ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com
ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

УДК: 517.983 DOI:10.35803/1694-5298.2022.2.490-49

АСАНОВ А., ЧОЮБЕКОВ С. М.

[1]Институт математики, НАН КР, Бишкек, Кыргызская Республика

[2]Ошский государственный университет, Ош, Кыргызская Республика

ASANOV A., CHOYUBEKOV S. M.

[1]Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, Kyrgyz Republic

[2]Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic

choybekov.25.04.70@gmail.com

ВОЛЬТЕРРАНЫН БИРИНЧИ ТИПТЕГИ СЫЗАКТУУ КЛАССИКАЛЫК ЭМЕС ТЕҢДЕМЕЛЕРИНЕ ЧЕЧИМДЕРДИН ПАРАМЕТРИН ТАНДОО

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

SELECTING THE PARAMETRS SOIUTIONS OF LINEAR NON-CLASSISAL VOLTEPPA EQUATIONS OF THE FIRST KING

Көпчүлүк жумуштарда интегралдык теңдемелер үчүн ар кандай маселелер иликтенген. Каралып жаткан жумушта, Вольтерранын биринчи типтеги сызыктуу интегралдык теңдемесин чечүү үчүн параметрлер тандалган.

Изилдөөнүн максаты болуп, регуляризация операторун тургузуу жана регуляризация параметрин тандоо эсептелинет.

Изилдөөдө өсүүчү функция боюнча туунду түшүнүгү, М.М. Лаврентьев боюнча регуляризация ыкмасы, функционалдык анализ ыкмалары, теңдемелерди өзгөртүп түзүү ыкмалары, интегралдык жана дифференциалдык теңдемелердин усулдары колдонулду.

Регуляризация үчүн параметр тандалган. М.М. Лаврентьев боюнча регуляризация оператору тургузулган жана жалгыздык шарты далилденген.

Сунуш кылынган усулдарды Вольтерранын биринчи типтеги интегралдык теңдемеси сыяктуу интегралдык, интегро- дифференциалдык теңдемелерди изилдөөдө, ошондой эле физика, экология, медицина, комплекстүү башкаруу теориясынын татаал башкаруу системаларынын аймактарынын кээ бир конкретүү колдонмо процесстерин изилдөө үчүн колдонсо болот.

Бул жумушту келечекте Вольтерранын биринчи типтеги интегралдык теңдемесинин өнүгүшүнө колдонсо болот. Ошондой биринчи типтеги теңдемелерге келтирилүүчү кээ бир конкретүү колдонмо маселелерди чечүү үчүн колдонсо болот.

Өзөк сөздөр: *Интегралдык теңдемелер, өсүү, үзгүлтүксүз функциялар, шарттар, өзгөрмөлөр, болжолдуу чечимдер, Гельдердин мейкиндиги, усул, классикалык эмес, Дирихленин жалпыланган формуласы, Граноулла-Беллмандын барабарсыздыгы.*

Во многих работах были исследованы различные вопросы для интегральных уравнений. В рассматриваемой работе выбран параметр регуляризации для решения линейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода.

Целью исследования является построение регуляризирующего оператора и выбор параметра регуляризации.

При исследовании применяются понятие производной по возрастающей функции, метод регуляризции по М.М. Лаврентьеву, методы функционального анализа, методы преобразования уравнений, методы интегральных и дифференциальных уравнений.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Параметр для регуляризации выбран. Регуляризирующий оператор по М.М. Лаврентьеву построен и доказана теорема единственности.

Предложенные методы можно использовать для исследования интегральных, интегро-дифференциальных уравнений типа интегрального уравнения Вольтерра первого рода, а также при качественном исследовании некоторых прикладных процессов в области физики, экологии, медицины, теории управление сложными системами. Могут быть использованы при дальнейшем развитии теории интегральных уравнений Вольтерра первого рода. А также при решении конкретных прикладных задач, приводящих к уравнениям первого рода.

Ключевые слова: *интегральные уравнения, возрастающая, непрерывные, условия, переменные, приближенные решения, пространство Гельдера, метод, неклассические, обобщенние формула Дирихле, неравенство Граноулла.*

In many papers, various questions for integral equations have been investigated. In this paper, we have chosen a regularization parameter for solving the linear Volterra integral equation of the first kind.

The aim of the study is to construct a regularizing operator and choose a regularization parameter.

In the study, we have applied the concept of a derivative with respect to an increasing function, the regularization method according to M.M. Lavrentiev, methods of functional analysis, methods of transformation of equations, methods of integral and differential equations.

The parameter for regularization is selected. Regularizing operator according to M.M. Lavrentiev is constructed and a uniqueness theorem is proved.

The proposed methods can be used to study integral, integral-differential equations such as the Volterra integral equation of the first kind, as well as in the qualitative study of some applied processes in the field of physics, ecology, medicine, and the theory of complex systems control. They can be used in the further development of the theory of Volterra integral equations of the first kind. And also, when solving specific applied problems leading to equations of the first kind.

Key words: *integral equations, increasing, continuous, conditions, variables, approximate solutions, Helder space, method, non-classical, generalization Dirichlet formula, Granulla-Bellmandyn barabarsyzdygy.*

Киришүү. Интегралдык теңдемелердин теоретикалык бөлүгү ар кандай иштерде изилденген. Тактап айтканда, [1] жумушта Вольтерранын экинчи типтеги интегралдык теңдемелерин изилдөө натыйжаларын каралган. [2] жумушта Вольтерранын биринчи жана үчүнчү типтеги жылмакай ядролуу интегралдык теңдемелерине көп параметрлүү чечимдер топтомунун жашашы тастыктаган. [3] дө, Фредольмдын биринчи типтеги сызыктуу интегралдык теңдемелери иликтенип, Лаврентев боюнча регуляризация оператору түргүзүлган. [4-7] жумуштарда, Вольтерранын биринчи типтеги интегралдык теңдемесине ар кандай колдонмо маселелерде колдонулушу келтирилген. [8, 9] жумуштарда Вольтерранын биринчи жана үчүнчү типтеги сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин чечмиминин жалгыздыгы жана чечимдер системасынын регуляризациясы жөнүндө иликтенген. [10] жумушта, Вольтерранын биринчи типтеги интегралдык теңдемеси боюнча натыйжалар келтирилген.

[11, 12] жумушта Липшицтин шарттары менен классикалык эмес интегралдык теңдемени чечүү үчүн регуляризациясы оператору тургузулган жана чечимдин жалгыздыгы далилденген.

Бул жумушта Вольтерранын биринчи типтеги (1) классикалык эмес интегралдык теңдемесинин чечими үчүн регуляризация параметр тандалат.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com
ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Маселенин коюлушу. Төмөнкү интегралдык тендемени карайлы

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)\mathbf{u}(s)ds = f(t); \quad t\epsilon[t_0;T] \tag{1}$$

мында $\alpha(t) \in C[t_0;T]$, $\alpha(t_0) = t_0$, $\alpha(t) \le t$ бардык $t \in C[t_0;T]$ үчүн, $K(t,s)$ жана $f(t)$ $G = \{(t,s)\colon t_0 \le t \le T,\ \alpha(t) \le s \le t\}$ аймагында белгилүү функциялар жана $[t_0;T]$ кесиндисинде тиешелүү түрдө $f(t_0) = 0$, $u(t)$– $[t_0,T]$ кесиндисинде изделүүчү функция.

Чечим: (1) тендеме менен катар төмөнкү тендемени карайлы

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)v(s,\varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u(t_0); \ t\epsilon[\,t_0;T]. \tag{2}$$

Төмөнкү шарттардын аткарылуусун талап кылалы:

а) $\alpha(t) \in C^1[t_0,T], \alpha'(t) > 0$ дээрлик бардык $t\epsilon[t_0;T]$ үчүн

б) $K(t,s) \in C(G); K(t,t) \in C[t_0;T], K(t,t) \ge m > 0$ бардык $t \in [t_0,T]$ үчүн; $m \in R$;

с) $t > \tau$ болгондо каалган $(t,s),(\tau,s) \in G$ үчүн $|K(t,s) - K(\tau,s)| \le L|t-\tau|$ баалоосу туура, мында $L -$ белгилүү терс сан.

$C[t_0;T] -$ $[t_0;T]$ кесиндисинде норма менен аныкталган, $v(t)$ бардык үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндиги

$$\|v(t)\|_C = \max_{t\in[t_0;T]} \|v(t)\|$$

Гельдердин мейкиндигин $C^{\gamma}[t_0;T]$, $(0 < \gamma \le 1) -$ деп белгилейли, б.а. $[t_0;T]$ кесиндисинде аныкталып, төмөнкү шарты канаатандырган бардык бардык $v(t)$ функцияларды мейкиндигин белгилейли

$$|v(t) - v(s)| \le C_{\gamma}|t-s|^{\gamma}$$

мында C_{γ} оң турактуу жана ал t жана s тен эмес $v(t)$ дан гана көз каранды.

Мындан ары бизге төмөнкү [11, 12] далилденген лемма жана теорема 1 керектелет.

Лемма: а), б) жана с) шарттары аткарылсын дейли. Анда төмөнкү баалоолор туура келет:

1) $$\int_{t_0}^{\alpha(t)} |H_0(t,\tau,\varepsilon)|\, d\tau \le \gamma_0, \qquad t \in [t_0;$$

(3)

мында $\gamma_0 = \sup_{v\in[t_0,T]} \frac{|K(v,\alpha(v))|\alpha'(v)}{|K(v,v)|}$; $H_0(t,\tau,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}K(\alpha^{-1}(\tau),\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K(s,s)ds}$;

2) $$|H_1(t,\tau,\varepsilon)| \le \frac{L}{m}(2e^{-1}+1), \qquad (t,\tau) \in G_1,$$

(4)

мында $G_1 = \{(t,\tau)\colon t_0 \le t \le T, t_0 \le \tau \le \alpha(t)\}$,

$$H_1(t,\tau,\varepsilon) = -e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}\frac{1}{\varepsilon}[K(t,\tau) - K(\tau,\tau)] + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha^{-1}(\tau)}\frac{1}{\varepsilon^2}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau) -$$

$$-K(t,\tau)]ds + \frac{1}{\varepsilon}[K(t,\tau) - K(\alpha^{-1}(\tau),\tau)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}; \tag{5}$$

3) $$|H_2(t,\tau,\varepsilon)| \le \frac{L}{m}, \qquad (t,\tau) \in G = \{(t,\tau)\colon t_0 \le t \le T,\ \alpha(t) \le \tau \le t\},$$

(6)

мында

$$H_2(t,\tau,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K(s,s)ds}[K(t,\tau) - K(\tau,\tau)] -$$

$$-\int_{\tau}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}\frac{1}{\varepsilon}[K(t,\tau) - K(s,\tau)]ds. \tag{7}$$

Теорема 1. а), б) жана с) шарттары жана $\gamma_0 b_0 < 1$ аткарылсын дейли, мында $\gamma_0 = \sup_{v\in[t_0,T]}\frac{|K(v,\alpha(v))|\alpha'(v)}{|K(v,v)|}$, $b_0 = \exp[\frac{L}{m}(2e^{-1}+1)(T-t_0)]$. Андан сыркары (1) тендеме $u(t) \in C^{\gamma}[t_0;T]$, $(0 < \gamma \le 1)$ чечимине ээ болсун. Анда (2) тендеменин $v(t,\varepsilon)$ чечими

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$C[t_0,T]$ нормасы боюнча $\varepsilon\to 0$, $u(t)$ чечимине умтулат. Бул учурда төмөнкү баалоо туура болот:

$$\|v(t,\varepsilon)-u(t)\|_c\le\frac{b_0}{1-\gamma_0 b_0}C_0C_\gamma\varepsilon^\gamma \tag{8}$$

мында $C_\gamma=\sup_{t,s\in[t_0,T]}\frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|^\gamma}$; $C_0=\gamma\int_0^\infty e^{-m\tau}\tau^{\gamma-1}d\tau$.

Айталы, $f_\delta(t)\in C[t_0;T]$ функциясы жана u_0 саны берилген болсун, төмөнкү барабарсыздык орун алсын дейли:

$$\|f(t)-f_\delta(t)\|_C\le\delta,\ |u(t_0)-u_0|\le\alpha\delta, \tag{9}$$

мында α, u_0 белгилүү турактуу сандар.

$$\varepsilon v_\delta(t,\varepsilon)+\int_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)v_\delta(s,\varepsilon)ds=f_\delta(t)+\varepsilon u_0,\quad t\in[t_0;T] \tag{10}$$

теңдемени карайлы.

(2) ден (10) ду кемитип, төмөнкү белгилөөнү кийирип,

$$u_\delta(t,\varepsilon)=v(t,\varepsilon)-v_\delta(t,\varepsilon),\ t\in[t_0;T], \tag{11}$$

$$\varepsilon u_\delta(t,\varepsilon)+\int_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)u_\delta(s,\varepsilon)ds=f(t)-f_\delta(t)+\varepsilon(u(t_0)-u_0),\ t\in[t_0;T] \tag{12}$$

теңдемесин алабыз.

(12) теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазып алалы:

$$u_\delta(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,s)u_\delta(s,\varepsilon)ds-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}K(s,s)u_\delta(s,\varepsilon)ds+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]u_\delta(s,\varepsilon)ds=\frac{1}{\varepsilon}[f(t)-f_\delta(t)]+[u(t_0)-u_0],\ t\in[t_0;T] \tag{13}$$

$\left(-\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)\right)$ адронун розельвентасын жана Дирихленин жалпыланган формуласын колдонуп, (13) теңдемени [11, 12] эквиваленттүү теңдемеге келтиребиз.

$$u_\delta(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{\alpha(t)}H_0(t,\tau,\varepsilon)\,u_\delta(\tau,\varepsilon)d\tau+\int_{t_0}^{\alpha(t)}H_1(t,\tau,\varepsilon)\,u_\delta(\tau,\varepsilon)d\tau+$$
$$+\int_{\alpha(t)}^{t}H_2(t,\tau,\varepsilon)\,u_\delta(\tau,\varepsilon)d\tau+F_\delta(t,\varepsilon),\quad t\in[t_0;T] \tag{14}$$

мында $H_0(t,\tau,\varepsilon)$, $H_1(t,\tau,\varepsilon)$ жана $H_2(t,\tau,\varepsilon)$ тиешелүү түрдө (3), (5) жана (7) формуласы менен аныкталган.

$$F_\delta(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}[f(t)-f_\delta(t)]+(u(t_0)-u_0)-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\left[\frac{1}{\varepsilon}[f(s)-f_\delta(s)]+(u(t_0)-u_0)\right]ds. \tag{15}$$

(9) негизинде (15) тен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\|F_\delta(t,\varepsilon)\|_C\le 2\left(\frac{\delta}{\varepsilon}+\alpha\delta\right) \tag{16}$$

Лемманын негизинде б.а. (3), (4), (6) жана (16) эске алуу менен, (14) төн төмөнкүнү алабыз:

$$|u_\delta(t,\varepsilon)|\le\gamma_0\|u_\delta(t,\varepsilon)\|_C+\int_{t_0}^{\alpha(t)}\frac{L}{m}(2e^{-1}+1)|u_\delta(\tau,\varepsilon)|d\tau+$$
$$+\int_{\alpha(t)}^{t}\frac{L}{m}|u_\delta(\tau,\varepsilon)|d\tau+2\left(\frac{\delta}{\varepsilon}+\alpha\delta\right),\ t\in[t_0;T].$$

Мындан

$$|u_\delta(t,\varepsilon)|\le\int_{t_0}^{t}\frac{L}{m}(2e^{-1}+1)|u_\delta(\tau,\varepsilon)|d\tau+$$
$$+\gamma_0\|u_\delta(t,\varepsilon)\|_C+2\left(\frac{\delta}{\varepsilon}+\alpha\delta\right),\ t\in[t_0;T]. \tag{17}$$

Грануолла-Беллмандын барабарсыздыгын колдонуп, (17) ден төмөнкүнү алабыз:

$$\|u_\delta(t,\varepsilon)\|_C\le\gamma_0 b_0\|u_\delta(t,\varepsilon)\|_C+2b_0\left(\frac{\delta}{\varepsilon}+\alpha\delta\right),\ t\in[t_0;T],$$

мында $b_0=\exp\left[\frac{L}{m}(2e^{-1}+1)(T-t_0)\right]$.

Бул жерден төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\|u_\delta(t,\varepsilon)\|_C\le\frac{2b_0}{1-\gamma_0 b_0}\left(\frac{\delta}{\varepsilon}+\alpha\delta\right). \tag{18}$$

Белгилүү болгондой,

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\|v_\delta(t,\varepsilon)-v(t)\|_c \le \|v_\delta(t,\varepsilon)-v(t,\varepsilon)+v(t,\varepsilon)-v(t)\|_c \le$$
$$\le \|u_\delta(t,\varepsilon)\|_C + \|v(t,\varepsilon)-v(t)\|_C.$$

Мындан (8) жана (18) катыштарын эске алып,

$$\|v_\delta(t,\varepsilon)-v(t)\|_c \le \frac{b_0}{1-\gamma_0 b_0}\left[C_0 C_\gamma \varepsilon^\gamma + 2\left(\frac{\delta}{\varepsilon}+\alpha\delta\right)\right], \qquad (19)$$

барабарсыздыгын алабыз, мында C_0, C_γ, γ_0, b_0 сандары テореме 1 де аныкталган.

$\varepsilon = \delta^{\frac{1}{\gamma+1}}$ деп эсептеп, (19) дан

$$\left\|v_\delta\left(t,\delta^{\frac{1}{\gamma+1}}\right)-v(t)\right\|_c \le \frac{b_0}{1-\gamma_0 b_0}\left[(C_0 C_\gamma + 2)\delta^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} + 2\alpha\delta\right], \qquad (20)$$

барабарсыздыгын алабыз, мында $0<\gamma\le 1$.

Ошентип, теорема 2 ни далилдедик:

Теорема 2: а), в), с) шарттары жана $\gamma_0 b_0 < 1$ орун алсын дейли, (1) интегралдык теңдеме $v(t)\in C^\gamma[t_0;T]$, $0<\gamma\le 1$ чечимине ээ болсун, мында γ_0, b_0 сандары теорема 1 де аныкталган. Анда (10) интегралдык теңдемесинин $v_\delta(t,\varepsilon)$ чечими $\varepsilon=\delta^{\frac{1}{\gamma+1}}$ болгондо $C[t_0;T]$ нормасы боюнча $v(t)$ умтулат. Бул учурда (20) баалоо туура, мында C_0, C_γ, γ_0, b_0 сандары теорема 1 де аныкталган белгилүү сандар.

Корутунду: Коюлган маселе толугу менен чечилди, б.а. Вольтерранын биринчи түрдөгү (1) классикалык эмес интегралдык теңдемеси чечилип, чечим үчүн регуляризация параметри тандалды. барабарсыздыгын Далилденген факты боюнча теорема 2 айтылды.

Адабияттар тизмеси

1. З.Б. Цалюк, Интегральное уравнение Вольтерра [Текст] Итоги науки и техники, Мат. анализ, 15, 131-198 (1977)
2. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего родов [Текст] / Н.А. Магницкий // Журнал вычислит. математики и мат. Физики. 1979. - №4. – с. 970-989.
3. Лаврентьев М.М. Об интергалных уравнениях первого рода [Текст] / М.М. Лаврентьев // докл. АН СССР. – 1959. – 127. - №1. – с.31-33.
4. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра первого рода [Текст]: теория и численные методы / А.С. Апарцин. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1999.-193 с.
5. Апарцин А.С. Применения интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики [Текст] / А.С. Апарцин, И.В. Караулова, Е.В. Маркова, В.В. Труфанов // Электричество. – 2005. - № 10. - с. 69-75.
6. Апарцин А.С. Исследование тестовых уравнений Вольтерра первого рода в интергалных моделях развивающихся систем [Текст] / А.С. Апарцин, И.В. Сидлер // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2018. - № 2. – с. 24-33.
7. Глушков В.М. Моделирование развивающихся систем [Текст] / В.М. Глушков, В.В. Иванов, В.М. Яненко. – Москва: Наука, 1983.
8. Иманалиев М.И. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов // доклады АН СССР. – 1975. - №5. - с.1053-1056.
9. Иманалиев М.И. Регуляризация и единственность решений для интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов // доклады РАН. – 2007. - 415. - №1. - с.14-17.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com
ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

10. R.K. Lamm, survey of regularization methods for the first kind Volterra equation. Surveys on Solution Methods for Inverse Problems, Springer, Vienna (2000), p. 53-82

11. Асанов А. Регуляризация и единственность решения неклассического интегрального уравнения со условиями Липшица [Текст] / А.Асанов, Т.О.Бекешов, С.М.Чоюбеков // Вестник спецвыпуск КНУ имени Ж. Баласагына. – Бишкек: 2011.

12. Чоюбеков С.М. Регуляризация решения неклассического интегрального уравнения с условиями Липшица [Текст] / С.М.Чоюбеков // Международный научный журнал: Молодой ученый. – Казань: 2016. - № 8 (112).

13.