УДК: 517.928

Сагынтай кызы Н.

ИГУ им. К.Тыныстанова

Алымбаев А.Т.

Восточный Университет им. Махмуда-Кашгари-Барскани,

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В работе рассматривается задача построения асимптотического решения краевой задачи для системы уравнений третьего порядка. Решена задача приводимости краевой задачи к начальной задаче для системы интегро-дифференциальных уравнений. Показана эффективность алгоритма метода интегро-дифференциальных уравнений [1] *для отыскания асимптотического решения конкретной краевой задачи.*

Ключевые слова: *метод интегро-дифференциальных уравнений, краевая и начальная задача, приводимость, асимптотика.*

Макалада үчүнчү тартиптеги теңдемелер системасы үчүн чектик маселенин асимптотикалык чыгарылышын тургузуу маселеси каралат. Интегралдык-дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн чектик маселени баштапкы маселеге алып келүү маселеси чечилет. Конкреттүү чектик маселенин асимптотикалык чыгарылышын табууда интегралдык-дифференциалдык теңдемелер методунун алгоритминин эффективдүүлүгү көрсөтүлөт.

Негизги сөздөр: *интегралдык-дифференциалдык теңдемелер методу, чектик жана баштапкы маселе, алынып келүүчүлүк, асимптотика.*

In this paper we consider the problem of constructing an asymptotic solution of the boundary value problem for a system of equations of the third order. The problem of reducibility of the boundary value problem to the initial problem for a system of integral-differential equations is solved. The efficiency of the algorithm of the method of integral-differential equations [1] *is shown for finding the asymptotic solution of a particular boundary value problem.*

Key words: *the method of integral-differential equations, a boundary value problem, an initial problem, the reducibility, the asymptotic solution.*

1. Задача сведения краевой задачи к начальной задаче.

Рассмотрим краевую задачу вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \text{е}), \tag{1}$$

$$Ax(0, \text{е}) + Bx(T, \text{е}) = d, \tag{2}$$

где $x,\ f,\ d - n$-мерные векторы, A, B- постоянные матрицы размерности $n \times n$, причем матрица B такова, что $detB \neq 0,$ а е – малый параметр.

Представим систему (1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \text{е}) + \text{б} \tag{3}$$

и интегрируя обе части, получим:

$$x(t, \text{е}) = x(0, \text{е}) + \int_0^t f(s, x(s, \text{е}), \text{е})\, ds + \text{б}t. \tag{4}$$

Подберем параметр $\text{б} = (\text{б}_1, \text{б}_2, \dots, \text{б}_n\ )$ таким, чтобы правая часть равенства (4) удовлетворяла краевым условиям (2) при произвольном $x(0, \text{е})$. Тогда для определения параметра α получим систему алгебраических уравнений

$$Ax(0, \text{е}) + B[x(0, \text{е}) + \int_0^T f(s, x(s, \text{е}), \text{е})\, ds + \text{б}T,$$

откуда находим:

$$\text{б} = \frac{1}{T}\left[B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x(0, \text{е}) - \int_0^T f(s, x(s, \text{е}), \text{е})\, ds\right]. \tag{5}$$

Подставляя (5) в систему (3), получим начальную задачу вида:

$$\frac{dx(t,\text{e})}{dt}=f(t,x(t,\text{e}),\text{e})-\int_0^T f(t,x(t,\text{e}),\text{e})\,dt+\frac{1}{T}\Big[B^{-1}d-\Big(B^{-1}A+E\Big)x(0,\text{e})\Big], \quad (6)$$

$$x(0,\text{e})=a_0+\text{e}a_1+\text{e}^2a_1+\cdots, \quad (7)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots$ - подлежащие к вычислению параметры.

В качестве примера рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{dx}{dt}=t+2t^2+\text{e}y^2,$$
$$\frac{dy}{dt}=2t+t^2+2\text{e}x^2, \quad (8)$$
$$\frac{dz}{dt}=3t+4t^2+\text{e}x+\text{e}z^2,$$

$$\begin{pmatrix}4&5&2\\3&2&1\\2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(0,\text{e})\\y(0,\text{e})\\z(0,\text{e})\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&4\\3&1&5\\2&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(1,\text{e})\\y(1,\text{e})\\z(1,\text{e})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}. \quad (9)$$

В нашем конкретном случае:

$$A=\begin{pmatrix}4&5&2\\3&2&1\\2&4&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&4\\3&1&5\\2&3&2\end{pmatrix},\ \ d=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Вычисление показывает, что

$$B^{-1}d-(B^{-1}A+E)\begin{pmatrix}x(0,\text{e})\\y(0,\text{e})\\z(0,\text{e})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}17-0{,}32x(0,\text{e})+1{,}08y(0,\text{e})+0\cdot z(0,\text{e})\\-0{,}13-0{,}52x(0,\text{e})-2{,}56y(0,\text{e})-z(0,\text{e})\\0{,}52-0{,}91x(0,\text{e})-0{,}74y(0,\text{e})-z(0,\text{e})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

Таким образом, согласно (6), (7), краевая задача (8), (9) сводится к начальной задаче вида

$$\frac{dx(t,\text{e})}{dt}=t+2t^2+\text{e}y^2(t,\text{e})-\int_0^1\Big(t+2t^2+\text{e}y^2(t,\text{e})\Big)dt+0{,}17-0{,}32(a_0+\text{e}a_1\text{e}^2a_2+\cdots)+1{,}08\big(b_0+\text{e}b_1+\text{e}^2b_2+\cdots\big)$$

$$\frac{dy(t,\text{e})}{dt}=2t+t^2+2\text{e}x^2(t,\text{e})-\int_0^1\Big(2t+t^2+2\text{e}x^2(t,\text{e})\Big)dt-0{,}13-0{,}52(a_0+\text{e}a_1+ \quad (10)$$

$$+\text{e}^2a_2+\cdots)-2{,}56(b_0+\text{e}b_1+\text{e}^2b_2+\cdots)-c_0-\text{e}c_1-\text{e}^2c_2-\cdots,$$

$$\frac{dz(t,\text{e})}{dt}=3t+4t^2+\text{e}x(t,\text{e})+\text{e}z^2(t,\text{e})-\int_0^1\Big(3t+4t^2+\text{e}x(t,\text{e})+\text{e}z^2(t,\text{e})\Big)dt+0{,}52 -$$

$$-0{,}91(a_0+\text{e}a_1+\text{e}^2a_2+\cdots)-0{,}74(b_0+\text{e}b_1+\text{e}^2b_2+\cdots)-c_0-\text{e}c_1-\text{e}^2c_2-\cdots,$$

$$x(0,\text{e})=a_0+\text{e}a_1+\text{e}^2a_2+\cdots,$$
$$y(0,\text{e})=b_0+\text{e}b_1+\text{e}^2b+\cdots, \quad (11)$$
$$z(0,\text{e})=c_0+\text{e}c_1+\text{e}^2c_2+\cdots.$$

2. Построение асимптотического решения начальной задачи

Асимптотическое решение начальной задачи (10), (11) ищем в виде

$$x(t,\text{e})=x_0(t)+\text{e}x_1(t)+\text{e}^2x_2(t)+\cdots,$$
$$y(t,\text{e})=y_0(t)+\text{e}y_1(t)+\text{e}^2y_2(t)+\cdots, \quad (12)$$
$$z(t,\text{e})=z_0(t)+\text{e}z_1(t)+\text{e}^2z_2(t)+\cdots.$$

Подставим (12) в систему (10) и для определения $x_0(t), y_0(t), z_0(t)$ получим систему уравнений:

$$\frac{dx_0(t)}{dt}_0 = t + 2t^2 - \int_0^1 (t + 2t^2)dt + 0{,}17 - 0{,}32a_0 + 1{,}08b_0 + 0 \cdot c_0,$$
$$\frac{dy_0(t)}{dt} = 2t + t^2 - \int_0^1 (2t + t^2)\, dt - 0{,}13 - 0{,}52a_0 - 2{,}56b_0 - c_0, \quad (13)$$
$$\frac{dz_0(t)}{dt} = 3t + 4t^2 - \int_0^1 \left(3t + 4t^2\right) dt + 0{,}52 - 0{,}91a_0 - 0{,}74b_0 - c_0.$$

Отсюда, если

$$-0{,}32a_0 + 1{,}08b_0 + 0 \cdot c_0 = \int_0^1 (t + 2t^2)dt - 0{,}17,$$
$$-0{,}52a_0 + 2{,}56b_0 - c_0 = \int_0^1 (2t + t^2)dt + 0{,}13,$$
$$-0{,}91a_0 - 0{,}74b_0 - c_0 = \int_0^1 (3t + 4t^2)dt - 0{,}52,$$

то для a_0, b_0, c_0 получим систему уравнений

$$-0{,}32a_0 + 1{,}08b_0 + 0 \cdot c_0 = 0{,}99,$$
$$-0{,}52a_0 + 2{,}56b_0 - c_0 = 1{,}46,$$
$$-0{,}91a_0 - 0{,}74b_0 - c_0 = 2{,}31.$$

Отсюда находим: $a_0 = 14{,}08,\ b_0 = -7{,}09,\ c_0 = 3{,}20$

Следовательно, для определения членов разложения (12) $x_0(t), y_0(t), z_0(t)$ имеем задачу

$$\frac{dx_0(t)}{dt}_0 = t + 2t^2,\ \ x_0(0) = 14{,}08$$
$$\frac{dy_0(t)}{dt} = 2t + t^2,\qquad y_0(0) = -7{,}09 \quad (14)$$
$$\frac{dz_0(t)}{dt} = 3t + 4t^2,\quad z_0(0) = 3{,}20.$$

Решая задачу (14), получим:

$$x_0(t) = 14{,}08 + 0{,}5t^2 + 0{,}66t^3,$$
$$y_0(t) = -7{,}09 + t^2 + 0{,}33t^3, \quad (15)$$
$$z_0(t) = 3{,}20 + 1{,}5t^2 + 1{,}33t^3.$$

Далее, для членов $x_1(t), y_1(t), z_1(t)$ разложения (12) система уравнений записывается в виде:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = {y_0}^2(t) - \int_0^1 {y_0}^2(t)d\,t - 0{,}32a_1 + 1{,}08b_1 + 0 \cdot c_1,$$
$$\frac{dy_1(t)}{dt} = 2{x_0}^2(t) - \int_0^1 2{x_0}^2(t)d\,t - 0{,}52a_1 - 2{,}56b_1 - c_1,$$
$$\frac{dz_1(t)}{dt} = x_0(t) + z_0^2(t) - \int_0^1 \left(x_0(t) + z_0^2(t)\right)d\,t - 0{,}91a_1 - 0{,}74b_1 - c_1.$$

Параметры a_1, b_1, c_1 находим, решая систему уравнений вида:

$$-0{,}32a_1 + 1{,}08b_1 + 0 \cdot c_1 = \int_0^1 (-7{,}09 + t^2 + 0{,}33t^3)^2\, dt,$$
$$-0{,}52a_1 + 2{,}56b_1 - c_1 = 2\int_0^1 (14{,}08 + 0{,}5t^2 + 0{,}66t^3)dt,$$
$$-0{,}91a_1 - 0{,}74b_1 - c_1 = \int_0^1 [14{,}08 + 0{,}5t^2 + 0{,}66t^3 + (3{,}20 + 1{,}5t^2 + 1{,}33t^3)^2]dt.$$

Вычислив правую часть системы, получим:

$$-0{,}32a_1 + 1{,}08b_1 + 0 \cdot c_1 = 44{,}30\,,$$

$$-0{,}52a_1 + 2{,}56b_1 - c_1 = 203{,}04\,,$$
$$-0{,}91a_1 - 0{,}74b_1 - c_1 = 31{,}35.$$

Отсюда находим, что

$$a_1 = 40{,}78, \qquad b_0 = 122{,}96, \qquad c_1 = -312{,}36.$$

Составим начальную задачу для определения членов $x_1(t), y_1(t), z_1(t)$ разложения (12):

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 50{,}2681 - 14{,}18t^2 - 4{,}6794t^3 - t^4 + 0{,}66t^5 + 0{,}1089t^6, \quad x_1(0) = 40{,}78$$
$$\frac{dy_1(t)}{dt} = 198{,}2464 + 7{,}04t^2 + 9{,}2928t^3 + 0{,}25t^4 + 0{,}33t^5 + 0{,}4366t^6\,,$$
$$y_1(0) = 122{,}96\,, \qquad (16)$$
$$\frac{dz_1(t)}{dt} = 24{,}32 + 10{,}1t^2 + 9{,}172t^3 + 2{,}25t^4 + 3{,}99t^5 + 1{,}7689t^6, z_1(0) = -312{,}36$$

Решив систему (16), находим

$$x_1(t) = 40{,}78 + 50{,}27t - 4{,}73t^3 - 1{,}17t^4 + 0{,}11t^6 + 0{,}015t^7,$$
$$y_1(t) = 122{,}96 + 198{,}25t + 2{,}35t^3 + 2{,}32t^4 + 0{,}05t^5 + 0{,}055t^6 + 0{,}016t^7, \qquad (17)$$
$$z_1(t) = -312{,}36 + 3{,}37t^3 + 2{,}29t^4 + 0{,}45t^5 + 0{,}66t^6 + 0{,}25t^7.$$

Подставив (15), (17) в асимптотическое разложение (12), получим асимптотическое представление решения краевой задачи (8), (9) с точностью порядка $O(\mathrm{e}^2)$:

$$x(t,\mathrm{e}) = 14{,}08 + 0{,}5t^2 + 0{,}66t^3$$
$$+\, \mathrm{e}(40{,}78 + 50{,}27t - 4{,}73t^3 - 1{,}17t^4 + 0{,}11t^6 + 0{,}015t^7) +$$
$$+O(\mathrm{e}^2),$$
$$y(t,\mathrm{e}) = -7{,}09 + t^2 + 0{,}33t^3 + \mathrm{e}(122{,}96 + 198{,}25t + 2{,}35t^3 + 2{,}32t^4 + 0{,}05t^5 +$$
$$+0{,}055t^6 + 0{,}016t^7) + O(\mathrm{e}^2),$$
$$z(t,\mathrm{e}) = 3{,}20 + 1{,}5t^2 + 1{,}33t^3 + \mathrm{e}(-312{,}36 + 3{,}37t^3 + 2{,}29t^4 + 0{,}45t^5 +$$
$$+0{,}66t^6 + 0{,}25t^7) + O(\mathrm{e}^2).$$

Литература:

1. Алымбаев А.Т. Численные, численно-асимптотические и асимптотические методы исследования краевых задач. - Бишкек: Изд. КНУ, 2015,- 205 с.
2. Алымбаев А.Т. Периодические решения системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последействием. Проблемы современной науки и образования, 2017, № 3 (85),- с. 6-16.
3. Самойленко А.Н., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. - Киев: Вища школа, 1976, -179 с.