УДК 532 DOI:10.35803/1694-5298.2022.1.217-224

ЧЕЧЕЙБАЕВ Б., ЭСТЕБЕСОВА Н.Т.
[1]КНУ им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика

CHECHEIBAEV B., ESTEBESOVA N.
[1]KNU named after J. Balasagyn
net13_08@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

INVESTIGATION OF A TWO-DIMENSIONAL UNSTEADY LAMINAR BOUNDARY LAYER OF AN INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW

Илээшкектүү суюктуктардын чектик катмардагы эки өлчөмдүү стационардуу эмес агымдары үчүн Навье-Стокстун теңдемелер системасы каралды. Физикалык чоңдуктар: ылдамдыктын түзүүчүлөрү жана басым кичине параметр ε боюнча асимптотикалык катарга ажыратылды. Теңдеменин мүчөлөрү алдын ала маанилеринин чоңдугуна карата баалодон өткөрүлдү. Экинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин рекурренттик системасы алынды.

Физикалык чоңдуктардын нөлдүк жакындоосуна карата чектик катмардагы кысылбоочу суюктуктардын агымдарын изилдөөнүн негизи болгон Прандтль теңдемелер системасы орун алды. Кезектеги жакындоочулар өзгөрүлмөлүү коэффициенттүү, экинчи тартиптеги жекече туундулуу сызыктуу дифференциалдык теңдемелер болуп эсептелет. Жалпак пластинкалардагы чектик катмар теңдемесинин так аналитикалык чыгарылыштары табылды.

Үчүнчү тартиптеги сызыктуу эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме интегралданып кысылбоочу суюктук агымынын ток функциясы, ылдамдыктар талаасынын таралышы аныкталды. Чектик катмардын ажыроо шарты жана сүрүлүү каршылыгы табылды.

Өзөк сөздөр: *Риккати теңдемеси; ток функциясы; басымдын градиенти.*

Рассматривается система уравнений Навье-Стокса для двумерных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое. Физические величины продольная и поперечная составляющие скорости, давление разлагаются в асимптотический ряд по степеням малого параметра ε. Предварительно произведена оценка отдельных членов уравнений с точки зрения порядка их величины. Выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Относительно нулевого приближения физических величин получается система уравнений Прандтля, являющегося основным при исследовании течений несжимаемой жидкости в пограничном слое. Последующие приближения, являются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Найдены точные аналитические решения уравнения гидродинамического пограничного слоя на плоской пластинке. Интегрировав нелинейного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка определены функции тока, распределение поля скоростей течения несжимаемой жидкости. Установлены условия отрыва пограничного слоя и сопротивления трения.

Ключевые слова: *уравнение Риккати; функция тока; градиент давления; несжимаемая жидкость.*

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

A system of Navier-Stokes equations for two-dimensional unsteady flows of a viscous incompressible fluid in a boundary layer is considered. The physical quantities of the longitudinal and transverse components of velocity, pressure are decomposed into an asymptotic series by degrees of the small parameter ε. The estimation of the individual terms of the equations from the point of order of their magnitude has been preliminarily performed. Output to a recurrent system of partial differential equations of the second order with respect to the first approximation of physical quantities, a system of Prandtl equations is obtained, which is the main one in the study of incompressible fluid flows in the boundary layer, the following approximations are linear partial differential equations of the second order with variable coefficients. Precisely asymptotic solutions of the equation of hydrodynamic boundary layer on a flat plate have been found. Integrate a nonlinear ordinary third-order differential equation with certain current functions distributed by current speeds. The conditions for the separation of the boundary layer and the friction resistance have been established.

Key words: Riccati equation; flow function, pressure gradient; incompressible fluid.

Для плоскопараллельного неустановившегося течения несжимаемой жидкости в плоскости x, y уравнения Навье-Стокса принимает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{2}$$

где u и v суть составляющие вектора скорости $\vec{w}=\vec{i}u(x,y,t)+\vec{j}v(x,y,t)$, P–давление, ν – кинематическая вязкость.

Приступим к упрощению уравнений Навье-Стокса для течения в пограничном слое. С целью получения из уравнений Навье-Стокса уравнений пограничного слоя, принимается, что толщина пограничного слоя очень мала по сравнению с некоторыми характерным линейным размером L тела, т.е.

$\delta \ll$ L.

Считается, что толщина пограничного слоя пропорциональна корню квадратному из кинематической вязкости, т.е.

$\delta \sim \sqrt{\nu},$

для нестационарных течений вводятся число Струхаля $S_t=\frac{\delta}{TU}$, а $\delta \approx \sqrt{\frac{\nu}{\sigma}}$.

Продольная компонента скорости u на протяжении малой толщины слоя должна изменяться от нулевого значения $(u=0)$ на поверхности тела $(y=0)$ до некоторого конечного значения, имеющего порядок скорости «внешнего» без вихревого потока идеальной жидкости.

Продольная u и поперечная v скорости, давления P в потоке несжимаемой жидкости разлагаем в ряд по степеням малого параметра ε следующим образом:

$$\begin{aligned}u&=\varepsilon u_0+\varepsilon^2 u_1+\varepsilon^3 u_2+\cdots,\\ v&=\varepsilon^2 v_0+\varepsilon^3 v_1+\varepsilon^4 v_2+\cdots,\\ P&=\varepsilon^2 P_0+\varepsilon^3 P_1+\varepsilon^4 P_2+\cdots,\end{aligned} \tag{3}$$

а переменные x, y, t подвергаются следующим растяжениям

$$\tilde{x}=\varepsilon^2 x, \qquad \tilde{y}=\varepsilon y, \qquad \tilde{t}=\varepsilon^3 t. \tag{4}$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

В качестве значения малого параметра εпринимаем $\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{l}{\sqrt{Re}}$, обратной корню квадратному из Рейнольдсова числа, где $Re = \frac{vL}{\nu}$.

Находя частные производные от физических величин (3) с учётом преобразования (4), подставляем в исходное уравнение Навье-Стокса (1) и сгруппируем члены с одинаковыми степенями малого параметра ε. Произведем оценку отдельных членов этих уравнений определяя порядка их величины. Принимаем, что обтекаемая стенка – плоская. Перепишем уравнение Навье-Стокса в безразмерной форме, для чего скорости отнесем к скорости V набегающего потока, а все длины - к линейному размеру тела L.

Давление в сечении пограничного слоя, нормальным к поверхности тела, можно считать постоянным по сечению и равным давлению во внешнем потоке. После проведённой оценки членов уравнений (1), (2) это система переходит в следующую систему уравнений относительно нулевых приближений физических величин вязкой жидкости в области движения ламинарного нестационарного пограничного слоя.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} + u_0\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{x}} + v_0\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_0}{\partial \tilde{x}} + \nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{y}^2},\\ \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Для последующих членов асимптотического разложения (3) получается следующая рекуррентная система линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial \tilde{t}} + \sum_{i=0}^{n}\left(u_i\frac{\partial u_{n-i}}{\partial \tilde{x}} + v_i\frac{\partial u_{n-i}}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_n}{\partial \tilde{x}} + \nu\frac{\partial^2 u_n}{\partial \tilde{y}^2},\\ \frac{\partial v_n}{\partial \tilde{t}} + \sum_{i=0}^{n}\left(u_i\frac{\partial v_{n-i}}{\partial \tilde{x}} + v_i\frac{\partial v_{n-i}}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \tilde{y}} + \nu\frac{\partial^2 v_n}{\partial \tilde{y}^2},\\ \frac{\partial u_n}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v_n}{\partial \tilde{y}} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Здесь $n = 1,2,3.\cdots$номер приближения.

Системы уравнений (5), (6) являются асимптотическим представлением уравнения Навье-Стокса для исследования ламинарного пограничного слоя течения вязкой несжимаемой жидкости.

Следует отметить, что система уравнений (5) называется уравнением Прандтля для пограничного слоя.

Система уравнений Прандтля для нестационарного гидродинамического пограничного слоя с градиентом давления введением функции тока сводится к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных третьего порядка.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}. \tag{7}$$

Составляющие вектора скоростиu и v течения вязкой несжимаемой жидкости выражаются через функции тока следующим образом:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Давление в пограничном слое одинаково внешнем течении и определяется уравнением Бернулли для не установившегося течения, т.е. уравнением

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x},$$

где $U(x,t)$ есть скорость неустановившегося потенциального течения.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Граничными условиями будут

$$u = v = 0 \text{ при } y = 0 \text{ (условие прилипания на стенке)}, \quad u = U(x,t) \text{ при } y = \infty. \tag{8}$$

Рассмотрим точные решения уравнения (7) линейное по переменной x в случае отсутствия градиента давления в виде, т.е. $U(x,t) = const.$

$$\psi(x,y,t) = xF(y,t) + G(y,t), \tag{9}$$

где функция $F(y,t)$ и $G(y,t)$ определяются из более простых уравнений с двумя переменными

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} - F\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 G}{\partial y^3}. \tag{11}$$

Уравнение (10) решается независимо от уравнения (11). Если известно, частное решение уравнения (10), то соответствующее уравнение (11) заменой $\tilde{U} = \frac{\partial G}{\partial y}$ приводится к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - F\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial y}\tilde{U}. \tag{12}$$

Будем интегрировать нелинейного дифференциального уравнения в частных производных (10) путем введения новую переменной в следующей форме

$$\xi = y + \varphi(t), F(y,t) = F(\xi). \tag{13}$$

Подставляя соответствующие частные производные, полученные согласно преобразованию (13) в рассматриваемое уравнение получим

$$\varphi'(t)\frac{d^2F}{d\xi^2} + \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2 - F\frac{d^2F}{d\xi^2} = \nu\frac{d^3F}{d\xi^3}. \tag{14}$$

Введем новую функцию $P(F)$ следующим образом:

$$F'(\xi) = P(F), \tag{15}$$

тогда относительно неизвестной функции $P(F)$ получается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка следующего вида:

$$\varphi'(t)\frac{dP}{dF} + P - F\frac{dP}{dF} = \nu\left\{P\left(\frac{dP}{dF}\right)^2 + P^2\frac{d^2P}{dF^2}\right\}. \tag{16}$$

Решение полученного уравнения ищется методом неопределённых коэффициентов в виде трёхчлена второй степени

$$P(F) = \alpha F^2 + \beta F + \gamma. \tag{17}$$

В результате интегрирования найдены следующие значения коэффициентов

$$\alpha = -\frac{1}{6\nu}, \qquad \beta = \frac{\varphi'(t)}{3\nu}, \qquad \gamma = -\frac{\varphi'^2(t)}{6\nu}. \tag{18}$$

и после подстановки их значения в (17) имеем следующее выражение

$$P(F) = -\frac{1}{6\nu}\left(F - \varphi'(t)\right)^2. \tag{19}$$

Здесь $\varphi(t)$ произвольная функция зависящая от времени t.

Принимая во внимание (19), (15) после интегрирования находим решение рассматриваемого уравнения (10) поставляемое в нижеследующем виде

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

$$F(y,t)=\frac{6\nu}{y+\varphi(t)}+\varphi'(t). \tag{20}$$

Подставляя найденного решения дифференциального уравнения (20) в (12) и после применения преобразования

$$U(y,t)=\xi^{-3}\,\tilde{u}(\xi,t),\quad \xi=y+\varphi(t), \tag{21}$$

рассматриваемое уравнение приводится к уравнению теплопроводности относительно новой функции $u(\xi,t)$, т.е.

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}. \tag{22}$$

Отметим, что функция $F(y,t)=\varphi(t)$ также является решением уравнения (10), тогда по средством преобразования

$$U(y,t)=\tilde{u}(\xi,t),\qquad \xi=y+\int\varphi(t)dt, \tag{23}$$

рассматриваемое уравнение также приводится к уравнению теплопроводности. Находим методом разделения переменных решения уравнения теплопроводности (22), которые выглядят следующим образом:

$$\tilde{u}(\xi,t)=\frac{\bar{\mu}}{2\nu}\xi^2+\bar{\mu}t+C_1\xi+C_2, \tag{24}$$

где $\bar{\mu}$ постоянная разделения переменных.

Решение уравнения $G(y,t)$ определим интегрировав ещё раз по у решения уравнения (22), т.е.

$$G(y,t)=\int U(y,t)dy+C.$$

$$G(y,t)=\frac{\bar{\mu}}{6\nu}\left(y+\int\varphi(t)dt\right)^3+\bar{\mu}ty+\frac{C_1}{2}\left(y+\int\varphi(t)dt\right)^2+C_2y. \tag{25}$$

Соответствующее общее решение уравнения относительно функции тока имеет вид:

$$\psi(x,y,t)=x\varphi(t)+\frac{\bar{\mu}}{6\nu}\left(y+\int\varphi(t)dt\right)^3+\bar{\mu}ty+\frac{C_1}{2}\left(y+\int\varphi(t)dt\right)^3+C_2y. \tag{26}$$

Если искать решение уравнения теплопроводности в виде произведения функций разных аргументов, то имеем следующее решение

$$u(\xi,t)=C_1e^{\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\nu}}\xi+\bar{\mu}t}+C_2e^{-\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\nu}}\xi+\bar{\mu}t}. \tag{27}$$

В этом случае общее решение записывается в следующем виде

$$\psi(x,y,t)=x\varphi(t)+C_1\sqrt{\frac{\nu}{\bar{\mu}}}exp\left(\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\nu}}\left(y+\int\varphi(t)dt+\bar{\mu}t\right)+\bar{\mu}t\right)-C_2\sqrt{\frac{\nu}{\bar{\mu}}}exp\left(-\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\nu}}\left(y+\int\varphi(t)dt\right)+\bar{\mu}t\right)$$

Тек

.

Решения уравнения теплопроводности имеющий вид бегущей волны представим в виде

$$u(\xi,t)=f(\xi-vt)=f(\eta),\qquad \eta=\xi-vt. \tag{29}$$

Результатом интегрирования линейного обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $f(\eta)$ является такое, что $f(\xi-\bar{v}t)=C_1e^{-\frac{\bar{v}}{\nu}(\xi-\bar{v}t)}$.

Следовательно,

$$u(\xi,t)=C_1e^{-\frac{\bar{v}}{\nu}(\xi-\bar{v}t)}, \tag{30}$$

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

функция тока $\psi(x,y,t)$ имеет следующий вид:

$$\psi(x,y,t) = x\varphi(t) - C_1\frac{\nu}{\bar{\bar{\nu}}}e^{-\frac{\bar{\nu}}{\nu}[y+\int\psi(t)dt-\bar{\nu}t]} + \tilde{C}. \tag{31}$$

Решения уравнения теплопроводности теперь ищем в автомодельном виде

$$u(\xi,t) = t^n f(\eta), \qquad \eta = \frac{\xi^m}{t^p}. \tag{32}$$

Представляя (32) в уравнение (22) получим дифференциальное уравнение следующего вида

$$nf(\eta) - Pt^{-P}x^m f'(\eta) = \nu\{m(m-1)x^{m-2}t^{-P+1}f'(\eta) + m^2t^{-2p+1}x^{2m-2}f''(\eta)\}. \tag{33}$$

При следующих значениях постоянных $n = 2,\ m = 2,\ P = 1$,получается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение переменными коэффициентами следующего вида

$$2f(\eta) = (\eta + 2\nu)f'(\eta) + 4\nu\eta f''(\eta). \tag{34}$$

Решением получившегося уравнения является следующая функция

$$f(\eta) = \frac{\beta}{12\nu}\eta^2 + \beta\eta + \nu\beta, \qquad \beta = const. \tag{35}$$

Решением дифференциального уравнения теплопроводности (22) является следующее выражение

$$u(\xi,t) = \frac{\beta}{12\nu}\xi^4 + \beta\xi^2 t + \nu\beta t^2, \xi = y + \varphi(t), \tag{36}$$

соответствующее выражение для функции тока в этом случае определяется следующим образом:

$$\psi(x,y,t) = x\varphi(t) + \frac{\beta}{60\nu}\left(y + \int\varphi(t)dt\right)^5 + \frac{\beta}{3}\left(y + \int\varphi(t)dt\right)^3 t + \nu\beta t^2 y + const. \tag{37}$$

Определяя функцию $U(y,t)$ согласно преобразованию (21), затем находим $G(y,t)$ в следующем виде

$$G(y,t) = \frac{\beta}{24\nu}(y+\varphi(t))^2 + \beta t ln(y+\varphi(t)) - \frac{\nu\beta}{2}t^2\xi^{-2} + C. \tag{38}$$

Для этого случая соответствующая функция тока представляется следующим образом:

$$\psi(x,y,t) = x\left(\frac{6\nu}{y+\varphi(t)} + \varphi'(t)\right) + \frac{\beta}{24\nu}(y+\varphi(t))^2 + \beta t ln(y+\varphi(t)) - \frac{\nu\beta}{2}t^2(y+\varphi(t))^{-2} + C.$$ **Тек**

Продольная u и поперечная v составляющие вектора скорости имеют следующий вид:

$$u = -\frac{6\nu x}{(y+\varphi(t))^2} + \frac{\beta}{12\nu}(y+\varphi(t)) + \frac{\beta t}{y+\varphi(t)} + \nu\beta\frac{t^2}{(y+\varphi(t))^3},$$
$$v = -\frac{6\nu}{y+\varphi(t)} - \varphi'(t). \tag{40}$$

Условием отрыва пограничного слоя является выполнение в точке отрыва равенства

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \tag{41}$$

Составим такую производную от функции $u(x,y)$ и мы получим уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{12\nu x}{\varphi(t)^3} + \frac{\beta}{12\nu} - \frac{\beta t}{\varphi(t)^2} - \frac{3\nu\beta t^2}{\varphi(t)^4} = 0. \tag{42}$$

Так как $\varphi(t)$ - произвольная функция зависимости от времени, для удобства полагаем, что $\varphi(t) = t^{1/2}$.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Подставляя это выражение в (1) и обозначив момент начала отрыва через $t_{отр}$ мы получим следующее:

$$t_{отр} = \sqrt[3]{\left(\frac{144\nu^2 x}{\beta(12\nu + 36\nu^2 - 1)}\right)^2}. \tag{43}$$

Эта формула позволяет вычислить тот момент времени, в которой заданной точке x контура тела, впервые начинается отрыв пограничного слоя. Зная распределение скорости в пограничном слое, можем вычислить сопротивление, которое возникает вследствие трения движущейся жидкости о поверхности тела по формуле

$$W_{mp} = b\mu \int_{x=0}^{l} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} dx, \tag{44}$$

где b –есть ширина, а l – длина пластинки, μ – динамическая вязкость жидкости.

В результате подстановки выражения для $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$ из формулы (42) в (44) определяется сопротивление трения в следующей форме:

$$W_{mp} = b\mu l\left(\frac{6\nu l}{\varphi(t)^3} + \frac{\beta}{12\nu} - \frac{\beta t}{\varphi(t)^2} - \frac{3\nu\beta t^2}{\varphi(t)^4}\right). \tag{45}$$

Используя найденное решение уравнения теплопроводности в виде (24) и последовательно определяя функции $U(y,t)$, $G(y,t)$ согласно по формуле (21), находим решение уравнения пограничного слоя в следующем виде:

$$\psi(x,y,t) = x\left(\frac{6\nu}{y+\varphi(t)} + \varphi'(t)\right) + \frac{\bar{\mu}}{2\nu} ln\big(y+\varphi(t)\big) - \frac{C_2 + \bar{\mu}t}{2\big(y+\varphi(t)\big)^2} - \frac{C_1}{y+\varphi(t)}. \tag{46}$$

Распределение скоростей течения жидкости в пограничном слое определяются в нижеследующем виде:

$$v = -\frac{6\nu}{y+\varphi(t)} + \varphi'(t) \tag{47}$$

$$u = -\frac{6\nu x}{\big(y+\varphi(t)\big)^2} + \frac{\bar{\mu}}{2\nu}\frac{1}{y+\varphi(t)} + \frac{C_2 + \bar{\mu}t}{\big(y+\varphi(t)\big)^3} + \frac{C_1}{\big(y+\varphi(t)\big)^2}. \tag{48}$$

Здесь $\bar{\mu}$ –постоянная разделения переменных, C_1, C_2 –постоянные интегрирования. Вычисление сопротивления трения даёт следующее выражение

$$W_{mp} = b\mu l\left\{\frac{6\nu l}{\varphi(t)^3} - \left(\frac{\bar{\mu}}{2\nu}\frac{1}{\varphi(t)^2} + \frac{3(C_2 + \bar{\mu}t)}{\varphi(t)^4} + \frac{2C_1}{\varphi(t)^3}\right)\right\}. \tag{49}$$

Время начала отрыва пограничного слоя, соответствующее рассматриваемому решению, имеет следующий вид:

$$t_{отр} = \varphi(t) = \frac{2\nu}{\bar{\mu}}(12\nu x - 2C_1 - 3\bar{\mu}). \tag{50}$$

Если полагать $\varphi(t) = t_{отр}^{1/2}$ то имеем

$$t_{отр} = \frac{4\nu^2}{\bar{\mu}^2}(12\nu x - 2C_1 - 3\bar{\mu})^2. \tag{51}$$

При $\varphi(t) = t_{отр}^2$, имеем

$$t_{отр} = \sqrt{\frac{2\nu}{\bar{\mu}}(12\nu x - 2C_1 - 3\bar{\mu})}. \tag{52}$$

Профили скоростей и линии тока потенциальных течений будут построены с использованием современных пакетов программ Mathlab и Mathcad.

Выводы:

1. Выведена рекурентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка являющаяся асимптотическим приближением уравнения Навье- Стокса.

Для нулевого приближения физических величин в асимптотическом ряду получается система уравнений Прандтля решения которого описывают нестационарного гидродинамического пограничного слоя течения жидкости с градиентом давления.

Последующие приближения являются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами.

2. Найдены точные решения уравнения нестационарного гидродинамического пограничного слоя являющегося нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных третьего порядка относительно функцию тока. Определены функции тока, поле скоростей течений, условия отрыва пограничного слоя, сопротивления трения которое возникает вследствии трения движущейся жидкости о поверхности тела

Список литературы

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя [Текст] / Г. Шлихтинг. - М.: Наука, 1974. - 712 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л.Г.Лойцянский. - М.: Наука, 1960.
3. Полянин А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения [Текст] /А.Д.Полянин, В.Ф.Зайцев. - М.: Физматлит, 2002. - 432 с.