

УДК: 514.18

Такырбашев А.Б., Соромбаев С.Б.

ИГУ им. К.Тыныстанова

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ – МАТЕМАТИЧЕСКАЯ НАУКА ГАСПАРА МОНЖА

Статья содержит малоизвестные сведения о выдающемся ученом, создателе науки начертательной геометрии, и приурочивается к 270 летию со дня рождения.

МОНЖ ГАСПАР (10.5.1746, Бон, Кот-д'Ор, — 28.7.1818, Париж), французский математик и общественный деятель, член Парижской АН (1780). Профессор Мезьерской военно-инженерной школы (с 1768), один из основателей и профессор Политехнической школы в Париже (с 1794).

На востоке Франции, в Бургундии, богатой виноградниками местности, в небольшом городке Бон 10 мая 1746 г. родился великий геометр Гаспар Монж.

У супругов Монж было пятеро детей. Гаспар был старшим. Второй сын, Луи, был профессором математики и астрономии. Младший сын, Жан, стал профессором математики, гидрографии, и навигации. То, что в годы "старого порядка" из семьи третьего сословия (причем низших слоев) вышло трое ученых, было явлением исключительным.

Учиться Гаспар Монж начал с шести лет, когда отец определил его в школу г. Бона. Эта школа принадлежала монахам. Монж скоро стал гордостью школы. В его экзаменационной работе 1762 г. на первой странице сообщается, что Гаспар Монж отвечал на вопросы по арифметике, алгебре, по пропорциям и логарифмам, а также по геометрии и блестяще решил задачи. После окончания школы его, как лучшего ученика, учителя рекомендовали в Колледж Св. Троицы в Лионе, куда он и был принят в 1762 г. Вскоре, несмотря на молодость, он получил в этом колледже место преподавателя физики.

Летом 1764 г. через Бон проезжал подполковник инженерной службы дю Виньо, помощник командира Мезьерской школы. Случайно он увидел начерченный Монжем план г. Бона. Ему был представлен находящийся дома на летнем отдыхе Монж, и дю Виньо предложил Монжу поступить в Мезьерскую школу, предупредив, что он не будет там получать никакого содержания. Отец Монжа решил пойти на эти дополнительные расходы.

Монж не имел благородного, дворянского происхождения, поэтому приняли его на отделение строителей. Сюда принимали унтер-офицеров и детей мастеровых. Ученики строительного отделения изучали элементы алгебры и геометрии, черчение, изготавливали модели различных систем сводов. Монж пришел в школу с хорошей математической подготовкой и с опытом преподавания. Естественно, отделение строителей мыслится им лишь как переходная ступень к самой школе. Продвижение его было ускорено решением одной из важных задач. Требовалось расположить укрепления таким образом, чтобы обороняемый пункт не мог быть разрушен артиллерией противника, расположенной в соответствующих точках окрестности. Задача решалась практически, с помощью нивелирования и расчетов. Монж быстро решил задачу, и сначала его решение не рассмотрели, справедливо полагая, что у соискателя не было физической возможности выполнить ее из-за необходимых сложных вычислений. Монж настоял, чтобы его решение проверили; кончилось тем, что офицеры вынуждены были сдаться перед очевидностью; молодой ремесленник при решении задачи использовал собственный метод, замечательный со всех точек зрения. Так появилась на свет начертательная геометрия, наука, которую в "Журнале" Политехнической школы Монж определил следующим образом: "Искусство представлять на листе бумаги, имеющем только два измерения, предметы, имеющие три размера, которые подчинены точному определению" [1].

После этого Монж был зачислен в штат преподавателей школы. В течение первых лет в школе он читал теоретический и экспериментальный курс физики, химию, математику, резку камня, теорию перспективы и теней. В 24 г. по возрасту Гаспар Монж - профессор Мезьерской школы.

Самую важную роль в научном творчестве Монжа в мезьерский период жизни играет математика. В эти годы он развивает идеи начертательной геометрии и находит для них многочисленные приложения. Одновременно работает в области анализа, теории поверхностей, физики и химии. Монж публикует пять мемуаров по теории дифференциальных уравнений в частных производных: он связывает эти уравнения с порождаемыми данным способом поверхностями. Он в это же время публикует два мемуара о свойствах некоторых поверхностей с применением к теории теней и полутеней. Его начертательная геометрия еще не опубликована, но о ней знают, и Монж широко известен как выдающийся геометр. Создание начертательной геометрии явилось достаточным основанием для избрания Монжа в число членов Академии наук. 15 января 1780 г. Монж впервые расписался в книге присутствия Академии наук. Участие в заседаниях Академии наук требовало постоянного присутствия в Париже. В 1784 г. Гаспар Монж навсегда распрощался с Мезьерской школой и переехал в Париж.

Итак, в 80-х годах Монж не только известный преподаватель, он один из крупнейших ученых Франции. В 1790 г. ему 45 лет, Монж на вершине своей научной славы: уже заложены основы большинства его научных теорий. Монж выделялся среди ученых Академии наук ярким талантом, бурной деловитостью и постоянной увлеченностью.

Обычно имя Монжа связывается с созданием начертательной геометрии: это не совсем так. Начертательная геометрия в основных своих идеях существовала и до Монжа: известен был координатный метод, ортогональное проектирование и его применение к построениям планов и чертежей. Однако не было ни общей теории, ни ясных и четких способов ее применения на практике. Монж создал начертательную геометрию как математическую науку, свел воедино, в одну логическую систему, отдельные законы, теоремы и правила, известные до него, и, кроме того, сделал геометрию основным предметом в высшей технической школе. Как указывает Шаль, начертательная геометрия явилась общей теорией направлений техники, связанных с геометрией: она приводит к небольшому числу отвлеченных принципов и к удобным и достоверным построениям все геометрические действия, относящиеся к технике. Этим не исчерпывается ее значение: "Начертательная геометрия, - говорит Шаль, - будучи графическим переводом общей рациональной геометрии, послужила светочем при изыскании и истолковании результатов геометрии аналитической; по характеру своих приемов, имевших целью установить строгое и полное соотношение между фигурами, действительно начерченными на плоскости, и телами, воображаемыми в пространстве, она ближе ознакомила с геометрическими формами; она дала возможность представлять их скоро и точно и тем удвоила наши средства исследования в науке о пространстве" [2].

Особый интерес вызывают его лекции по начертательной геометрии. Их Монж впервые прочел для слушателей первого набора Нормальной школы. Это был первый публичный курс. Стенограммы лекций были отредактированы автором и напечатаны в "Журнале" Нормальной школы (т. I-IV за 1795 г.); первое издание книги осуществлено в 1798 г., тогда же его лекции начали выходить отдельными выпусками. Всего вышло 13 выпусков. С 1 сентября 1795 г. курс начертательной геометрии читался в Политехнической школе. Курс, прочитанный в Политехнической школе, отличался от курса Нормальной школы и имел некоторые принципиальные особенности. Сама структура этого курса, который Монж считал важнейшим предметом подготовки инженеров, тесно увязана с технической практикой.

Особый интерес представляет программа первых 24 лекций. Содержание программы, составленной Монжем, значительно шире наименования самого предмета и охватывает не только геометрию, но и некоторые новые прикладные и технические науки. У него, очевидно, была идея создания общего графического метода решения технических задач. Это явствует из предисловия ("Программы"), которое Монж предпослал своему курсу. Он утверждает, что целью подготовки специалистов является обучение их "пользованию всевозможными инструментами, предназначенными для того, чтобы вносить точность в работу и измерять её степень". И далее: "Народному образованию будет дано полезное направление, если наши молодые специалисты привыкнут применять начертательную геометрию к графическим построениям, необходимым во многих областях, и пользоваться ею для построения и определения элементов машин, при помощи которых человек, используя силы природы, оставляет за собой только работу разума "[4].

Рассмотрим шире содержание разделов его начертательной геометрии.

Первый раздел "Начертательной геометрии" посвящён изложению метода проекций. Монж начинает с изображения точки и исследует возможные способы определения её положения в пространстве. Прежде чем перейти к ортогональному проектированию, он определяет положение точки относительно трёх точек в пространстве, положение которых известно, затем - относительно трёх заданных прямых. Так, если точка находится на некотором расстоянии от первой прямой «А», то, следовательно, она находится на поверхности кругового цилиндра, осью которого является «А», а радиус основания равен заданному расстоянию. Если, кроме того, искомая точка находится на некотором другом (также определённом) расстоянии от иной прямой «В», это означает, что она лежит и на поверхности второго кругового цилиндра, осью которого служит «В». Следовательно, точка находится на линии пересечения обоих цилиндров, которая, очевидно, является кривой двойкой кривизны. Вводя затем подобным образом третий цилиндр с осью «С», расстояние которой от точки задано, мы приходим к определению пересечений кривой двойкой кривизны с цилиндром; таких пересечений в общем случае будет восемь. Итак, искомая точка может быть одной из восьми и для точного определения её положения необходимо задать ещё некоторые дополнительные условия.

Исходя из этого рассуждения, Монж приходит к выводу, что определять положение точки в пространстве следует не относительно трёх точек или трёх линий, а относительно трёх плоскостей. Таким образом, пишет он, пользуются при применении алгебры к геометрии. Но в начертательной геометрии, "которая начала применяться гораздо раньше и значительно большим числом людей, и притом людей, время которых дорого, методы ещё более упростились; вместо того, чтобы рассматривать три плоскости, научились при помощи проекций ограничиваться рассмотрением только двух плоскостей" [5].

Второй раздел "Начертательной геометрии" посвящён изучению построения касательных плоскостей и нормалей к кривым поверхностям. Монж определяет касательную плоскость как плоскость, проведённую через две касательные к образующим в точке их пересечения; прямую, проведённую через точку касания перпендикулярно к касательной плоскости, он называет нормалью к поверхности. В преамбуле раздела Монж указывает на прикладную важность этой теории; примеры он заимствует из архитектуры и живописи. В первом случае он рассматривает обтёсанные камни, предназначенные для кладки сводов, и грани их соприкосновения между собой.

Третий раздел книги посвящён теории пересечения кривых поверхностей. Эта теория получила большое значение для развития построения машин. Рассматривая пересечение таких поверхностей, Монж замечает, что последовательность точек, общая для обеих поверхностей, будет в общем случае кривой линией; в частности, она может

выродиться в прямую линию или лежать в одной плоскости; наиболее общим случаем будет кривая двойкой кривизны. Он указывает при этом, что можно установить соответствие между операциями алгебры и методами начертательной геометрии. В алгебре способ исключения неизвестных приводит к одному уравнению с одним неизвестным, аналогично в начертательной геометрии кривые и поверхности могут принимать различные положения, но образующиеся при этом новые объекты будут выражаться соответствующим уравнением. При изложении самого способа построения Монж пользуется системой вспомогательных плоскостей. В некоторых случаях, чтобы получить более легкое и изящное решение, можно вместо этого пользоваться совокупностью кривых поверхностей; иногда - системой горизонтальных плоскостей. Наконец, для случая двух поверхностей вращения, оси которых лежат в одной плоскости, но не параллельны друг другу, самым подходящим будет применение системы сферических поверхностей, общий центр которых находится в точке пересечения осей.

Четвёртый раздел собрал прикладные задачи начертательной геометрии. Здесь Монж обращается к общеобразовательному значению этой науки, которое, по его мнению, должно постоянно возрастать. В конце XVIII в. это было чем-то вроде энциклопедии общей техники; кроме того, изучение начертательной геометрии развивало у учащихся пространственное воображение, совершенно необходимое инженеру.

Первые три задачи имеют скорее теоретический, чем практический интерес:

- нахождение центра и радиуса шара, поверхность которого проходит через четыре произвольно заданные точки в пространстве;

- вписание шара в заданную треугольную пирамиду;

- построение проекции точки, расстояния которой до трёх заданных точек известно.

Четвёртая и пятая задачи относятся к картографии.

Любопытна шестая задача, где Монж рассматривает военную новинку конца XVIII в. Генерал армии, стоящей перед лицом врага, не имеет карты местности, занимаемой последним; она ему нужна, чтобы составить план предпринимаемой атаки. В его распоряжении имеется аэростат. Он поручает инженеру подняться на аэростате и составить карту, чтобы сделать приближённую нивелировку местности. Но Монж имеет основание думать, что если аэростат будет менять своё положение над местностью, враг догадается о его намерениях; поэтому он позволяет инженеру подниматься на разные высоты, если это нужно, но не разрешает менять положение аэростата. Инженер имеет угломерный инструмент, снабжённый также и отвесом. Спрашивается, как он может исполнить приказание генерала?"[4] Далее Монж приводит рассуждения разъясняющие решение задачи, которое (по его словам) настолько просто, что не требует рисунка.

Пятый раздел книги посвящён исследованию некоторых теоретических вопросов, касающихся кривизны пространственных кривых и кривизны поверхностей. Монж указывает на необходимость этой теории для профилирования кулачков и зубьев зубчатых колёс. В XVIII веке "кулачки вращающихся валов" выходили буквально "из-под топора", и, как известно, до конца века подавляющее количество зубчатых колёс было деревянным, в том числе колёса карманных часов, "яиц". После изложения теории кривых двойкой кривизны и в качестве частного случая плоских кривых, Монж переходит к доказательству теоремы о кривых поверхностях. Каждая поверхность имеет в любой своей точке только две кривизны; каждая кривизна имеет своё собственное направление, свой собственный радиус, а две дуги, по которым эти кривизны измеряются, перпендикулярны друг другу на поверхности. При этом он пользуется исключительно геометрическими соображениями. Он делит все поверхности (с точки зрения кривизны) на три класса: к первому относятся те, которые во всех своих точках не имеют ни какой кривизны (т.е. плоскости); ко второму – поверхности, имеющие в каждой данной точке единственную кривизну; к третьему -

поверхности, имеющие в каждой точке две различные кривизны, которые могут изменяться независимо одна от другой (в частном случае, например, в случае сферы, обе кривизны равны между собой).

К начертательной геометрии Монжа примыкает его "Теория перспективы". Однако между этими двумя разделами курса, который Монж читал в Политехнической школе и в Высшей нормальной, есть существенная разница. Начертательная геометрия представляет собой не что иное, как классическую геометрию в применении к некоторым построениям. Теория перспективы является принципиально новым разделом геометрии; впоследствии Понселе построит на её основании проективную геометрию и таким образом выйдет за пределы классических идей.

Изложив основы линейной перспективы, Монж переходит к воздушной перспективе, которую излагает весьма тщательно, подчеркивая при этом её экспериментальный характер: "Мы далеки от мысли что изложенное, представляет законченное учение; это лишь отдельно высказанные мысли, предназначенные для того, чтобы открыть более или менее новые пути. Мы хотели бы, чтобы из наших попыток выросли более глубокие исследования и чтобы они стали для науки началом некоторых будущих успехов". [7] Монж изучает освещённость с точки зрения физики и физиологии. Он учитывает сопротивление среды распространению светового луча, оценивает отражение света гладкой и шероховатой (матовой) поверхности. Далее рассматривает случай сферической поверхности: несмотря на то, что освещённость поверхности одинакова, сила света будет тем меньше, чем ближе к нормали направление светового луча. В качестве примера Монж приводит Луну, которую рассматривает как матовую поверхность, отражающую солнечные лучи. Поскольку Луна не имеет атмосферы, то из-за её сферической поверхности мы видим возле её краёв под тем же углом зрения большие поверхности, чем в её центре, и, следовательно, освещённость Луны у краёв представляется нам большей, чем в центральной части.

Монж был не только ученым - он был практиком и поэтому ближе других подошел к решению комплексных проблем, равно относящихся к той или иной области человеческой деятельности; поэтому, возможно, начертательная геометрия именно у него приобрела свою классическую форму. Действительно, чтобы предпринять какие-либо технологические операции над телом, имеющим вполне определённую форму, нужно найти адекватное изображение этой формы; в противном случае любое решение будет частным и не сможет привести к созданию соответствующей теории. У начертательной геометрии в использовании и в понимании Монжа была двоякая роль: она, во-первых, подменяла собой определённый свод технических познаний, была в некотором роде "энциклопедией техники"; во-вторых, она давала в руки инженера ряд графических методов решения задач. Наконец, с начертательной геометрией был создан общепонятный язык техников, очень скоро получивший международное значение.

Однако, кроме своего практического применения, начертательная геометрия несет ещё одну важную функцию, на которую указал в своё время ученик Монжа Дюпен: она является графической традицией рациональной геометрии. Геометрия имеет дело с предметами, ориентированными в трёхмерном пространстве; целью начертательной геометрии в таком случае является представление в воображении пространственных форм, их сочетаний и операций над ними. Мы говорим здесь о геометрии конца XVIII - начала XIX в., с которой имели дело математики до опубликования революционных идей Н.И.Лобачевского. Ум человека приучается представлять пространственные образы не как индивидуальные образования - точки, линии, поверхности и тела, существующие в идеальном абстрактном пространстве, а как совокупности, которые можно приближать друг к другу, комбинировать; можно предвидеть результаты их пересечений. Для геометрии той эпохи идеи эти несли с собой новую мысль; они послужили стимулом к созданию новой

геометрии, одним из основоположников которой явился сам Монж.

Мы видели, основной задачей, поставленной Монжем, было представление трёхмерных тел природы на двумерной поверхности. Второй его задачей было определить для подобного представления математические соотношения, основанные на форме и положении тел. К решению он подходит планомерно, детально разбирая построение точки, линии, поверхности. Именно этой планомерности не было у его предшественников; они предлагали либо теоретические исследования, которым трудно было найти практическое применение, либо ряд проверенных рецептов, которые следовало выучить на память без рассуждений.

Монж не стал относить положение изучаемых объектов к фиксированным точкам или к прямым линиям; его метод заключается в том, что он относит объекты к плоскостям, перпендикулярным между собой, тогда каждая точка и каждая линия проектируемого объекта также проектируются на эти плоскости. В некоторых простейших случаях принцип проектирования упрощается. Так, плоскость полностью определяется прямыми линиями, "следами" на плоскостях проектирования; сфера - двумя проекциями её центра и большого круга; цилиндр - своим пересечением с одной из плоскостей проектирования и проекцией его сечения.

Следующей задачей, поставленной Монжем, было изображение сочетаний точек, линий и поверхностей. При построении плоскостей Монж рассматривает три случая: плоскости, параллельные между собой, перпендикулярные и наклонные. Естественно, в первом случае ему приходится определять расстояние между плоскостями, а в последнем - величину наклона.

Затем Монж переходит к изучению линий и плоскостей, которые занимают относительно кривых поверхностей какие-либо важные положения; главными из них являются касательные плоскости и нормали. Монж разработал графические методы изображения подобных плоскостей и линий исходя из таких предположений; точки, через которые следует провести нормаль касательную плоскость, заданы на поверхности, вне поверхности заданы одна точка нормали и две точки касательной плоскости. Он специально занимается также случаями, когда касательная плоскость проведена к одной, двум или трём сферам.

Изложение курса завершают построения, выполняемые в развитие основных идей. Однако Монжа не удовлетворяло пассивное изучение его предмета, от своих учеников он требовал активности, чтобы они решали и такие задачи, которые выходили за пределы курса. Это стремление ввести учащегося в творческую лабораторию учёного особенно характерно для Монжа. Он не создал научной школы, но среди его учеников оказалось много крупных учёных, продвинувших вперёд и математику и механику. Его начертательная геометрия очень быстро перестала быть ведущим предметом в системе преподавания, но, несмотря на это, именно с ней была связана важнейшая задача высшего технического образования, выполненная уже в XIX в., - становление прикладной и технической механики.

Основные труды Г.Монжа

Основные труды Монжа относятся к геометрии. Исходя из идеи проектирования предметов на две взаимно перпендикулярные плоскости, Монж создал общий метод изображения пространственных фигур на плоскости. Работы в этой области были выполнены Монжем в первые годы его деятельности в Мезьерской школе (до середины 70-х гг.), однако написанный им труд «Начертательная геометрия» был издан только в 1799 году. В работах «Мемуар о развёртках, радиусах кривизны и различных родах перегиба

кривых двойкой кривизны» (1771, изд. 1785) и «О свойствах многих родов кривых поверхностей...» (1775, изд. 1780) Монж дал обстоятельное изложение дифференциальной геометрии пространственных кривых и поверхностей: изучил эволюты пространственных кривых, кривизны поверхностей, исследовал огибающие, развёртывающиеся поверхности и т. д.

В 1881 рассмотрел общие свойства нормальных конгруэнций и ввёл в науку линии кривизны поверхностей. В труде Монжа «Приложение анализа к геометрии» (1795), помимо важных открытий по дифференциальной геометрии, дано геометрическое истолкование уравнений с частными производными и, с другой стороны, изложение геометрических фактов на языке уравнений с частными производными. Монжу принадлежат также работы по математическому анализу, химии, оптике, метеорологии и практической механике [9].

В период Великой французской революции Монж состоял в комиссии по установлению системы мер и весов, в 1792—93 был морским министром. В 1793 заведовал пороховыми и пушечными заводами республики. Активно участвовал в создании Высшей нормальной школы (1794), Политехнической школы (1794). В период Директории Монж сблизился с генералом Бонапартом, участвовал в его египетской экспедиции 1798—1801. Вернулся во Францию вместе с Бонапартом; возобновил преподавание в Политехнической школе. Во времена Первой империи Монж стал сенатором, получил титул графа. В период Реставрации Монж был лишён всех прав и изгнан из Политехнической школы и Академии наук. Не имея средств к существованию и возможности работать, он умер в нищете [10].

Литература:

1. Aubry P. V. Monge le savant ami de Napoleon Bonaparte, 1746 - 1818. Paris, 1954, pp. 14 - 15.
2. Шаль М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. М., 1883, с.218.
3. Taton R. L'oeuvre scientifique de Monge. Paris, 1951, pp. 93 - 95.
4. Монж Гаспар. Начертательная геометрия. Пер. В.Ф.Газе. -М., Изд-во АН СССР, 1947, С. 9 - 10.
5. Монж Гаспар. Начертательная геометрия, Пер. В.Ф.Газе. -М., Изд-во АН СССР, 1947, С. 20 - 21.
6. Монж Гаспар . Начертательная геометрия, Пер. В.Ф.Газе. -М., Изд-во АН СССР, 1947, с. 152.
7. Монж Гаспар. Начертательная геометрия, Пер. В.Ф.Газе. -М., Изд-во АН СССР, 1947, С. 233 – 234.
8. Монж Гаспар. Начертательная геометрия, Пер. В.Ф.Газе. -М., Изд-во АН СССР, 1947, С. 233 – 234.
9. Соч.: Гйометрие descriptive, Р., 1799; Feuilles d'analyse appliquee a la гйометрие, Р., 1795; Application de l'algibre a la гйометрие, Р., 1805; в рус. пер. — Приложение анализа к геометрии, М. — Л., 1936; Начертательная геометрия, М., 1947.
10. Гаспар Монж. Сб. ст. к двухсотлетию со дня рождения, под ред. акад. В.И.Смирнова, М., 1947; Стройк Д. Д., Очерк истории дифференциальной геометрии до XX столетия, пер. с англ., М. — Л., 1941; Араго Ф., Биография знаменитых астрономов, физиков и геометров, пер. с франц., т. 1, СПб, 1859, с. 499—589.