УДК: 517.217

Исабеков К.А., Анназаров Ж.Ю.
ИГУ им К.Тыныстанова,
ИГУ им К.Тыныстанова, магистрант

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Цель статьи − раскрыть проблему приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных с применением метода конечных разностей. Авторами рассмотрено решение двумерной задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа, где дифференциальные уравнения заменяются разностными уравнениями и получена система линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: *метод конечных разностей, задача Дирихле, метод сеток, система линейных алгебраических уравнений.*

Макаланын максаты – чектүү айырмалар методу менен жекече туундагы дифференциалдык теңдемелерди жакындатып чыгаруу проблемасын ачуу. Авторлор тарабынан эллиптикалык типтеги эки өлчөмдүү Дирихле маселесин чыгаруу каралган. Анда дифференциадык теңдемелер айырмалар теңдемелери менен алмаштырылып, алгебралык теңдемелер системасы алынат.

Негизги сөздөр: *чектүү айырмалар методу, Дирихле маселеси, торчо методу, сызыктуу алгебралык теңдемелер системасы.*

The purpose of the article is to solve the problem of approximate solution of partial differential equations by applying the method of finite differences. The authors consider the solutions of the two-dimensional Dirichlet problem for an equation of elliptic type, where the differential equations are replaced by difference equations and a system of linear algebraic equations is obtained.

Key words: *finite difference method, Dirichlet problem, method of grids, system of linear algebraic equations.*

Основная задача инженера-исследователя, изучающего какой-либо физический или технический процесс, заключается в определении его закономерности, в получении аналитического выражения функциональной зависимости между переменными параметрами этого процесса. Большинство таких задач на отыскание связи между переменными сводится к решению уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций.

Решение многих дифференциальных уравнений нельзя свести к интегрированию известных функций (к квадратурам). Поэтому большое значение имеют различные приближенные методы интегрирования уравнений. К таким методам относится метод конечных разностей (метод сеток).

Метод сеток является одним из самых распространенных методов численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа.

Рассмотрим пример решения двумерной задачи Дирихле для уравнения:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c\frac{\partial u}{\partial x}+d\frac{\partial u}{\partial y}+gu=f, \qquad (1)$$

где a,b,c,d,g,f - функции независимых переменных x,y, определенные в конечной области G с границей Γ. Относительно этих функций предположим, что они непрерывны в $G+\Gamma$, a и b положительна в $G+\Gamma$, а g - не положительна в ней.

Пусть необходимо найти решение уравнения (1), непрерывное вплоть до границы Γ, принимающее в точках границы заданные значения φ, т.е.

$$u\big|_{\Gamma}=\varphi, \qquad (2)$$

где φ - непрерывная функция на Γ.

Для отыскания приближенного численного решения этой задачи проведем два семейства параллельных прямых:

$$x = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{3}$$

$$y = y_0 + kh \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{4}$$

Точки пересечения этих прямых назовем *узлами*. Два узла назовем соседними, если они удалены друг от друга по направлении оси x или y на расстояние шага сетки в направлении этой оси. Будем рассматривать те узлы, которые принадлежат $G + \Gamma$. Те из них, которых все четыре соседних узла принадлежат этому множеству, называют *внутренними*. Множество внутренних узлов назовем *сеточной областью* и обозначим через G^*. Те узлы, у которых хотя бы один соседний узел не принадлежит к рассматриваемому множеству, назовем граничными, а совокупность их назовем границей сеточной области и обозначим через Γ^*. Для каждого внутреннего узла (i,k) составим разностное уравнение, заменив в точке $(x_0 + ih, y_0 = kl)$ производные, входящие в уравнение (1), разностными отношениями, положив:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(i,k)} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(i,k)} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l}, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,k)} \approx \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2}; \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{(i,k)} \approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2}, \tag{7}$$

где принято обозначение $u_{ik} = u(x_0 + ih, y_0 + kl)$.

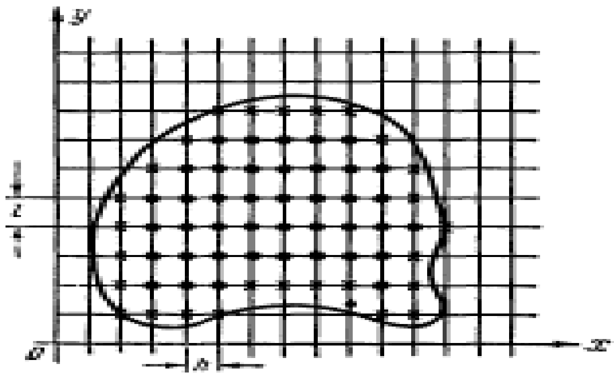

Рис. 1

Обозначив значения коэффициентов уравнения (1) в узле (i,k) через a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}, g_{ik}, f_{ik}, получим для узла (i,k) разностное уравнение:

$$lu_{ik} = a_{ik}\frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} + b_{ik}\frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} + \\ + c_{ik}\frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h} + d_{ik}\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l} + g_{ik}u_{ik} = f_{ik} \quad (8)$$

Такие уравнения можно записать для каждого внутреннего узла. Если узел (i,k) является граничным узлом, то u_{ik} в этом узле положим равным значению функции φ точке Γ, ближайшей к этому узлу, т.е. просто снесем в граничные узлы значения функции φ из ближайших к ним точек границы Γ. Таким образом, для отыскания значений u_{ik} решения во внутренних узлах мы получим систему линейных алгебраических уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных. Если эта система разрешима, то, решив ее, получим приближенные значения искомого решения на конечном множестве точек, являющихся внутренними узлами.

Применяя метод сеток для решения краевых задач, прежде всего сталкиваемся с задачей замены дифференциальных уравнений разностными уравнениями. Эта замена может быть выполнена разными способами.

Один из способов аппроксимации дифференциального уравнения разностным заключается в том, что производные, входящие в дифференциальные уравнения, заменяются линейными комбинациями значений функций u в узлах сетки по тем или иным формулам численного дифференцирования. В зависимости от того, какими формулами численного дифференцирования будем пользоваться, получим различную точность аппроксимации дифференциального уравнения разностным.

Другой способ получения разностных уравнений состоит в следующем. Для получения разностного уравнения, аппроксимирующего дифференциального уравнения в узле (i,k), рассмотрим N узлов, расположенных определенным образом около точки (i,k). Для простоты записи узел (i,k) будем обозначать 0, а остальные рассматриваемые узлы перенумеруем числами 1,2,…. N. Составим линейную комбинацию

$$\sum_{j=0}^{n} c_j u_j \quad (9)$$

с неопределенными коэффициентами c_j, где u_j -значения u в узле j. Предполагая у функции u наличие $n+1$ производных, разложим u_j по формуле Тейлора в окрестности точки 0. Подставим эти разложения в линейную комбинацию и сгруппируем члены с одинаковыми производными от функции u. Получим

$$\sum_{j=0}^{n} c_j u_j = \sum_{t+k<n} \gamma_{ik}\left(\frac{\partial^{i+k}u}{\partial x^i \partial y^k}\right)_0 + остаточный\ член \quad (10)$$

Используя достаточно большое число узлов N, можно получить достаточно хорошую аппроксимацию дифференциального уравнения в узле 0, заменяя дифференциальное уравнение разностным уравнением:

$$\sum_{j=0}^{N} c_j u_j = f_0 \tag{11}$$

Этот способ имеет то преимущество, что можно рассматривать не только прямоугольную сетку, но и другие сетки.

Для внутренних узлов, достаточно удаленных от границы, расположение узлов, участвующих в линейной комбинации для составления разностного уравнения в них, можно и целесообразно сохранять. Для узлов близких к границе это не всегда удается. Но этот способ для этих узлов другой конфигурации узлов, участвующих в линейной комбинации, часто позволяет получать разностные уравнения той же точности. В частности, этот способ позволяет и граничные условия аппроксимировать достаточно точно.

Пример: Найдем методом сеток решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в квадрате со стороной, равной единице, при следующих граничных условий:

$$u(0, y) = 0; u(1, y) = \sin \pi y; u(x,0) = 0; u(x,1) = 0.$$

Возьмем квадратную сетку с шагом $h = 0{,}125.$

Используя простейшую разностную схему, получим следующую систему уравнений для отыскания значений u узлах сетки:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0 \quad (i, j = 1,2,\dots,7).$$

$$u_{0j} = u_{i0} = u_{i,8} = 0; \quad u_{8j} = \sin \pi jh \quad (i, j = 1,2,\dots,8).$$

Решение этой системы в общем случае $h = \frac{1}{n}$, где $n - целое \quad > 0,$ найдем с помощью метода Фурье. Будем искать частные решения этой системы вида:

$$u_{ij}^{(r)} = \varphi_i^{(r)} \sin r\pi jh, \quad (i, j = 1,2,\dots,n;\ r = 1,2,\dots,n-1;\ h = \frac{1}{n}).$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям:

$$u_{i,0}^{(r)} = u_{i,n}^{(r)} = 0,$$

но не удовлетворяет граничным условиям при $i = 0$ и $i = n$. Функцию $\varphi_i^{(r)}$ целочисленного аргумента i найдем из условия, чтобы были удовлетворены уравнения для внутренних узлов. Подстановка дает:

$$(\varphi_{i+1}^{(r)} - \varphi_{i-1}^{(r)}) \sin r\pi jh + \varphi_i^{(r)} \left[\sin r\pi (j+1)h + \sin r\pi (j-1)h - 4\sin r\pi jh\right] =$$

$$= \left[\varphi_{i+1}^{(r)} + \varphi_{i-1}^{(r)} - 2(2 - \cos r\pi h)\varphi_i^{(r)}\right] \sin r\pi jh = 0$$

или $\varphi_{i+1}^{(r)} + \varphi_{i-1}^{(r)} - 2(2 - \cos r\pi h)\varphi_i^{(r)} = 0, \quad (i, j = 1,2,\dots,n).$

Общее решение этого однородного разностного уравнения имеет вид

$$\varphi_i^{(r)} = A_r \lambda_{r,1}^i + B_r \lambda_{r,2}^i,$$

где $\lambda_{r,1}, \lambda_{r,2}$ корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2(2 - \cos r\pi h)\lambda + 1 = 0,$$

а A_r, B_r произвольные постоянные.

Таким образом,

$$u_{ij}^{(r)} = (A_r \lambda_{r,1}^i + B_r \lambda_{r,2}^i) \sin r\pi jh.$$

Решение системы разностных уравнений, удовлетворяющих всем граничным условиям, будем искать в виде:

$$u_{ij} = \sum_{r=1}^{n-1} (A_r \lambda_{r,1}^i + B_r \lambda_{r,2}^i) \sin r\pi jh,$$

где постоянные $A_r, B_r \quad (r = 1,2,\ldots,n-1)$ подберем так, чтобы были удовлетворены граничные условия при $i = 0, i = n.$ В нашем случае из граничных условий имеем:

$$\sum_{r=1}^{n} (A_r + B_r) \sin r\pi jh = 0;$$

$$\sum_{r=1}^{n-1} (A_r \lambda_{r,1}^n + B_r \lambda_{r,2}^n) \sin r\pi jh = \sin \pi jh.$$

Функции $\sin \pi jh$ образуют на множестве $[0,1,2,\ldots,n]$ полную ортогональную систему функций, т.е. $\sum_{j=1}^{n} \sin r\pi jh \sin l\pi jh = 0$ при $r \neq l.$ В нашем случае это дает

$$A_r + B_r = 0 \quad (r = 1,2,\ldots,n-1),$$

$$A_1 \lambda_{1,1}^n + B_1 \lambda_{1,2}^n = 1$$

$$A_r \lambda_{r,1}^n + B_r \lambda_{r,2}^n = 0 \quad (r = 2,3,\ldots,n-1),$$

откуда

$$A_1 = -B_1 = \frac{1}{\lambda_{11}^n - \lambda_{12}^n}, \quad A_r = B_r = 0 \quad (r = 2,3,\ldots,n-1)$$

и

$$u_{ij} = \frac{\lambda_{11}^i - \lambda_{12}^i}{\lambda_{11}^n - \lambda_{12}^n} \sin \pi jh \quad (i, j = 0,1,2,3,\ldots,n).$$

В нашем случае $n = 8.$ Ниже приведена таблица значений u_{ij} для $i = 0,1,2,3,\ldots,8$ и $j = 0,1,2,3,4.$ Значения u_{ij} при $j = 5,6,7,8$ не приводятся, так как u_{ij} и точное решение $u(x, y)$ симметричны относительно прямой $y = 0{,}5 = 4h.$

j, i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	137	0295	498	777	1174	1749	2591	3827
2	0	253	545	920	1435	2169	3232	4787	7071
3	0	331	713	1203	1876	2834	4223	6255	9239
4	0	358	771	1302	2030	3067	4571	6771	10000

Литература:

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. - М.: Высш. шк., 1959.
2. Данилина Н.И., Дубровская Н.С., Кваша О.П. Вычислительная математика. -М.: Высш.школа, 1985.
4. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. –М.: 1991.
5. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. -М.: Наука, 1985.
6. Милн В.Э. Численные решения дифференциальных уравнений. -М.: Наука, 1955.
7. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А. Приближенное решение краевой задачи для пространственной нестационарной фильтрации подземных вод методом фрагментов //Вестник ИГУ, №9, -Каракол, 2003.