УДК: 517.928

Мамыров Ж., Текебаева Г.М., Садырбаева А.Б., Джумабаева А.Т.
ИГУ им. К.Тыныстанова
Алымбаев А.Т.
Восточный университет им. Махмуда-Кашгари Барскани
г. Бишкек

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ КРИВОЙ РОСТА, ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ ЛИНЕЙНО-ЦИКЛИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

В данной работе рассматривается задача построения прогнозирующей функции в условиях четко выраженной тенденции спроса к возрастанию или убыванию с циклическими составляющими. Математическая модель построена на основе метода наименьших квадратов. Получена оценка погрешности между статистическими данными и прогнозирующей функцией. Для определения пригодности математического моделя построена карта контроля.

Ключевые слова: *Кривые роста, линейно-циклическая функция, метод наименьших квадратов, оценка погрешности, карта контроля.*

Бул макалада функцияны прогноздоо маселесин түзүү, так аныкталган суроо талаптын багыттарынын өсүшүнүн же кемүүсүнүн циклдик түзүлүштөрүнө карата каралган. Математикалык модель эң кичине квадраттын айырмасынын негизинде түзүлгөн. Статистикалык маалыматтардын жана прогноздук функциянын ортосундагы каталыктын бааланышы алынды. Математикалык моделдин жарамдуулугун аныктоо үчүн текшерүү картасы түзүлгөн.

Негизги сөздөр: *Ийри өсүшү, сызыктуу циклдык функция, эң кичине квадраттын айырмасы, каталыктын бааланышы, текшерүү картасы.*

In this paper we consider the problem of constructing a prediction function in terms of a clear trend demand to increase or decrease of cyclic components. The mathematical model was constructed based on the method of least squares. An error estimate between the statistical data and prediction function is obtained. To determine the suitability of the mathematical model built up map of control.

Key words: *Growth curves, linear-cyclic function, least-squares method, error estimation, control map.*

Задача прогнозирования в экономике достаточно распространенная задача. По существу прогноз позволяет анализировать состояние экономики или отдельную ее часть, формирует прогностические оценки при составлении краткосрочных и долгосрочных планов выпуска продукции производства.

Состояния рынка в большей степени зависит от спроса продукции, которая носит характер постоянный, периодический (циклический), тенденции к возрастанию или убыванию с циклическими составляющими, относительно времени.

Один из способов определение прогностических оценок является построения прогнозирующих функций по некоторым статистическим данным. Такого рода задача в математике называется задачей интерполирования функции, задачей приближения функции или задачей сглаживания таблично заданных функций.

Среди способов интерполирования наиболее распространена формула Тейлора, интерполяционные многочлены Лагранжа, Ньютона, ряды Фурье, метод наименьших квадратов и т.д. Эти методы имеют различные плюсы и минусы с точки зрении их эффективности и точности.

Допустим, что поведение спроса носит линейно циклический характер.

Прогнозирующую функцию ищем в виде:

$$Y=a + bx +c \cos\frac{2\pi}{N}x+d \sin\frac{2\pi}{N}x, \qquad (1)$$

где N - число периодов в одном цикле, определив параметры a, b, c, d согласно алгоритма наименьших квадратов, из условия минимума сумму квадратов отклонений:

$$D(a,b,c,d) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}((a + bx + c \cos\frac{2\pi}{N}x_i + d \sin\frac{2\pi}{N}x_i) - y_i)^2 \to min \qquad (2)$$

Посмотрим нормальную систему уравнений относительно параметра.

a, b, c, d:

$\frac{\partial\phi}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[(a + bx + c\cos\frac{2\pi}{N}x_i + d\sin\frac{2\pi}{N}x_i) - y_i\right] = 0$

$\frac{\partial\phi}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[(a + bx_i + c\cos\frac{2\pi}{N}x_i + d\sin\frac{2\pi}{N}x_i) - y_i\right]x_i = 0,$

$\frac{\partial\phi}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[(a + bx_i + c\cos\frac{2\pi}{N}x_i + d\sin\frac{2\pi}{N}x_i) - y_i\right]\cos\frac{2\pi}{N}x_i = 0,$ 3)

$\frac{\partial\phi}{\partial d} = 2\sum_{i=0}^{n}\left[(a + bx_i + c\cos\frac{2\pi}{N}x_i + d\sin\frac{2\pi}{N}x_i) - y_i\right]\sin\frac{2\pi}{N}x_i = 0,$

Отсюда имеем систему уравнений

$na + b * \sum_{i=1}^{n} x_i + c * \sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2\pi}{N}x_i + d * \sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2\pi}{N}x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$,

$a * \sum_{i=1}^{n} x_i + b * \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c * \sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2\pi}{N}x_i + d * \sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2\pi}{N}x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (4)

$$a * \sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2\pi}{N}x_i + b * \sum_{i=1}^{n} x_i\cos\frac{2\pi}{N}x_i + c\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{2\pi}{N}x_i + d\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2\pi}{N}x_i\cos\frac{2\pi}{N}x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\cos\frac{2\pi}{N}x_i$$

$$a * \sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2\pi}{N}x_i + b * \sum_{i=1}^{n} x_i\sin\frac{2\pi}{N}x_i + c * \sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2\pi}{N}x_i\sin\frac{2\pi}{N}x_i + d\sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{2\pi}{N}x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\sin\frac{2\pi}{N}x_i$$

Возможны два случая: 1) N неявляется целым числом, тогда параметры a, b, c, d находятся решением системы уравнений (4); 2) N- целое положительное число. Тогда найдется такое положительное число m, что n=m N.

Если x_i=i (i=1, 2, 3, …), справедливы тождества:

$\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2\pi}{N}x_i = 0;\quad \sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{2\pi}{N}x_i = \frac{n}{2}\ ;\quad \sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2\pi}{N}x_i = 0$

$\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{2\pi}{N}x_i = 0\ ;\quad \sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2\pi}{N}x_i\cos\frac{2\pi}{N}x_i = 0$

На основании этих тождеств система (4) принимает вид

$$na + b * \sum_{i=1}^{n} x_i + 0 * c + 0 * d = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a * \sum_{i=1}^{n} x_i + b * \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{n}{2}c + d\sum_{i=1}^{n} x_i\sin\frac{2\pi}{N}x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

$0*a + \frac{n}{2}b + \frac{n}{2} * c + o * d = \sum_{i=1}^{n} y_i\cos\frac{2\pi}{N}x_i$ (5)

$0*a + b\sum_{i=0}^{n} x_i\sin\frac{2\pi}{N}x_i + 0 * c + \frac{n}{2}d = \sum_{i=1}^{n} y_i sin\frac{2p}{N}x_i$

В качестве примера рассмотрим статистические показатели розничной торговли за один год (млн. сом)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	498	505	517	521	535	548	544	546	529	548	543	557

Оставим расчётную таблицу:

Таблица №1

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	$x_i\ sin\frac{2p}{N}x_i$	$y_i\ sin\frac{2p}{N}x_i$	$y_i\ cos\frac{2p}{N}x_i$	$\sin\frac{2p}{N}x_i$	$\cos\frac{2p}{N}x_i$	x_i^2

1	1	498	498	1,000	249,000	431,268	0,500	0,866	1
2	2	505	1010	1,732	437,330	252,500	0,866	0,500	4
3	3	517	1551	3,000	517,000	0,000	1,000	0,000	9
4	4	521	2084	3,464	451,186	-260,500	0,86	-0,500	16
5	5	535	2675	2,500	267,500	-463,310	0,500	-0,866	25
6	6	548	3288	0,000	0,000	-548,000	0,000	-1,000	36
7	7	544	3808	-3,500	-2,72,000	-471,104	-0,500	-0,866	49
8	8	546	4368	-6,928	-472,836	-273,000	-0,866	-0,500	64
9	9	529	4761	-9,000	-529,00	0,000	-1,000	0,000	81
10	10	548	5480	-8,660	-474,568	274,00	-0,866	0,500	100
11	11	543	5973	-5,500	-271,500	470,238	-0,500	0,866	121
12	12	557	6684	0,000	0,000	557,00	0,000	1,000	144
$\sum$	78	6391	42180	-21,892	-97,888	-30,908	-	-	650

В результате этих вычислений из системы (5) получим систему уравнений вида:

12a+ 78b + 0*c+0*d=6391,

78a+650b+6c-21,892d=42180,

0*a+6b+6c+0*d=-30,908.

0*a-21,892b+0*c+6d=-97,888.

Решая эту систему, получим a=497,12; b=5,5; c=-9,32; d=5,6

Таким образом, искомая прогнозирующая функция имеет вид:

$$y^0 = 497{,}12 + 5{,}5x - 9{,}32\,cos\frac{p}{6}x + 5{,}6sin\frac{p}{6}x. \quad (6)$$

Для сравнения результаты полученной моделей роста (6) и статическими данными, составим таблицу контроля.

Таблица №2

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	498	505	517	521	535	548	544	546	529	548	543	557
y_i^0	491,31	508,31	519,22	528,63	515,49	539,44	540,89	540,93	541,02	542,61	546,75	553,9
$y_i - y_i^0$	6,15	-3,31	-2,22	-7,63	-0,49	8,56	3,11	5,07	-12,02	5,39	-3,75	3,2
$\lvert(y_i^0 - y_{i-1}^0)\rvert$		9,46	1,09	5,41	7,14	9,05	5,45	1,96	17,09	17,41	9,14	6,95

Вычислим системы погрешности

$$y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^0)^2}{n-4}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}(y_i - y_i^0)^2}{12-4}} = \sqrt{\frac{418б74}{8}} = \sqrt{52{,}34} = 7{,}23. \quad (7)$$

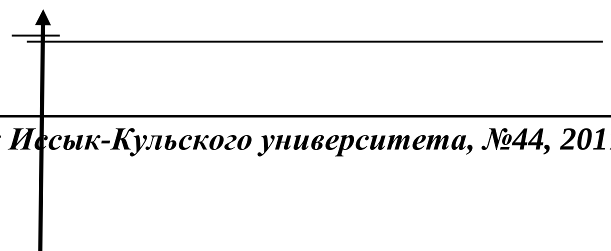
Согласно формуле (7) следует, что стандартные отклонения, характеризующие погрешность прогноза, равняется 7,23 ед. Это отклонение не гарантирует пригодность прогноза (6), характеристики уровни спроса, ибо по абсолютной величине разность $y_i - y_i^0$ для x_4, x_6, x_9 превышает 7,23ед. Для определение пригодности прогноза (6), построим карты контроля, вычислив его верхние и нижние границы согласно формуле:

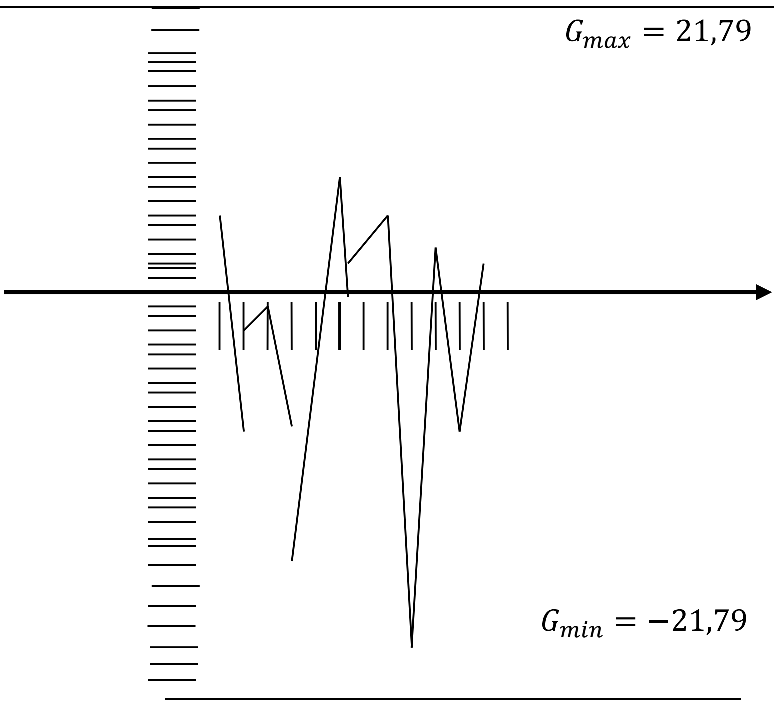
$$G_{mox} = +2{,}66\sum_{i=1}^{12}\frac{\lvert(y_i - y_{i-1}) - (y_i^0 - y_{i-1}^0)\rvert}{12-1} = +2{,}66 * \frac{90{,}15}{11} = 21{,}79$$

$$G_{min} = -2{,}66\sum_{i=1}^{12}\frac{\lvert(y_i - y_{i-1)} - (y_i^0 - y_{i-1}^0)\rvert}{12-1} = -2{,}66 * \frac{90{,}15}{11} = -21{,}79.$$

Построим карту контроля:

$y_i - y_i^0$





Из этой диаграммы следует, что нет точки вне контрольной зоны. Следовательно, прогнозирующую функцию (6) можно использовать для характеристики уровня спроса статистических данных.

Литература:

1. Дж. Бигель. Управление производством. - М.: Мир, 1973.
2. Эндрю Ф.Сигел, Практическая бизнес-статистика. Перевод с английского. - М.: Вильямс, 2002.
3. Грачев Ю.П. Математические методы планирования экспериментов. -М.: Пищевая промышленность, 1979.
4. Алымбаев А.Т., Кадырова М.К. Определение тенденциозности развития статистических показателей экономики методом скользящей средней. Вестник КЭУ, №4(10), 2008 год, -С. 141-143.