УДК: 517(075.8+617.2)

Шарипов С., Шарипов К. С., Шарипов К.С.

ИГУ им.К.Тыныстанова,

директор Иссык-Кульского ОИО,

КУПС, г.Алмата, Казахстан

УПРАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫМ РЕШЕНИЕМ УРЧУКТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ Y'=A(T) Y(T) +B(T)

Впервые нами показано, что урчуктные линейные дифференциальные уравнения y(t)= A(t) y(t) +B(t) имеют ограниченные управляемые решения когда A(t) и B(t) являются только разрывными функциями.

Ключевые слова*: урчуктные линейные дифференциальные уравнения, ограниченное управляемое решение, разрывные функции, исправленная производная.*

Биринчи жолу урчуктуу сызыктуу дифференциалдык теңдемелер y(t)= A(t); y(t) +B(t). A(t) жана B(t) функциялары үзгүлтүктүү болгон гана учурда чектелген башкарылуучу чыгарылыштарга ээ боло тургандыгы көрсөтүлгөн.

Негизги сөздөр*: урчуктуу сызыктуу дифференциалдык теңдемелер, чектелген башкарылуучу чыгарылыш, үзгүлтүктүү функциялар, түзөтүлгөн туунду.*

We have shown for the first time that the smooth linear differential equations y (t) = A (t) y (t) + B (t) have bounded controlled solutions when A (t) and B (t) are only discontinuous functions.

Key words*: smooth linear differential equations, bounded controlled solution, discontinuous functions, corrected derivative.*

Многие процессы физики, биологии, экономики и т.д.описываются дифференциальными уравнениями. Они исследованы и изучены когда функции входящие в дифференциальные уравнения являются непрерывными.

Они служили честно, каждый раз указывая путь к новым неизведанным тайнам природы и жизни. Человечество достигло больших высот науки и практики.

Однако, построение ограниченного решения дифференциальных уравнений является задачей малоисследованной или почти неисследованной.

Здесь, в частности, рассмотрим линейные дифференциальные уравнения первого порядка вида:

y'=A(t) y+B(t)

Чтобы исследовать управляемость решения указанного дифференциального уравнения отправной точкой нужно брать задачи Коши:

$$y'=A(t)\ y+B(t)\ ,\ t\,\epsilon[t_0,+\infty] \quad (1)$$

начальное условие:

$$y(t_0\,) = y_{0\,,} \quad (2)$$

Она исследована достаточно хорошо, когда функции A(t) и B(t) - непрерывные функции.

Однако, в этом случае решение задачи Коши (1)-(2) находится вне сферы практического приложения.

Эта картина длилась долго и дошла до нас. К ним относится, в частности, знаменитая модель Мальтуса:

$$y' = \mu y, t\,\epsilon[t_0,+\infty]$$

начальное условие:

$$y(t_0\,) = y_{0\,,}$$

Отметим модель Харрода-Домара экономического роста и развития вида

$$y' = \lambda u(t), t\,\epsilon[t_0,+\infty] \quad (3)$$

$$y(t)= u(t) + c(t), t\,\epsilon[t_0,+\infty] \quad (4)$$

Начальное условие:

$y(t_0) = y_0$ (5)

Ее напишем так:

y' $= \lambda y(t) - \lambda c(t),\ t \epsilon [t_0, +\infty](\lambda \frac{1}{\varepsilon})$ (6)

начальное условие:

$y(t_0) = y_0$ (7)

Она достаточно хорошо исследована когда заданные функции $\lambda(t)$и $c(t)$ в области $[t_0, +\infty]$ являются непрерывными.

Однако, это исследование выводить нас от сферы практических задач.

Спрашивается: можно ли на промежутке времени $[t_0, +\infty]$ построить ограниченное решение $y(t)$ ($К_1 \leq y(t) \leq К_2$) задачи Коши (6)-(7)? Нами такая большая проблема ставится и исследуется впервые.

Отметим, что данная задача в случае когда внешне действующая функция:

$\lambda(t)\ c(t),\ t \epsilon [t_0, +\infty]$ (8)

является непрерывной, не было выявлено ограниченное и кусочно-ограниченное решение задачи Коши (6)-(7).

Данное предложение наводить на мысль о том, чтобы исследовать задачу Коши (6)-(7) на задачу об ограниченном решении ее мы должны выйти из плоскости непрерывных функций.

Выдвинутое нами предложение о выходе из плоскости непрерывных функций в теории дифференциальных уравнений порождает новые неизученные задачи XXI века.

Сказанная новая теория дифференциальных уравнений разработана нами в классе разрывных функций.

Уточним класс разрывных функций.

Исправленные производные

Рассмотрим недифференциальную функцию Ньютону-Лейбницу вида.

$$c(t) = \begin{cases} \varphi(t), t_0 \leq t \leq a, \\ \Psi(t), a \leq t \leq T \end{cases}$$

1) $\varphi(a - o) = \Psi(a + o)$
2) $\varphi'(a - o) \neq \Psi'(a + o)$

Эти величины являются конечными. Её будем называть двух канатной урчуктной. Она не имеет производной по Ньютону-Лейбницу.

Исправленная производная

Нами при определении производной предложена идея выхода из традиционной плоскости Δt и определим производной [1-3].

С этой целью берем бесконечно малые величины λ_1, λ_2 такие, что $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$.

Причем $\lambda_1 \to 0$, $\lambda_2 \to 0$

Теперь вычислим предел:

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_2 \to 0}} \frac{c(t + \lambda_2) - c(t - \lambda_1)}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Тогда имеем:

$$\lim_{\substack{\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to 0}} \frac{c(t+\lambda_2)-c(t-\lambda_1)}{\lambda_1+\lambda_2} = \begin{cases} \varphi'(t), & t_0 \le t < a \\ \varphi'(a-o) + [\Psi'(a+0) - \varphi'(a-o)]A, & t = a \\ \Psi'(t), & a < t \le T \end{cases}$$

A$\in$ [0.1]

Она нам даёт первую исправленную производную урчуктной функции C(t).

Она имеет бесчисленное множество первых исправленных производных, причем они являются разрывными функциями первого рода.

Исправленная производная обозначена так:

$$isc'(A,a,t) = \begin{cases} \varphi'(t), & t_0 \le t < a \\ \varphi'(a-o) + [\Psi'(a+0) - \varphi'(a-o)]A, & t = a \\ \Psi'(t), & a < t \le T \end{cases}$$

Имеет место предельное равенство:

$$\lim_{\substack{\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to 0}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = A, \ \ A \in [0.1]$$

Пары (λ_1, λ_2), дающие одно и то же предельное значение, называются эквивалентными.

Теперь предлагаем задачу Коши (6)-(7) исследовать на отрезках вида:

J =$[t_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \ldots \cup [a_{n-1}, a_n] c \ \ [t_o, +\infty]$ (9)

Разрывные функции

Исследуем модель (6)-(7) когда функция $c(t)$ является разрывной функцией вида:

$$c\ (t) = \begin{cases} \beta_1, t_o \le t \le a_1 \\ \beta_{2,} a_1 < t \le a_2 \\ \beta_n, a_{n-1} < t \le a_n \end{cases} \quad (10)$$

а $\lambda = \mathrm{cons}\, t$

Распространяя функцию (10) и используя исправленную производной функции, (10) напишем так:

$c(t) = \beta_1 + (\beta_{2,} - \beta_1) isc_1{}'(0, a_1, t), .., (\beta_n - \beta_{n-1}) isc_1{}'(a_n, a_{n-1}, t),, \ t \,\epsilon J$, (11)

В этом случае имеем урчуктную обратную задачу Коши:

y' $= \lambda y(t) - \lambda[\beta_1 + (\beta_{2,} - \beta_1) isc_1{}'(0, a_1, t), .., [\beta_n - \beta_{n-1}] isc_1{}'(a_n, a_{n-1}, t),$

$t\, \epsilon J$ (12)

Начальное условие:

$y(t_0) = y_0$ (13)

Здесь $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ -неизвестные постоянные величины.

Их надо найти.

Отметим, что нами разработан метод решения указанной задачи (12)-(13), называемый управлением решения урчуктной обратной задачи Коши (12)-(13) с обобщенно-краевыми условиями, заданными человеком, государством и институтом плана и прогноза вида:

$y(a_1) = y_1, y(a_2) = y_2\ , y(a_n) = y_n$ (14)

в частности когда

$0 < y_0 \le y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$

$0 < y_0 \le y_1 < +\infty, \ldots, y_{n-1} \le y_n < +\infty$

Решение модели (12)-(13) имеет вид:

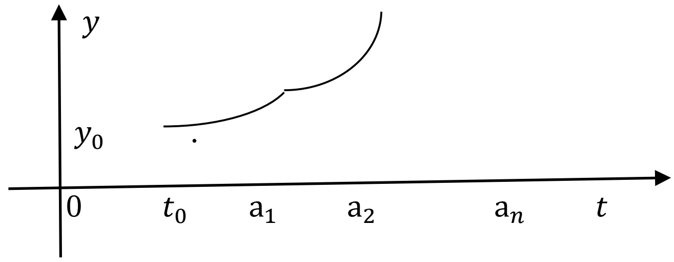
$y(t) = y_0\, \ell^{\lambda(t-t_0)} - \beta_1\left(\ell^{\lambda(t-t_0)} - 1\right) - \cdots - \beta_n\left(\ell^{\lambda(t-a_{n-1})} - 1\right), t\, \epsilon J$

Особо важным свойством решения $y(t)$ задачи (12)-(14) является его ограниченность:

$y_0 \le y_1(t) \le y_1, \dots, y_{n-1} \le y_n(t) \le y_n$ (15)

Итак, впервые нами показано, что в частности линейные дифференциальные уравнения имеют ограниченные управляемые решения

На чертеже имеет вид



На промежутке времени $[t_o, a_{1,}]$ ограниченное решение описывается функцией

$y_1(t) = (y_1 - y_0)\frac{\ell^{\lambda(t-t_0)} - y_1}{\ell^{\lambda(a_1-t_0)} - 1} + \frac{y\ell^{\lambda(a_1-t_0)} - y_1}{\ell^{\lambda(a_1-t_0)} - 1}, t\epsilon[t_0, a_1]$ (16)

Она даст нам движение решения (16) от состоянии $y(t_0) = y_0$ до состоянии $y(a_1) = y_1$. Когда время течет непрерывно от точки $t = t_0$ до точки $t = a_1$

Поэтому решение (16) примем как материальную точку, которая делает движение на декартовой координатной плоскости y_0 t. След, оставлены материальной точкой, называется ее траекторией. Значит, по ней идет распределение обобщенно - краевых условий $y(t_0) = y_0, y(a_1) = y_1$.

Из траектории (16) видно, что первое слагаемое:

$U_1(t) = (y_1 - y_0)\frac{\ell^{\lambda(t-t_0)} - y_1}{\ell^{\lambda(a_1-t_0)} - 1}, t\epsilon[t_0, a_1]$ (17)

является движущей силой порожденное внешне действующей силой.

$C_1(t) = \frac{y_0\ell^{\lambda(a_1-t_0)} - y_1}{\ell^{\lambda(a_1-t_0)} - 1}, \quad t\epsilon[t_0, a_1]$ (18)

для выполнения условия

$y(t_0) = y_0, y(a_1) = y_1$ (19)

на промежутке времени $[t_0, a_1]$

Здесь λ является неизвестным. Он находится в области $\lambda\epsilon(-\infty, \infty)/0$

Исследуем (17), когда

$\lambda\epsilon(0, +\infty)$ (20)

$\lambda\epsilon(-\infty, 0)$. (21)

Теперь исследуем взаимосвязь между y_0, y_1, λ и $a_1 - t_0$.

При $\lambda\epsilon(0, +\infty)$ видно, что из (18) имеет место неравенство: $y_1 < y_0\ell^{\lambda(a_1-t_0)}$

Имея в виду (14), имеем:

$y_0 < y_1 < y_0\ell^{\lambda(a_1-t_0)}$ (22)

делим данное неравенство на y_0

Тогда имеем:

$1 < \frac{y_1}{y_0} < \ell^{\lambda(a_1-t_0)}, \quad \lambda\epsilon(0, +\infty)$ (23)

Аналогично при $\lambda\epsilon(-\infty, 0)$ имеем

$\ell^{\lambda(a_1-t_0)} < \frac{y_1}{y_0} < 1$ (24)

Выше полученные формулы дают нам совокупность относительно λ. Это даст нам некоторые трудности, мы не знаем на каком λ мы можем работать.

Метод определения λ

Нами предложен метод разложения внешне действующей силы по λ. Этим покажем структуру внешне действующей силы (18).

Для чего берем действительные числа R:

$(-\infty, \infty)$. Его делим на подклассы $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Исследуем структуру на подклассе $(0, +\infty)$. Берем число $m_1 \epsilon (0, +\infty)$. Значит на промежутке времени $[t_0, a_1]$ m_1 есть положительное число.

Составим равенство:

$$\frac{y_0 \ell^{\lambda(a_1-t_0)} - y_1}{\ell^{\lambda(a_1-t_0)} - 1} = m_1 \qquad (25)$$

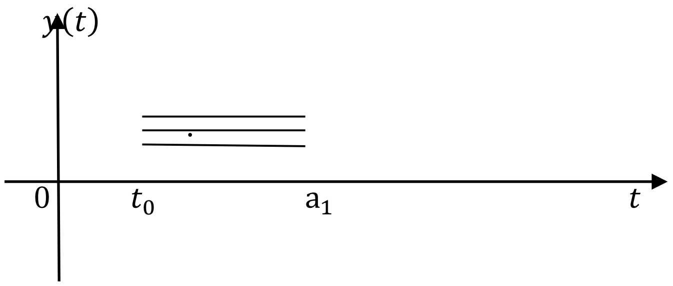
Это есть показательное уравнение, где неизвестной является λ. Оно как известно, имеет единственное решение. Это и есть метод определения λ. Значит вложен труд вышеуказанных объектов.

Решение его имеет вид:

$$\lambda = \frac{1}{a_1 - t_0} \ln \frac{y_1 - m_1}{y_0 - m_1}, \quad t\epsilon[t_0, a_1] \qquad (26)$$

$y_1 - m_1 = u_1, \; y_0 - m_1 = u_0$

Видно, что каждая четверка $[y_0, y_1, m_1 \; и \; a_1 - t_0]$ определяет единственное значение λ. Имея ввиду, что $y_0 < \infty, y_1 < \infty \; (y_0 < y_1), m < \infty$ приходим к выводу о том, что график (26) сплошь заполняет четвертую четверть координатной плоскости Декарта, например так:



(рис-1)

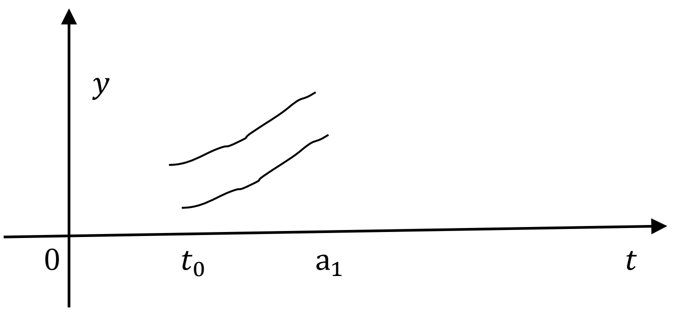
Ограничимся этим же рисунком

Нами впервые выявлен новый класс обратных задач.

На (26) решение (16) имеет вид:

$$y = (y_0 - m_1)\left(\frac{y_1 - m_1}{y_0 - m_1}\right)^{\frac{t-t_0}{a_1-t_0}} + m_1, t\epsilon[t_0, a_1] \qquad (27)$$

График данной функции сплошь заполняет четвертого квадранта



(рис-2)

Ограничимся этим рисунком. На (26) формула (17) имеет вид:

$$u_1(t) = u_0 \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^{\frac{t-t_0}{a_1-t_0}}, \; t\epsilon[t_0, a_1] \qquad (28)$$

А также на (26) неравенство (26) имеет вид

$$y_0 \le y_1 \le y_0 \frac{u_1}{u_0} \qquad (29)$$

$$y_0 \quad y_1 \quad y_0\frac{u_1}{u_0} \quad a_1 \quad y(t) \tag{30}$$

Итак, ограниченности управляемость решения (27) показано неравенством $y_0 \leq y_1(t) < y_1, t\epsilon[t_0, a_1]$.

Литература:

1) Шарипов С., Шарипов К.С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциальных и интегральных уравнений. Вестник ИГУ, 2004, № 12.

2) Шарипов С., Шарипов К.С., Шарипов К.С. Движение и динамика дохода инвестиции, потребления, скорости роста дохода и коэффициента приростной капиталоотдачи в плановой экономике. –Бишкек, 2014. Сб. статьей Междун.конфер. посвещен. 90-лет. Мин. фин. КР.

3) Шарипов С., Шарипов К.С., Шарипов К.С. Экзогенные и эндогенные объекты в плановой экономике дохода равного сумме расходов. –Бишкек, 2014. Материалы Междун. конф. «Экон. наука: вчера, сегодня, завтра», посвящ. 60-лет экон. факультета КГНУ.