h мала по сравнению с его длиной. Компоненты деформаций контактного элемента выражены через смещения:

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right). \qquad (1)$$

[1] *Крауч С, Старфилд А.* Метод граничных элементов в механике твердого тела / Пер. с англ. М.А. Тлеужанова; Под ред. А.М. Линькова. – М.: Мир, 1987.– 328 с.

Смещения берегов в пределах одного элемента происходят равномерно, тогда $\partial u_y/\partial x$=0. Конечно-разностные аналогии формулы (1) определены выражением:

$$e_{yy} \approx \frac{u_y(x, h/2) - u_y(x, -h/2)}{h};$$

$$e_{xy} \approx \frac{u_x(x, h/2) - u_x(x, -h/2)}{h}; \qquad (2)$$

h эквивалентно компонентам разрыва смещений – Dy и –Dx из метода разрывных смещений. Деформации могут быть вычислены из выражения:

$$e_{yy} \approx \frac{-D_y}{h}; \quad e_{xy} \approx \frac{-D_x}{2h}. \qquad (3)$$

Материал заполнителя линейно-упругий, компоненты напряжения через компоненты деформаций выразятся следующей зависимостью:

$$\sigma_{yy} = E_0 e_{yy} = -E_0 \frac{D_y}{h}; \ \sigma_{xy} = 2G_0 e_{xy} = -G_0 \frac{D_x}{h}. \qquad (4)$$

Напряжения в локальной системе координат n, s даются выражением:

$$\sigma_n = -K_n D_n; \ \sigma_s = -K_s D_s, \qquad (5)$$

где K_n и K_s – нормальная и касательная жесткости пружин.

Для расчета НДС неоднородных тел, находящихся в контакте, методами граничных элементов необходимо создавать вычислительные программы. Для создания вычислительных программ необходимо четкое понимание физических условий, которые возникают по контакту разнородных материалов. Учет разнородных материалов требует модификации вычислительных программ в зависимости от числа материалов и сочетания контактных связей. Это можно отнести к недостаткам метода граничных элементов. Необходимо приобретение навыков в методике формирования систем линейных уравнений на основании выполнения физических условий для решения задач МГЭ.

Приведем приемы формирования систем линейных уравнений на основании выполнения физических условий для неоднородных материалов на примере откоса, сложенного из разнородных материалов, имеющих структурные нарушения. Решение этой задачи получено С. Краучем[1]. На рис. 2-а представлена криволинейная трещина, описанная набором N граничных элементов (ГЭ). Местоположение и ориентация ГЭ определяются глобальной системой координат (*x,y*), разрывы смещений определяются в локальной системе координат *s* и *n*. На рис. 2-б выделен элементарный разрыв смещений *j*-го отрезка трещины. Компоненты разрывов в этом элементе в направлениях *s* и *n* обозначены через D_s^j и D_n^j. Индексами + и – обозначены положительная и отрицательная поверхности трещины по отношению к локальной координате *n*.

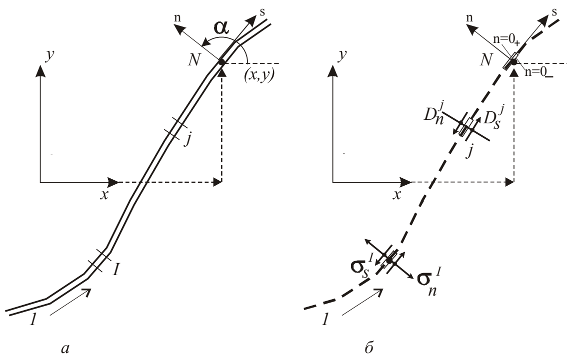

Рис. 2. Представление трещины с помощью N элементарных разрывов смещений.

Влияние отдельного элементарного разрыва смещений в *j* ГЭ на смещения и напряжения в ГЭ, а также в произвольной точке определяется через компоненты разрыва смещения ***j***-го ГЭ (рис. 2-б) следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j, \end{aligned} \qquad (6)$$

где $A_{ss}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{nn}^{ij}$ – граничные коэффициенты влияния для напряжений. Например, коэффициент A_{ns}^{ij} дает нормальное напряжение в центре *i*-го ГЭ (т.е. σ_n^i), вызванное постоянным единичным разрывом смещения в касательном направлении вдоль *j*-го ГЭ (т.е. $D_s^j = 1$). Теперь, если поместить элементарный разрыв смещений на каждом из N ГЭ вдоль трещины, то для *i*-го ГЭ получим:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s^i &= \sum_{j=1}^{N} A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^{N} A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^{N} A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^{N} A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned}\right\} \quad i = 1, \ldots N. \qquad (7)$$

[1] *Крауч С, Старфилд А.* Метод граничных элементов в механике твердого тела / Пер. с англ. М.А. Тлеужанова; Под ред. А.М. Линькова. – М.: Мир, 1987.– 328 с.

Если задать σ_s^i и σ_n^i, для каждого ГЭ в виде граничных условий по напряжениям, то соотношение (7) образует систему 2N линейных уравнений с 2N неизвестными D_s^i и D_n^i ($i = 1, \dots N$) элементарных разрывов смещений.

Найденными D_s^i и D_n^i можно, используя принцип суперпозиции, определить смещения и напряжения в произвольной точке тела. Смещения вдоль трещины, показанные на рис. 2-а, определяются выражением:

$$\left.\begin{aligned} u_s^i &= \sum_{j=1}^{N} B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^{N} B_{sn}^{ij} D_n^j \\ u_n^i &= \sum_{j=1}^{N} B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^{N} B_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned}\right\} i = 1, \dots N12, \qquad (8)$$

где B_{ss}^{ij}, B_{sn}^{ij}, B_{ns}^{ij}, B_{nn}^{ij} – граничные коэффициенты влияния для смещений.

Рассмотрим случай, когда откос сложен из трех материалов (рис. 3).

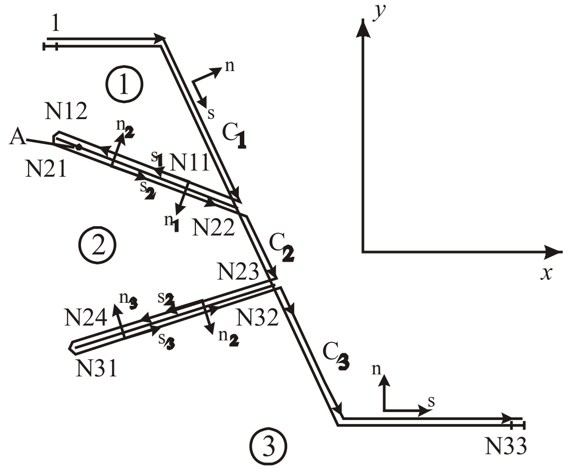

Рис. 3. Откос, сложенный из трех материалов.

Каждый из материалов объединен в подобласть. Все материалы считаем однородно изотропными и линейно упругими.

Начинается обход с верха откоса (ГЭ=1) и заканчивается описанием основания (ГЭ=N33). На поверхностях контакта локальные координаты s_1, n_1 и s_2, n_2, а также s_2, n_2 и s_3, n_3 имеют противоположные направления.

Условие неразрывности в точке A на поверхности контакта 1-го и 2-го материалов можно записать в виде:

$$\sigma_s^{[1]}(A) = \sigma_s^{[2]}(A), \quad \sigma_n^{[1]}(A) = \sigma_n^{[2]}(A) \qquad (9)$$

для напряжений и в виде

$$u_s^{[1]}(A) = -u_s^{[2]}(A), \quad u_n^{[1]}(A) = -u_n^{[2]}(A) \qquad (10)$$

для смещений. Знак минус в (10) – следствие противоположности направлений локальных координат s_1, n_1 и s_2, n_2 на поверхности контакта. Условие неразрывности выполняется и по контакту 2-го и 3-го материалов.

Уравнение напряжений на границе подобласти 1 можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s^{i[1]} &= \sum_{j=1}^{N12} A_{ss}^{ij[1]} D_s^{j[1]} + \sum_{j=1}^{N12} A_{sn}^{ij[1]} D_n^{j[1]} \\ \sigma_n^{i[1]} &= \sum_{j=1}^{N12} A_{ns}^{ij[1]} D_s^{j[1]} + \sum_{j=1}^{N12} A_{nn}^{ij[1]} D_n^{j[1]} \end{aligned}\right\} i = 1, \dots N12. \qquad (11)$$

Напряжения на границе подобласти 2 – в виде:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s^{i[2]} &= \sum_{j=N21}^{N24} A_{ss}^{ij[2]} D_s^{j[2]} + \sum_{j=N21}^{N24} A_{sn}^{ij[2]} D_n^{j[2]} \\ \sigma_n^{i[2]} &= \sum_{j=N21}^{N24} A_{ns}^{ij[2]} D_s^{j[2]} + \sum_{j=N21}^{N24} A_{nn}^{ij[2]} D_n^{j[2]} \end{aligned}\right\} i = N21, \dots N24. \qquad (12)$$

Напряжения на границе подобласти 3 – в виде:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s^{i[3]} &= \sum_{j=N31}^{N33} A_{ss}^{ij[3]} D_s^{j[3]} + \sum_{j=N31}^{N33} A_{sn}^{ij[3]} D_n^{j[3]} \\ \sigma_n^{i[3]} &= \sum_{j=N31}^{N33} A_{ns}^{ij[3]} D_s^{j[3]} + \sum_{j=N31}^{N33} A_{nn}^{ij[3]} D_n^{j[3]} \end{aligned}\right\} i = N31, \dots N33. \qquad (13)$$

Аналогично выражения для смещений u_s и u_n на границе трех подобластей представим в виде:

$$\left.\begin{aligned} u_s^{i[1]} &= \sum_{j=1}^{N12} B_{ss}^{ij[1]} D_s^{j[1]} + \sum_{j=1}^{N12} B_{sn}^{ij[1]} D_n^{j[1]} \\ u_n^{i[1]} &= \sum_{j=1}^{N12} B_{ns}^{ij[1]} D_s^{j[1]} + \sum_{j=1}^{N12} B_{nn}^{ij[1]} D_n^{j[1]} \end{aligned}\right\} i = 1, \dots N12, \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} u_s^{i[2]} &= \sum_{j=N21}^{N24} B_{ss}^{ij[2]} D_s^{j[2]} + \sum_{j=N21}^{N24} B_{sn}^{ij[2]} D_n^{j[2]} \\ u_n^{i[2]} &= \sum_{j=N21}^{N24} B_{ns}^{ij[2]} D_s^{j[2]} + \sum_{j=N21}^{N24} B_{nn}^{ij[2]} D_n^{j[2]} \end{aligned}\right\} i = N21, \dots N24, \qquad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} u_s^{i[3]} &= \sum_{j=N31}^{N33} B_{ss}^{ij[3]} D_s^{j[3]} + \sum_{j=N31}^{N33} B_{sn}^{ij[3]} D_n^{j[3]} \\ u_n^{i[3]} &= \sum_{j=N31}^{N33} B_{ns}^{ij[3]} D_s^{j[3]} + \sum_{j=N31}^{N33} B_{nn}^{ij[3]} D_n^{j[3]} \end{aligned}\right\} i = N31, \dots N33. \qquad (16)$$

Выражения (11)–(16) используются для образования системы 2N алгебраических уравнений с 2N неизвестными разрывами смещений (D_s^j, D_n^j).

Представим всю систему в виде:

$$\left.\begin{aligned} b_s^i &= \sum_{j=1}^{N33} C_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^{N33} C_{sn}^{ij} D_n^j \\ b_n^i &= \sum_{j=1}^{N33} C_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=N1}^{N33} C_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned}\right\} i=1,\ \ldots\ N33. \quad (17)$$

Данная запись включает в себя полную систему алгебраических уравнений и более удобна для дальнейших рассуждений.

Типичный ГЭ – i при последовательном рассмотрении может располагаться либо на свободной части одного из граничных контуров, либо на поверхности контакта соответствующих подобластей. В первом случае i-е уравнение в (17) получается, исходя из граничных условий, которые в этом случае обязательно известны, тогда как во втором случае они находятся путем использования условий неразрывности на поверхности контакта.

Составленная таким образом система алгебраических уравнений дает решение для определения D_s^j, D_n^j. Очень важными являются проверки правильности решения поставленной задачи. К ним можно отнести:

1. По определенным значениям D_s^j, D_n^j подсчитываются и проверяются заданные граничные условия по свободным поверхностям подобластей. При этом очень важным является тот факт, что подсчитываются граничные условия только по значениям D_s^j и D_n^j, принадлежащим только к соответствующей подобласти.

2. Проверяется выполнение всех четырех условий неразрывности на контактных поверхностях и только на основе значений D_s^j и D_n^j, принадлежащих только к соответствующим подобластям в отдельности.

Основой представленной методики является выполнение физических условий на контакте разнородных материалов. Выполнение этих условий позволяет составить численную процедуру для любых задач с разнородными материалами. Недостатком метода граничных элементов для решения такого типа задач является необходимость изменения в программе алгоритма составления системы линейных уравнений в зависимости от конкретных особенностей нахождения в контакте материалов.