УДК.373.31

Салыков С.С., Асаналиева Д., Бапа кызыАйнура
К.Тыныстанов ат. ЫМУ

ТЕОРЕМАЛАРДЫ ДАЛИЛДӨӨ МЕТОДДОРУН СИСТЕМАЛАШТЫРУУ ЖАНА ЖАЛПЫЛОО САБАГЫН ӨТКӨРҮҮНҮН ИННОВАЦИЯЛЫК ТЕХНОЛОГИЯЛАРЫ

Макала мектеп математикасынын структуралык негизги бөлүмүнүн бири болгон теоремалардын далилдөөлөрүн окуучулар тарабынан өздөштүрүүсүнө жетишүүнүн жолдорун жана каражаттарын тиешелүү илимий-методикалык булактарды жана окутуу процессин анализдөөгө таянуу менен иштеп чыгууга арналган.

Окуучулардын билимдеринин тереңдиги жана ийкемдүүлүгү математикалык фактыларды өздөштүрүү менен гана эмес, ошол эле учурда далилдөөлөрдү жүргүзүүдө колдонула турган негизги методдорду колдоно билүү билгичтиктерин калыптандыруу деңгээли менен да аныкталат. Бул методдорду колдоно билүү билгичтиктеринин тиешелүү деңгээлде калыптанышынан окуучулардын өз алдынча иштеринин ийгиликтүү ишке ашырылышы жана чыгармачылык мүнөздө болушу көз каранды болору бышык. Маанилүү бул маселеге дагы эле жетиштүү деңгээлде көңүл бурулбай келе жатат. Мектепте билим алган 10 – 11 жыл ичинде окуучу жетишээрлик сандагы теоремалардын формилировкаларын жатка айтууга жетишип, алардын далилдөөлөрүн өздөштүрүүгө милдеттүү болушат [4, 12 – 13]. Бирок көпчүлүк учурда ар бир теорема өз–өзүнчө, негиздөө аркылуу кабыл алына турган башка сүйлөмдөр менен байланышсыз абалда, чындыгында алардын далилдөө методдору бирдей болсо да, окуучулар тарабынан кабыл алынып, өздөштүрүлгөн учурлар өтө кеңири таралган. Эске тутуу процессине ашыкча күч келтирүү менен өздөштүрүлгөн көптөгөн теоремалардын далилдөөлөрү тез эле эстеринен чыгып, натыйжада, окуучулардын билимдери жетиштүү деңгээлде бекем болбойт. Мындай жагымсыз жагдайдын бир катар себептери бпр экендигин белгилейли [1, 21], [5, 12], [3а, 17].

Теоремаларды далилдеп көрсөтүүдө, негизинен, анын мазмунуна жана фактыларга гана көңүл бөлүнүп, далилдөө методдорунун мүнөздүү өзгөчөлүктөрү көз жаздымда калтырылат. Окуучулар үчүн жалпылоочу корутунду жасоо ой жүгүртүүнүн бир топ татаал операциясы болгондуктан [1,35], көптөгөн теоремаларды далилдөөдө кошулуп жаткан бир эле методду жетиштүү деңгээлде өздөштүрө алышпайт.

Теоремаларды далилдөөдө (жок дегенде аны кайталоо, бышыктоо этаптарында) окуучулардын активдүү таанып билүүчүлүк ишмердүүлүгүн окутуунун жаңы технологияларын колдонуу менен ишке ашыруу талап кылынгандай деңгээлде жүргүзүлбөй жатканы педагогикалык практика учурунда, айрым мугалимдердин сбактарында байкалууда. Теоремалардын чоң группасы бирдей эле метод аркылуу далилденип жатса да, көпчүлүк учурда окутуучулар өздөрү далилдөө процессин ишке ашырышып, натыйжада, окуучулардын өз алдынчалуулугун өстүрщү маселеси көз жаздымда калат.

Мына ошентип, белгилүү бир методду узак убакыт бою жана кайра кайрадан кайталап колдонуу ишке ашырылып, натыйжада, аны жалпылоо зарылчылыгы пайда болот. Маселен, каралып жаткан теореманы далилдөө андан мурдакы сабактарда далилденген теоремаларга таянуу менен иш жүзүнө ашырыла турганын дурустап билишсе да, айрыкча, алгебра курсунда теоремаларды далилдөөдө анын формулировкасында көрсөтүлгөн түшүнүктүн аныктамасы маанилүү экендиги эске алынбайт.

Мисалы, натуралдык көрсөткүчтүү даражанын үстүнөн жүргүзүлүүчү операциялардын касиеттери:

$$(\forall a,b\in R)\quad(\forall n,m\in N)\quad a^m\cdot a^n=a^{m+n},\quad a^m\cdot a^n=a^{m+n},\quad a^m:a^n=a^{m-n},$$
$$\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n},\quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$$

Натуралдуу көрсөткүчтүү тамырдын үстүнөн жүргүзүлүүчү операциялардын касиеттери:

$$(\forall n\in N)(k\in Z)(\forall a,b\in R_+)\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$$

ошондой эле $(\forall a\succ 0)(a\neq 1)(\forall x,y\in R_+)$шарты аткарылганда

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$$

$\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-+\log_a y$ сыяктуу логарифманын касиеттери

$$a\prec b\quad\&\quad b\prec c\ \Rightarrow\ a\prec c,\ a\prec b\quad\&\quad c\prec d\Rightarrow a+c\prec b+d$$

жана акырында $a\prec b\quad\&\quad\begin{cases}c\succ 0, & a\cdot c\prec b\cdot c\\ c\prec 0, & a\cdot c\succ b\cdot c\end{cases}$

сыяктуу сан барабарсыздыгынын касиеттери, логикалык жактан синтез методу менен, бирок, баарыдан мурда, тиешелүү түшүнүктүн аныктамасына таянуу менен, б.а., аныктамага алып келүү деп аталган ой жүгүртүүнүн операциясына колдонуу аркылуу жүргүзүлөт. Көрсөтүлгөн теоремаларды далилдөө процесси төмөнкүдөй кадамдардан турат: адегенде жаңы түшүнүктү ага алып келүүчү мурда өтүлгөн түшүнүк менен алмаштырабыз. Математикалык символдор аркылуу мындай алмаштыруу бир барабардыктан экинчи барабардыкка, жаңы символдордон мурдакыларга өтүү менен ишке ашырылат.

Мисалы, эгерде $\log_a b=c$ $(\textit{мында}\quad b\in R_+,\,a\succ 0,\,a\neq 1)$ барабардыгы берилсе, анда логарифманын аныктамасы боюнча $a^c=b$, эгерде $a\succ b$болсо, анда аныктама боюнча $a-b$ айырмасы оң сан болот, ал эми $\sqrt[n]{a\cdot b}$ саны, аныктама боюнча n даражасы $a\cdot b$ га барабар болгон терс эмес сан ж.б., андан ары, далилдөө процессинде, теореманын формулировкасында сөз болгон амалды аткаруу ишке ашырылат. Мисалы, тамырдын негизги касиетинин биринчисин далилдөөдө $\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{b}$ көбөйтүндүсү терс эмес сан экендигин негиздеп көрсөткөндөн кийин, натуралдык көрсөткүчтүү даражанын касиетине жана n – чи даражадагы тамырдын аныктамасына таянуу менен

$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=a\cdot b$ деген теңдеш өзгөртүп түзүүнү иш жүзүнө ашырып, теореманын далилденгендиги жөнүндөгү корутундуга келебиз. Мында акыркы, үчүнчү этапта ырастоону далилдөө үчүн аныктаманы колдонуп жаткандыгыбыз көрүнүп турат.

7- жана 8–класстарда даражанын жана тамырдын касиеттери жөнүндөгү теоремаларды далилдөө интерактивдүү ротация, кубик, инсерт сыяктуу интерактивдик методдорду колдонуу менен ишке ашырылып, далилдөөнүн баштапкы жана акыркы этаптарында тиешелүү түшүнүктүн аныктамасы колдонулуп жатканына көңүл бурулат. Мисалы, натуралдык даражаларды көбөйтүүнүн касиетин далилдөө мугалим тарабынан толугу менен деталдаштырылып берилсе, калган касиеттерди, саноо жолу менен класста түзүлгөн 2 же 3 чакан группага алдын-ала даярдалуу менен илинип коюлган ватман кагаздарга, алардын далилдөөсүн маркер менен жазып чыгып, (3–4 мүнөт убакыт берилет) натыйжаларын презентациялоону иш жүзүнө ашырууга болот. Мында теореманын далилдөөсүн жазууда көрсөтмөлүү жана ыңгайлуу болгон таблицалык жолду колдонууну окуучуларга сунуштайбыз.

Мисал катарында $(a \cdot b)^n = (a)^n \cdot (b)^n$ теңдештигинин далилдөөсүн таблицалык формада берилишин келтирели:

№	Сүйлөм	Эмненин негизинде
1.	a, b *ар кандай сандар* $n \in N$	Теореманын түшүндүрүүчү бөлүгү.
2.	$(a \cdot b)^n$	Теореманын шарты.
3.	$(a \cdot b)^n$ туюнтмасы $(a)^n \cdot (b)^n$ туюнтмасына теңдеш барабар болот.	Теореманын корутундусу.
4.	$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n\ жолу}$	Натуралдык көрсөткүчтүү даражанын аныктамасы боюнча.
5.	$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b) = \underbrace{(a \cdot a \ldots \cdot a)}_{n\ жолу} \cdot \underbrace{(b \cdot b \ldots \cdot b)}_{n\ жолу}$	Көбөйтүүнүн орун алмаштыруу жана топтоштуруу касиеттеринин негизинде
6.	$\underbrace{(a \cdot a \ldots \cdot a)}_{n\ жолу} \cdot \underbrace{(b \cdot b \ldots \cdot b)}_{n\ жолу} = a^n \cdot b^n$	Аныктама боюнча.
7.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	4, 5 жана 6 кадамдардан барабардык катышынын транзитивдик касиети боюнча.

Сөз болуп жаткан методду жалпылоочу жана системалаштыруучу сабакты, маселен, 11-класста логарифмалык, же n–чи даражадагы тамырдын касиеттерин кароо учурунда өткөрүүгө болот. Маселен, логарифманын $(\forall a \succ 0)(a \neq 1)(\forall x, y \in R_+)$шарты аткарылганда $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ деген касиетинин далилдөөсүн анализдөөнү төмөнкүдөй блок схема түрүндө берилген жазуу формасы боюнча жүргүзүү менен, теоремалардын бир канча группасы жогоруда көрсөтөлгөндөй бирдей эле метод менен далилденип жаткандыгы жөнүндө аңгеме жүргүзөбүз.

$(\forall a \succ 0)(a \neq 1)(\forall x, y \in R_+) \log_a(x \cdot y)$,
теореманын түшүндүрүүчү бөлүгү жана шарты.

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
Далилденүүчү теорема

$x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$ негизги логарифмалык теңдештик

$$x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}$$

$$x \cdot y = a^{\log_a x + \log_a y}$$

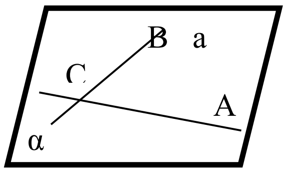
даражанын касиети боюнча

$$\log_n xy = \log_n x + \log_n y$$

логарифманын аныктамасы боюнча

Эми мектеп геометриясы курсун окутууда кеңири колдонулуучу теоремаларды карама каршысынан далилдөө методун кароого өтөлү. Маселен, [2,а] окуу китебинде 4, 5, 12, 15 ж.б. теоремалар, ал эми стереометрия курсунда болсо аксиомалардын натыйжалары, мейкиндиктеги параллелдик жана перпендикулярдык катыштардын бир катар белгилери карама-каршысынан далилдөө методун колдонуу аркылуу ишке ашырылат. [2,б] Мисал катарында стереометрия курсунун $(\forall A)(\forall a)\left(A \notin a \Rightarrow \exists! \alpha\, A \in \alpha \,\&\, a \subset \alpha\right)$ деген теоремасынын далилдөөсүнө талдоо жүргүзөлү. [2б,4] Окуучулар теореманын формулировкасына талдоо жүргүзүү менен, анын далилдөөсү эки бөлүктөн туруп, адегенде көрсөтүлгөн шартты канагаттандыруучу тегиздиктин жашай турганын, андан кийин ошол тегиздиктин жалгыздыгын далилдөө керек экендигин белгилешет. Теореманын далилдөөсүнүн бул биринчи бөлүмүндө синтез методу, жарым жартылай изилдөө методу менен оптималдуу түрдө айкалыштыруу аркылуу колдонулганын белгилейли. Далилдөөнү сүйлөмдөрдүн удаалаштыгы түрүндө жазуу ыкмасын колдонолу.

1. Чийме боюнча (1 – сүрөт) a түз сызыгын жана анда жатпаган А чекитин белгилеп көрсөтөбүз.
2. $C \in a, B \in a$ шарттары аткарылгандай a түз сызыгынан В жана С чекиттерин тандап алабыз (аксиома боюнча: түз сызыкка тиешелүү чекиттер бар болот).



1 - сүрөт

3. Түзүү боюнча А, В, С чекиттери бир түз сызыкта жатышпайт, демек, алар аркылуу α тегиздигин жүргүзүүгө болот.
4. a түз сызыгынын В жана С чекиттери α тегиздигинде жаткандыктан, аксиома боюнча a түз сызыгы бүт бойдон α тегиздигинде жатат.

Эми а түз сызыгы жана анда жатпаган А чекити аркылуу өтүүчү α тегиздигинин жалгыз экендигин карама-каршысынан далилдөө методу менен жүргүзүлө тургандыгын окуучулар менен бирдикте белгилеп алабыз.

1. a түз сызыгы жана анда жатпаган А чекити аркылуу α тегиздигинен айырмалуу болгон дагы бир β тегиздигин жүргүзүүгө болот деп болжолдойлу.
2. Анда β тегиздиги $B \in a$ жана $C \in a$ болгон В, С жана А деген үч чекит аркылуу өткөн болор эле.

3. Бул учурда α жана β тегиздиктери A, B, C чекиттери аркылуу өткөн түз сызык боюнча кесилишип (аксиома боюнча), натыйжада, $A \in a$ болот деген корутунду алынмак. Бирок бул $A \notin a$ деген шартка карама-каршы. Демек, теорема толугу менен далилденди деген корутундуга окуучулар менен бирдикте келебиз.

Математикалык аппаратты колдонуу менен карама-каршысынан далилдөө методунун ар түрдүү формаларын төмөндөгүчө чечмелеп жазууга болор эле. [6, 54 - 55].

Шарттуу түрдө $A \Rightarrow B$ деп жазылган теореманы далилдөө үчүн, ага тең күчтүү болгон $A \& \overline{B} \Rightarrow C \& \overline{C}$, $A \& \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, $A \& \overline{B} \Rightarrow C \& B$ деген сүйлөмдөрдүн бирин далилдеп көрсөтүү жетиштүү. Мисал катарында, берилген теореманын экинчи логикалык формула менен тең күчтүү экенин далилдеп көрсөтөлү:

$$A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B \equiv (\overline{A} \vee \overline{A}) \vee B \equiv (\overline{A} \vee B) \vee \overline{A} \equiv \overline{\overline{\overline{A}} \& \overline{B}} \vee \overline{A} \equiv \overline{A \& \overline{B}} \vee \overline{A} = A \& \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \text{ б.а.}$$

$A \Rightarrow B \equiv A \& \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (Мында A, B, C айтылыштарды, ал эми ⇒, ∨, & символдору болсо, тиешелүү түрдө логикалык натыйжаны, дизъюнкцияны, конъюнкцияны жана төгүндөө операцияларын билдирет. $A \Rightarrow B$ логикалык формуланы теңдеш өзгөртүп түзүүдө логикалык операциялардын арасындагы байланыштар, алардын касиеттери жана де Моргандын закондору колдонулганын белгилейли.) Ошентип, берилген теореманын экинчи бөлүгүн далилдөө үчүн, анын шартын ($A \notin a$ & a – түз сызыгы берилген) корутундунун төгүндөөсү менен бириктирип, алынган конъюнкциядан теореманын шартынын төгүндөөсүн логикалык натыйжа катарында чыгаруу жетиштүү.

Ал эми 4, 5, 8 ж.б. теоремаларды [2a, 43] далилдөө $A \Rightarrow B \equiv A \& \overline{B} \Rightarrow C \& \overline{C}$ (Мында C – параллелдиктин аксиомасы) формуласы боюнча жүргүзүлгөнүн белгилейли. Ошондой эле алгебра курсунда $\sqrt{2}$ саны иррационалдык сан экендиги, жогорку класстарда тамыр жөнүндөгү теоремалар $A \Rightarrow B \equiv A \& \overline{B} \Rightarrow B$ теңдештигин көмүскө пайдалануу менен далилденгенин белгилеп кетели.

Карама-каршысынан далилдөө методунун маңызын ачып берүүгө арналган жалпылоочу сабакта бул методду колдонуу төмөнкүдөй кадамдардан курала турганын,жогоруда келтирилген логикалык теңдештиктерге таянуу менен чечмеленип берилет.

Теореманы далилдөөнүн алгачкы кадамында анын шартын төгүндөөнү ишке ашырабыз(демек, төмөнкү класстан эле айтылыштын төгүндөөсүн табууга окуучуларды даярдоо ишин баштоо зарыл). Биздин мисалда теореманын шартын канагаттандырган дагы бир β тегиздиги бар деген божомолдоо айтылды. Экинчи этапта болсо, кабыл алынган божомолдоого таянуу менен, логикалык туура корутундуларды жасоо аркылуу, кандайдыр бир карама-каршылыкка келебиз. Биздин мисалда A, B, C чекиттери бир түз сызыкта жатат деген, $A \notin BC$ шартына карама-каршы болгон сүйлөмгө келдик Аягында, биздин ой жүгүртүүбүз логикалык жактан туура болсо да, бирок баары бир карама-каршылыкка келгендиктен, божомолдоо туура эмес, демек, далилдөө керек болгон сүйлём (тезис) чын болот деген жыйынтыкка келебиз. Биздин мисалда α тегиздиги көрсөтүлгөн шартта жалгыз экендиги келип чыгат. Мындай корутунду чыгарууга логиканын карама-каршылык ($A \& \overline{A}$ - теңдеш калп айтылыш болот) жана үчүнчү мүмкүнчүлүктү төгүнгө чыгаруу ($A \vee \overline{A}$ - же A же Aнын төгүндөөсү орун алат) закондору мүмкүнчүлүк берет. Биздин мисалда, теореманын шартын канагаттандырган тегиздик же бирөө гана болот же экөө болот" деген сүйлөмдө экинчи бөлүгү калп айтылыш болуп, демек, α тегиздиги жалгыз экендиги келип чыгат.

Жалпылоочу сабак 10–класста, трансценденттик теңдемелерди чыгаруунун теориялык таянычы болгон тамыр жөнүндөгү теореманы окутууда өткөзүлүп жатса (ал максатка ылайыктуу), алдын ала тегиздиктеги жана мейкиндиктеги параллелдик жана перпендикулярдык катыштардын предметтик мазмуну боюнча интерактивдүү жаңы технология портфолиону колдонууну сунуштоого болот. Мында жогорку класстын окуучуларынын белгилүү деңгээлде калыптанып калган информациялык компетенттүүлүгүнө таянуу менен, керектүү предметтик мазмунду ылгай алуу билимдерин, билгичтиктерин жана көндүмдөрүн эффективдүү колдонууну сунуштайбыз. Мугалим керектүү маалыматтарды изилдеп табуу боюнча инструкция берип, тиешелүү окуу куралдарын пайдалануу жолдоруна окуучулардын көңүлүн бурат. Бул багытта [2а] окуу китебинин 44-46 жана 49-51, ошондой эле [3] колдонмонун тиешелүү беттерине өзгөчө көңүл бөлүүнү сунуштайт. Ал эми стереометрия курсунан болсо [2б] 3-4, 7-13, 16-17, 21-23 ошондой эле [3б] колдонмодон 12-14, 15-19, 22-23, 26-27, 33-35 ж.б. беттердеги окуу материалын колдонууну сунуштоо зарыл.

Окуучулар 15-20 беттен турган өз алдынча аткарышкан иштерин кыскача презентациялоо менен, маалыматтардын негизги бөлүгүн бөлүп алуу жана аны көрсөтүү ыкмаларына ээ болушат.

Жыйынтыктап айтканда, теоремаларды далилдөөнүн негизги методдору болгон синтез, анализ жана карама-каршысынан далилдөө методдорунда логикалык жана структуралык өзгөчөлүктөрүн окуучулар түшүнүү менен өздөштүрүшкөндө гана алардын билимдери ийкемдүү, оперативдүү, аң-сезимдүү жана бекем болуу сыяктуу сапаттарга ээ болорун күтүүгө болот.

Адабияттар:

1. Бекбоев И.Б., Алимбеков А. Азыркы сабакты даярдап өткөрүүнүн технологиясы. -Б.: Бийиктик, 2011.

2. а) Бекбоев И.Б. ж.б. Геометрия: Орто мектептин 7-9 кл үчүн окуу китеби. -Б.: Педагогика,2000.

б) Бекбоев И.Б. ж.б. Геометрия: Орто мектептин 10-11 кл үчүн окуу китеби. -Б.: Педагогика,2000.

3. а) Бекбоев И.Б. Салыков С ж.б. Геометрияны 7-9 класстарда окутуу. Мугалимдер үчүн методикалык колдонмо.-Б. : Педагогика,2003.

б) Бекбоев И.Б. Салыков С ж.б. Геометрияны 10-11 класстарда окутуу. Мугалимдер үчүн методикалык колдонмо. -Б.: Педагогика,2003.

4. Бекбоев И.Б. Жалпы билим берүүчү мектептер үчүн программа. Математика 5-11 кл. -Б.: Педагогика, 2015.

5. Салыков С. Математиканын элементтери жана аны мектеп математикасын окутууда колдонуу. –Каракол, 2012.