УДК 51(07):371,3

Салыков С.С., Назарбаева М.Т., Салыкова Н.С.
К.Тыныстанов ат. ЫМУ

ГИЛЬБЕРТТИН ПРОБЛЕМАЛАРЫ ЖАНА МЕКТЕП МАТЕМАТИКАСЫ

Макала мектеп математикасынын негизги мазмундук методикалык багыттарынын бири болгон сан системасы жөнүндөгү окуу материалдарынын Гильберттин проблемалары менен байланыштарын жана чечмеленишин көрсөтүүгө арналып, окуучулардын предметтик билимдеринин сапатын жакшыртуудагы мааниси көрсөтүлгөн.

Эл аралык математикалык конгресстин тарыхы жүз жылдан ашык мезгилди өз ичине камтып, ал, традиция боюнча, ар бир төрт жылда бир жолу өткөрүлө турганы белгилүү.Алардын ичинен эң эле көрүнүктүүсү катарында Париж шаарында 1900 -жылдын августунда өткөн конгрессти белгилеп кетүүгө болот. Бул конгресстин математиканы окутуунун методикасы жана методологиясы секциясында 38 жаштагы немец математиги Давид Гильберт доклад жасаган. Өзүнүн докладында ал жаңыдан жаңырып жаткан XX кылымда математика илими үчүн өтө маанилүү болгон 23 проблеманы формулировкалаган. Гильберт математика илиминин ошол мезгилде белгилүү болгон дээрлик бардык тармактарында изилдөө жүргүзүү багытында эң сонун ийгиликтерди жарата алуу менен, предметтик кругозору өтө кеңири болгон үчүн ага чейин да, андан кийин да эч ким максат кылып кое албаган маселени иш жүзүнө ашыра алган. Чындыгында эле, Гильберт математиканы негиздөөгө таандык болгон эки, алгебра предметине жана сандар теориясына тиешелүү беш, геометрияга тиешелүү үч д.у.с. математика илиминин башка тармактары боюнча проблемаларды чечүүнүн үстүндө эмгектенүүгө XX кылымдын математиктерин чакырган. “Эң күчтүү математикалык даярдыктарга жана эң жогорку жөндөмгө ээ болушкан жаңы муундагы изилдөөчүлөрдүн алдына кое турган асыл максаттары кандай болушу керек? Өтө кенен, ошол эле учурда өтө маанилүү жаңылыктарга бай болгон математикалык ой жүгүртүүнүн талаасында, жаңы кылымда кандай жаңы методдор жана жаңы фактылар ачылышы керек?”деп башталат Гильберттин доклады [4, 230 - 231].

Бул проблемалар коюлган учурда алардын айрымдары же чечмеленгени же чечмелөөгө жакын экени белгилүү болсо да, алардын көпчүлүгүн чечмелөө белгилүү математиктердин бир нече ондогон жылдар бою талыкпаган эмгектенүүсүн талап кылганын белгилөө керек (ал проблемалардын экөө алигиче чечмелене элек).

Өзүнүн доклады үчүн проблемаларды тандап алууда Гильберт чечүүнү талап кылган маселекайдан, кантип келип чыкканы түшүнүктүү болуу менен, кызыгууну пайда кылгандай жетишерлик деңгээлде татаал, бирок ошол эле учурда ал проблеманын чечмеленишин табууга мүмкүн болгондой татаалдыкта изденүүчүлөргө сунушталышы керек экендигине айрыкча басым жасаганын белгилеген. Математика илимин окутууда (анын мектеп үчүн дидактикалык жактан иштелип чыккан вариантыбы же ЖОЖдордо негизги предметтик мазмун катары сунушталабы, баары бир) Гильберттин бул эскертүүлөрү окутуу процессин уюштурууда жанажетектөөдө азыр да маанисин жоготкон жок.[1, 35].

Гильберттин биринчи проблемасы континуум-гипотеза деп аталып, көптүктөр теориясынын жана математиканы негиздөө маселелерине таандык болгон. Ушул проблеманын мисалында башталгыч математиканын негиздери предметин окутууда (педагогика бөлүмү) эквиваленттүү көптүктөр, ошондой эле чектүү жана чексиз көптүктөр жана алардын касиеттери жөнүндө маалыматтарды берүүнү математикалык жактан мотивдештирүүгө мүмкүн [5, 41-42]. Мында көптүктөрдүн элементтеринин ортосундагы биективдик катыш жөнүндө да сөз кылууга болот. X жана У деген эки көптүк берилсин дейли. Эгерде бул эки көптүктүн бардык элементтери (x, y) түрүндөгү (мында x, y ϵ У) түгөйлөргө ажыратылып, анын үстүнө X көптүгүнда жана У көптүгүнүн да ар бир элементи бир гана түгөйдө катышкан болсо, анда ал эки көптүктүн ортосунда өз ара бир маанилүү ылайык келүү орун алат деп айтышат. Көптүктөрдүн ортосундагы эквиваленттүүлүк катышын туура келүүчүлүк түшүнүгүнүн маанилүү учуру катарында, анын мазмунун төмөндөгүчө чечмелеп берүү аркылуу, болочок мугалимдердин математикалык даярдыгынын бир кыйла жогорку деңгээлге көтөрүлүшүнө көмөктөшкөн болобуз. Ал үчүн функционалдык, инъективдик ж.б. туура келүүчүлүктөрдүн негизги белгилерин чечмелеп көрсөтүү зарыл болот. Берилсин Г= $\langle G, X, У\rangle$ (1) туура келүүчүлүгү (мында туура келүүчүлүк G$\subseteq X\times У$ шарты аткарылган көптүктөрдүн үчилтиги катарында аныкталып, анын биринчи компоненти G туура келүүчүлүктүн графиги, экинчиси – анын чыгуу областы, ал эми үчүнчү компоненти У туура келүүчүлүктүн келүү областы деп атала турганын белгилейли)

(1)Туура келүүчүлүктүн функционалдык болушу үчүн төмөнкү айтылыштын чын болушу зарыл жана жетиштүү:

$(\Rightarrow y_1 = y_2]$, б.а., туура келүүчүлүктүн графигинде биринчи элементи барабар, бирок экинчиси ар түрдүү болгон түгөйлөрдүн жок болушу талап кылынат. Ал эми туура келүүчүлүктүн инъективдик касиетке ээ болушу үчүн анын графигинде биринчи компоненттери ар түрдүү, бирок экинчиси барабар болгон түгөйлөр болбошу талап кылынат, б.а., төмөнкү формула чын болууга тийиш:

Г= $\langle G, X, У\rangle$ туура келүүсү теңдеш аныкталган (сюръективдүү) болушу үчүн туура келүүчүлүктүн аныктоо (маанилеринин) областы анын чыгуу (келүү) областы менен дал келиши талап кылынат, б.а., төмөнкү айтылыштар чын болушу зарыл:

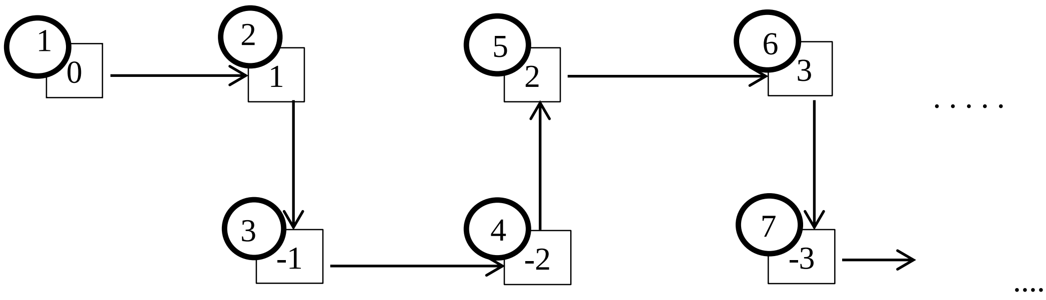
$$(\forall x)(\exists y)[(x, y) \in G]$$

Г= $\langle G, X, У\rangle$ туура келүүчүлүгү биекция же өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк деп аталат, эгерде ал функционалдык, инъективдик, теңдеш аныкталган жана сюръективдик туура келүүчүлүк болсо. Бул учурда X жана У көптүктөрүнүн ортосунда өз ара бир маанилүү ылайык келүү жашайт деп айтуу кабыл алынган. X жана У көптүктөрүнүн ортосунда өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк жашай турганын далилдөө үчүн $\langle G, X, У\rangle$ үчтүгү биекция болгондой $G \subset X \times У$ графиги табыла турганын далилдөө керек.

Элементтеринин ортосунда өз ара бир маанилүү ылайык келүү орун алган эки көптүк эквиваленттүү же бирдей кубаттуулуктагы көптүктөр деп аталат. Элементтеринин саны бирдей болгондо гана, эки чектүү көптүк эквиваленттүү боло турганы түшүнүктүү. Чектүү көптүктөр үчүн "бүтүндүн бөлүгү, бүтүндөн кичине" эрежеси орун алса (б.а., чектүү көптүктүн астыңкы көптүгүнүн элементтеринин саны көптүктүн өзүндөгү элементтеринин санынан аз), чексиз көптүк учурунда бул корутунду аткарылбайт. Н.Я.Виленкиндин китебинде келтирилген мисалга таянуу менен [2], натуралдык сандардын көптүгүнө, демек, N - ге эквиваленттүү болгон көптүккө дагы бир элементти кошсок, анда кайрадан N - ге эквиваленттүү болгон көптүктү ала турганыбызды көрсөтүүгө болот. Ошентип, эквиваленттүүлүк катышынын аныктамасынан чексиз көптүктүн бөлүгү ошол эле көптүктүн өзүнө эквиваленттүү болушу мүмкүн экендиги келип чыгат. Чексиз көптүктүн бул сыяктуу касиети менен студенттерди тааныштыруу максатка ылайык. Маселен, жуп сандардын көптүгү натуралдык сандардын көптүгү менен тең кубаттуулукта, ал эми натуралдык сандардын көптүгү анын квадраттарынын көптүгү менен тең кубаттуулукта.

Немец математиги Г.Кантор XIX кылымдын экинчи жарымында чексиз көптүктөрдүн жогоруда белгиленген касиеттерине терең изилдөө жүргүзүү менен, математика илимин негиздөө ишинин негизги бөлүмү болгон көптүктөр теориясын иштеп чыкканын да тарыхый маалымат катарында айтып коюуга болот.

Кыскалык үчүн сан түз сызыгынын астыңкы көптүгү болгон сан көптүктөрүн кароо менен чектелебиз. Ал эми сан көптүктөрүнүн (алар мектеп математикасынын негизги мазмундук методикалык багыттарынын бири!) ортосундагы $N \subset Z \subset Q \subset R$ катыштарга ылайык, алардын арасындагы эквиваленттүүлүк катышын негиздеп көрсөтүүгө мүмкүн. Маселен, Z жана N, Q жана Z көптүктөрүнүн ортосунда өз ара бир маанилүү ылайык келүүнү көрсөтүүгө болсо, N жана R көптүктөрү мындай касиетке ээ эмес. Мисал катарында бүтүн сандардын көптүгү менен натуралдык сандардын ортосундагы эквиваленттүүлүк катышын пайда кылууга токтололу. Ал үчүн (n, 2n), (-n, 2n + 1) (мында $n \in N$) жана (0;1) түгөйлөрүн түзүп чыгуу жетиштүү. Түгөйлөрдүн ар биринде биринчи орунга бүтүн сандардын көптүгүнүн, экинчи орунга N көптүгүнүн тиешелүү элементи коюла турганын белгилейли. Көрсөтүлгөн өз ара бир маанилүү ылайык келүүнү төмөнкү таблица түрүндө да берүүгө болот:



Натуралдык сандардын көптүгүнө эквиваленттүү болгон ар кандай көптүктү эсептелүүчү (счетные) көптүк деп атоо кабыл алынганы белгилүү. Ушул түшүнүктөргө таянуу менен континуум–гипотезаны төмөндөгүдөй формилировкалоого болот: $N \subset T \subset R$ шартын канагаттандырып, N көптүгүнө да, R көптүгүнө да эквиваленттүү эмес аралык кубаттуулукка ээ болгон көптүк жашай турганын далилдөө керек. Бул проблеманы чечмелөөнүн үстүндө Гильберттин замандаштары, атактуу математиктер Б.Больцано, Г.Кантор көпкө эмгектенишсе да, ынанарлык натыйжага келише алышкан эмес. Проблеманын чечмеленишин 1963–жылы америкалык математик Паул Коэн аксиомалардын системасынын толуктугу түшүнүгүнө таянуу менен көргөзгөн. Мында сөз көптүктөр теориясында жалпы кабыл алынган Цермело–Франкелдин аксиомаларынын системасы жөнүндө бара жатат. Бул ачылышты чечмелесек, төмөнкүнщ белгилөө керек. Математика илиминде кабыл алынган кандайдыр бир ырастоону далилдөө процедурасына ылайык, континуум гипотезаны далилдөө дегенибиз, ал гипотезаны аксиомалардын системасына таянуу менен чындык экендигин көрсөтүү болмок. Анын орун албай тургандыгын негиздөө үчүн, аксиомалардын тандалып алынган системасына ал гипотезаны кошуунун натыйжасында алынган аксиомалардын жаңы системасы карама-каршы (б.а., бири бирин төгүндөй турган айтылыштар алына турган) система экендигин көрсөтүү болмок, бирок П.Коэн континуум–гипотезанын өзүн да, ошол эле учурда анын төгүндөөсүн да аксиомалардын системасына таянуу менен далилдөөгө мүмкүн эмес экендигин көрсөткөн. Ошондуктан ал континуум–гипотезаны Цермело–Франкелдин аксиомаларынын системасына жөн гана кошуп коюшат да, ал кандайдыр бир далилдөөдө колдонулса, анын пайдаланганын сөзсүз түрдө ачык айтылууга тийиш.

Мектеп математикасынын сан системасы негизги мазмундук методикалык багытты түзө турганын жогоруда белгилегенбиз. 8-класстын алгебра курсунда чыныгы сандардын көптүгү рационалдык жана иррационалдык сандардын биригиши катарында [2, 109 - 110] киргизиле турганы белгилүү. Q көптүгү саналуучу, ал эми R көптүгү саналбоочу көптүк болгондуктан, рационалдуу сандарга караганда чыныгы сандар “көп” болуп, демек, иррационалдык (рационалдык эмес чыныгы сандар) сандардын жашай турганы келип чыгат. (Чындыгында, иррационалдык сандар рационалдыктардан көп экенине окуучулардын көңүлүн буруп коебуз.)

Иррационалдык сандардын жашай турганын жөнөкөй талкуулоо аркылуу же кандайдыр бир чыныгы сандын рационалдык сан эмес экендигин көрсөтүү менен далилдөөгө болору белгилүү. Мектеп математикасында болсо, окуучулар үчүн жеткиликтүү катарында экинчи жол тандалып алынганын белгилейли. Мисалы, [1, 112] окуу китебинде $\sqrt{3}$ жана $\sqrt{2}$ сандарынын иррационалдык сандар экендигин далилдөө рационалдык сандардын аныктамасына таянуу менен берилген.

Ал эми математика тереңдетилип окутулуучу атайын класстарда арифметиканын негизги теоремасына, же иррационалдуу алгебралык сандар учурунда, бүтүн коэффициенттүү алгебралык теңдеменин рационалдык тамырлары жөнүндөгү теоремага таянуу менен сандардын иррационалдык сан экендигин далилдөөгө боло турганын да көрсөтүп коюу максатка ылайык. Мисалы, бул багытта 10–класстын алгебра жана анализдин башталышы курсунда $\cos 20^0$ саны иррационалдык экенинин далилдөөсүн көрсөтүүгө болот. Ал эми жалпы учурда α бурчу $\cos 2\alpha$ саны иррационалдуу болгондой кылып тандалып алынганда, $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ иррационалдык сандар боло тургандыгы жөнүндөгү натыйжага таянуу менен, тригонометриялык функциялардын айрым бурчтардагы мааниси иррационалдык сан менен туюнтула турганын көрсөтүүгө болот. Бул ырастоону негиздеп көрсөтүү төмөнкү сүйлөмдөр аркылуу иш жүзүнө ашырылат..

$X^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ сыяктуу, жогорку коэффициенти 1ге барабар болгон жана бүтүн коэффицинттүү теңдеме берилсин дейли. Эгерде бул теңдеме рационалдык тамырга ээ болсо, анда бул тамыр, жалпы учурга ылайык a_n санынын бөлүнүүчүлөрү катарында бүтүн сандар болушат. $\sqrt[n]{p}$түрүндөгү (мында n жана p оң бүтүн сан маанилерди алышат) сандар же иррационалдык же бүтүн маанини алат да, акыркы учурда p саны, бүтүн сандын n чи даражасына барабар болот. Мисал катарында cos20 саны иррационалдык сан экендигинин далилдөөсүн келтирели. Ал үчүн

$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ формуласын колдонуп, $\cos 60^0 = 4\cos^3 20^0 - 3\cos 20^0$ барабардыгына ээ болобуз. Жөнөкөйлүк үчүн $\cos 20^0 = y$ деп белгилесек, акыркы барабардыкты $\cos 60^0$=экенин эске алуу менен $8y^3 - 3y - 1 = 0$ (1) сыяктуу теңдеме түрүндө жазууга болот. $\cos 20^0$ саны (1) теңдеменин тамыры экендиги түшүнүктүү. Жогорку теоремага ылайык, (1) теңдеменин мүмкүн болгон рационалдык тамырлары катарында $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{8}$ сандары кызмат кылышы мүмкүн. Бул сандарды (1) теңдемеде белгисиздин ордуна коюу менен, алардын бири да анын тамыры болбой турганына ишенебиз. Демек, биздин теңдеме рационалдык тамырларга ээ эмес, анда $\cos 20^0$ санынын иррационалдык сан экени келип чыгат.

Ал эми 11–класста болсо, арифметиканын негизги теоремасына таянуу менен логарифма түшүнүгү менен байланышкан lg2, lg5 ж.б. сандардын иррационалдуу экенин далилдөөнү окуучуларга сунуштоого болот.

Гильберттин проблемаларынын бири сан системасына тиешелүү болгон алгебралык жана алгебралык эмес (трансценденттик) сандар түшүнүгү менен тыгыз байланышта. Ал эми жогорку класстарда (массалык мектептерде эле) алгебралык жана трансценденттик функциялар (мисалы, тригонометриялык функциялар) жана алгебралык жана трансценденттик сандар жөнүндө учкай болсо да маалымат берүүгө туура келет. Мында ар кандай рационалдык сан алгебралык сан боло турганы, бирок бардык эле алгебралык сандар (б.а., бүтүн коэффициенттүү $a_n x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_0 = 0$ ($n\geq1$, $a_n\neq0$) көп мүчөнүн тамыры болгон сандар) рационалдык сан боло бербестигине (мисалы, $x^2 - 2 = 0$ теңдемесинин тамыры $\sqrt{2}$ иррационалдык сан) окуучулардын көңүлүн бурабыз. Андан ары 1844-жылы француз математиги Жозеф Лиувиль алгебралык эмес, демек, трансценденттик сандын мисалын биринчилерден болуп келтиргенин белгилейбиз. Бул санды түзүү жана анын трансценденттик сан экенин далилдөө өтө татаал болгондуктан, математикада көбүнчө эквиваленттүү жана эквиваленттүү эмес көптүктөр түшүнүгүнө таянуу менен трансценденттик сандын жашай тургандыгы жөнүндөгү жалпы теореманы далилдеше турганына окуучулардын көңүлүн бурабыз.

Гильберттин “Мейли, а – бирге барабар эмес оң алгебралык сан, ал эми в – алгебралык иррационалдык сан болсун. $а^в$ – саны трансценденттик сан экендигин далилдегиле” деген проблемасы сан системасында маанилүү маселелердин бири. Бул теореманы 1934-жылы советтик математик А.О. Гельфонд далилдеген.

Адабияттар:

1. Бекбоев И.Б. Инсанга багыттап окутуу технологиясынын теориялык жана практикалык маселелери. -Б.:Педагогика, 2003.
2. Байзаков А.Б. ж.б. Алгебра: Жалпы билим берүүчү орто мектептердин 8-кл.үчүн окуу китеби – 1 – бас. -Б.: “Aditi”, 2009.
3. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. –М.: Наука, 1965.
4. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математки. – М.: Наука, 1990.
5. Стойлова Л.П. Математика: учебник для студентов высш.пед.учеб.завед… –М.: Изд.центр «Академия», 2002.