



АБДРАСАКОВА А.Б., КАРТАНОВА А.ДЖ., СУЛАЙМАНОВА С.М.

¹КГУСТА им. Н. Исанова Бишкек, Кыргызская Республика

²Кыргызский национальный аграрный университет им. К.И.Скрябина,
Бишкек, Кыргызская Республика

ABDRASAKOVA A.B., KARTANOVA A.DZH., SULAIMANOVA S. M

¹KSUCTA n. a. N. Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic

²The Kyrgyz National Agrarian University n.a. K.I. Skryabin, Bishkek, Kyrgyz Republic
sulai@bk.ru, a.kartanova@mail.ru, aizada_abdrasakova@yahoo.com

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ НАД ОГРАНИЧЕННОЙ ТЕРРИТОРИЕЙ

NUMERICAL MODELING OF TRANSFER OF THE PASSIVE IMPURITY OVER THE LIMITED AREA

Макалада гидротермодинамиканын толук теңдемелерин бийиктикке интеграциялоо жолу менен алынган эки өлчөмдүү моделдин жардамы менен, Кыргыз Республикасынын аймагын кошо алганда, термикалык жана орографиялык жактан гетерогендүү чектелген аймактын үстүндө бийиктикке орточо пассивдүү аралашманы ташууну эсептөөнүн жыйынтыктары келтирилген.

Өзөк сөздөр: математикалык модель, атмосферанын гидротермодинамикасы, аралашма концентрациясы, шамалдын ылдамдыгы, тажрыйба.

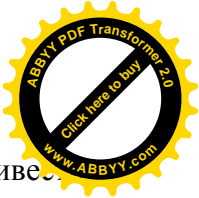
В статье приведены результаты расчета переноса осредненной по высоте пассивной примеси над термически и орографически неоднородной ограниченной территорией, включающей территорию Кыргызской Республики, с использованием двумерной модели, полученной путем интегрирования по высоте полных уравнений гидротермодинамики.

Ключевые слова: математическая модель, гидротермодинамика атмосферы, концентрация примеси, скорость ветра, эксперимент.

The article presents the results of calculating the transfer of a height-averaged passive impurity over a thermally and orographically inhomogeneous limited area, including the territory of the Kyrgyz Republic, using a two-dimensional model obtained by integrating the full hydrothermodynamic equations in height.

Key words: mathematical model, atmospheric hydrothermodynamics, admixture concentration, wind speed, experiment.

Введение. Проблема взаимодействия человека с окружающей средой представляет в настоящее время активно развивающуюся область применения методов математического моделирования. Особенно остро эти задачи ставятся в последние годы в связи с активным влиянием человека на окружающую среду. Увеличение масштабов хозяйственной деятельности связано с воздействием на окружающую среду локального и глобального характера. При оценке возможных последствий этой деятельности существенную роль должны сыграть математические модели. С позиций математического моделирования влияние деятельности человека можно интерпретировать как реализацию некоторых экспериментов. Постановка же экспериментов в реальных условиях на практике, с одной стороны, оказывается слишком дорогостоящей с другой стороны,



многие эксперименты в экологии и социально – экономических областях могут привести к необратимым последствиям.

К настоящему времени уже накоплен достаточно большой опыт в решении задач физики атмосферы и прикладной метеорологии с помощью математических моделей и анализа фактической информации [1-6]. В зависимости от исследования конкретной проблемы выбираются модели различного уровня по физическому содержанию для эффективной реализации их на вычислительных машинах. Теоретическую основу моделей данного класса составляют уравнения гидротермодинамики атмосферы и уравнения переноса и трансформации примесей.

Математическая модель расчета. Рассмотрим математическую модель гидротермодинамики атмосферных процессов на ограниченной территории регионального масштаба. Для записи уравнений используем декартову систему координат x, y, z (ось x ориентирована на восток, y – на юг, z – вертикаль вниз).

В качестве исходных уравнений локальных атмосферных процессов примем: уравнения движения (1), уравнения неразрывности (2), уравнение переноса тепла и примеси (3), уравнение состояния (Клайперона) (4) в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + L(u) + fv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F^u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + L(v) - fu &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F^v, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= g\rho, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + L(\theta) &= F^\theta, \\ \frac{\partial c}{\partial t} + L(c) + \frac{\partial w'c}{\partial z} + qc &= F^c, \end{aligned} \quad (3)$$

$$p = \rho RT, \quad (4)$$

Задаем краевые условия при $z=0$ и $z=H$ в виде:

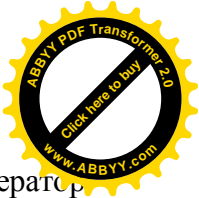
$$z = 0: \quad \rho_0 A_v \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \quad \rho_0 A_v \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \quad w = 0, \quad w' = 0, \quad (5)$$

$$z = H: \quad u = v = w = 0, \quad A_\theta^z \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad A_c^z \frac{\partial c}{\partial n} = 0, \quad w' = 0$$

и начальные условия при $t = 0$ в виде:

$$t = 0: \quad u = u_0, \quad v = v_0, \quad \theta = \theta_0, \quad c = c_0. \quad (6)$$

Здесь u, v, w – проекции вектора скорости ветра на оси координат x, y, z соответственно; ρ – плотность; p – давление; T – температура; R – газовая постоянная; f – параметр Кориолиса, $\theta = T(p_0/p)^{(\kappa-1)/\kappa}$ – потенциальная температура; $\kappa = c_p/c_v$, c_p, c_v – удельная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении и объеме соответственно; c – концентрация примеси; q – постоянная распада; w' – средневзвешенная скорость падения примеси; $H=H(x, y)$ – функция, описывающая рельеф подстилающей поверхности; τ_x, τ_y – касательное напряжение трения ветра на верхней границе ($z=0$); n – направление внешней



нормали к подстилающей поверхности $H(x,y)$; $L_{(\mu)} = \frac{\partial u \mu}{\partial x} + \frac{\partial v \mu}{\partial y} + \frac{\partial w \mu}{\partial z}$ – оператор адвекции скалярной величины μ ; F^μ – члены, описывающие вертикальную и горизонтальную турбулентность, имеющие вид $F_\mu = \frac{\partial}{\partial z} A_\mu^z \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} A_\mu^x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_\mu^y \frac{\partial \mu}{\partial y}$; $A_\mu^z, A_\mu^x, A_\mu^y$ – коэффициенты вертикальной и горизонтальной турбулентности, где под μ понимаются u, v, θ или c ; ρ_0 – средняя плотность воздуха. Краевые условия на «открытой» границе области сформулируем ниже.

Перейдем от метеорологических величин p, ρ, θ и T к их отклонениям p', ρ', θ' и T' по формулам:

$$p = \bar{p} + p', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho', \quad \theta = \bar{\theta} + \theta', \quad T = \bar{T} + T', \quad (7)$$

где $\bar{p}(z), \bar{\rho}(z), \bar{\theta}(z), \bar{T}(z)$ – функция только высоты, $\theta = \text{const}$, причем $\bar{p} = R \bar{\rho} \bar{T}$ и $\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = g \bar{\rho}$. Предполагая далее $\frac{p'}{\bar{p}} \ll 1, \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \ll 1$ и $\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \ll 1$ и интегрируя исходные

уравнения по z от 0 до H с учетом того, что $\frac{\partial p'}{\partial z} = \lambda \theta'$, где $\lambda = g/\bar{\theta} = \text{const}$ приходим к уравнению для интегральной функции тока ψ

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + R \right] A \psi + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A \psi}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A \psi}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \\ & = A_H \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) \right] + F, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_y}{\rho_0 H} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_x}{\rho_0 H} \right) - \frac{\lambda H^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \tilde{\theta}'}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \tilde{\theta}'}{\partial x} \right) \right],$$

$$A \psi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad A_H = A_u^x = A_u^y = A_v^x = A_v^y = \text{const},$$

а функция тока ψ связана с горизонтальными скоростями соотношениями

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \int_0^H v dz, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = - \int_0^H u dz. \quad (9)$$

При выводе уравнения (8) при линеаризации нелинейных членов предполагалось, что

$$\int_0^H \alpha(z) \beta(z) dz = \tilde{\alpha} \int_0^H \beta(z) dz = \tilde{\alpha} \tilde{\beta} H, \quad (10)$$

где α и β – это u или v , а волна сверху означает осреднение по глубине, т.е. $(\tilde{\sim}) = \frac{1}{H} \int_0^H (\sim) dz$. Считалось, что составляющие трения τ_x^b, τ_y^b о подстилающую

поверхность пропорциональны составляющим полного потока, т.е.

$$\begin{aligned} -\frac{\tau_x^b}{\rho_0} &= A_v' \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_H = -R \int_0^H u dz = R \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ -\frac{\tau_y^b}{\rho_0} &= A_u' \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_H = -R \int_0^H v dz = -R \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (11)$$



где $A'_v = A_v + A_H \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right]$ - эффективный коэффициент придонного трения.

Уравнение (8) можно записать в виде системы двух уравнений относительно функции тока ψ и потенциального вихря $\xi = (A\psi - f)/H$

$$\begin{aligned} H \left[\frac{\partial}{\partial t} + R \right] \xi + J(\psi, \xi) &= -Rf + F + A_H \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &= H\xi + f, \end{aligned} \quad (12)$$

где $J(\psi, \xi) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа (как и в (8)).

Осредненные по глубине отклонение потенциальной температуры ($\tilde{\theta}$) и концентрация примеси (\tilde{c}) определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial H\tilde{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}H\tilde{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}H\tilde{\theta}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} HA_\theta^x \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} HA_\theta^y \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y}, \\ \frac{\partial H\tilde{c}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}H\tilde{c}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}H\tilde{c}}{\partial y} + qH\tilde{c} &= \frac{\partial}{\partial x} HA_c^x \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} HA_c^y \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (13)$$

На открытых участках границы принимается условие равенства нулю нормальной производной от касательной составляющей скорости. Там, где поток направлен из рассматриваемой области, функция тока и потенциальный вихрь вычисляются с помощью системы (12), а потенциальная температура и концентрация примеси из уравнений (13) при условии равенства нулю их нормальных производных. Там, где поток направлен в рассматриваемую область, потенциальная температура, концентрация примеси и функция тока заданы, а потенциальный вихрь находится из второго уравнения системы (12).

Метод решения. При численном решении уравнений (12) и (13) используются консервативно – диссипативные разностные схемы по пространственным переменным и неявные аппроксимации по времени. Функция тока (ψ) и потенциальный вихрь (ξ) определяются в узлах горизонтальной разностной сетки с целочисленными значениями индексов i и j по осям x и y соответственно, отклонение потенциальной температуры ($\tilde{\theta}$)- в точках с полуцелыми значениями индексов $i+1/2$, $j+1/2$, составляющие скорости (\tilde{u}) и (\tilde{v}) в точках i , $j+1/2$, $i+1/2$, j соответственно (сетка D по терминологии [4]). Системы алгебраических уравнений, аппроксимирующие исходные дифференциальные уравнения, решаются методом последовательной верхней релаксации.

Результаты численных экспериментов. При проведении численных экспериментов в начальный момент времени задавалось распределение ($\tilde{\theta}'_0$) с

меридиональным градиентом в 10°C $\left[\tilde{\theta}' = 10^0 \frac{y}{l_y} - \gamma [H_0 - H(x, y)] \right]$, $\gamma = 0,936 \cdot 10^{-3}$ град/м,

$H_0=8500$ м – высота, на которой расположено начало системы координат ($z=0$); l_y – размер области с севера на юг, $l_y=4,8 \cdot 10^5$ м], задавался фоновый поток $u=u_0$, $v_0=v_0$ для горизонтальных составляющих скорости в зависимости от рассматриваемого варианта. Значение интегральной функции тока в начальный момент находилось с использованием соотношений (9), а значение потенциального вихря ξ – из соотношения

$$\xi = (A\psi - f)/H = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{v}{H} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{u}{H} \right) / H \quad (14)$$



т.е. из второго уравнения системы (12).

В обсуждаемых ниже численных экспериментах, выполненных с 20-ти километровым разрешением по горизонтальным координатам (49x25 точек по оси x и y соответственно), значения основных параметров следующие:

$$F = 9,75 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-13} \text{ y (c}^{-1}\text{)}, R = 10^{-6} \text{ c}^{-1},$$

$$A_H = 2\text{M}^2/2, A_\theta^x = A_c^x = \frac{1}{2} A_H + h|\tilde{u}|/2,$$

$$(15)$$

$$A_\theta^y = A_c^y = \frac{1}{2} A_H + h|\tilde{v}|/2, \quad \tau_x = \tau_y = 0,$$

$$q = 2 \cdot 10^{-6} \text{ c}^{-1}, \quad \tau = 120 \text{ c}.$$

здесь h – шаг по горизонтальным координатам, τ – шаг по времени.

В начальный момент времени в точке с координатами (x_0, y_0) , принадлежащей рассматриваемой области, задавалось наличие концентрации примеси, после чего рассчитывался ее перенос, с помощью решения второго уравнения (13) горизонтальным ветром, компоненты которого находились из решения уравнения (12) с учетом влияния термической неоднородности $(\tilde{\theta}')$ определяемой из решения первого уравнения (13).

Всего было проведено три численных эксперимента по моделированию процесса распространения примеси над территорией Кыргызской Республики с различными метеорологическими условиями. Интегрирование уравнения диффузии примеси во всех экспериментах проводилось на 30 и более суток модельного времени с шагом 1 сутки. Использовался реальный рельеф поверхности, изолинии которого приведены на рис.1. Нижний левый угол расчетной области соответствует 39' с.ш. и 69' в.д.

В первом эксперименте в качестве начального состояния был задан западный перенос со скоростями $u_0=1\text{м/сек}$ и $v_0=0,1\text{м/сек}$. Далее рассчитывались термодинамические характеристики по описанной выше модели. Полученное в результате моделирования поле ветра представлено изолиниями функции тока на рис.2. Из рисунка видно, что существенное влияние на динамику оказывает топография поверхности. Затем в районе Каджи-Сайского хвостохранилища было задано начальное значение концентрации примеси, и уравнение диффузии примеси было проинтегрировано на 30 суток, т.е. моделировался процесс распространения примеси в результате аварийной ситуации. Изолинии концентрации примеси приведены на рис.3. Анализ результатов расчета показал, что распространение примеси осуществляется в соответствии с присущей этому району циркуляцией.

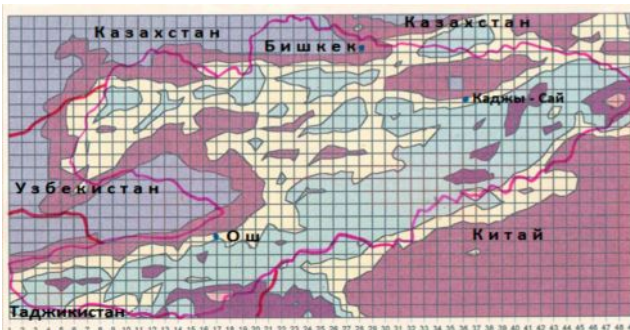


Рис.1. Изолинии рельефа поверхности

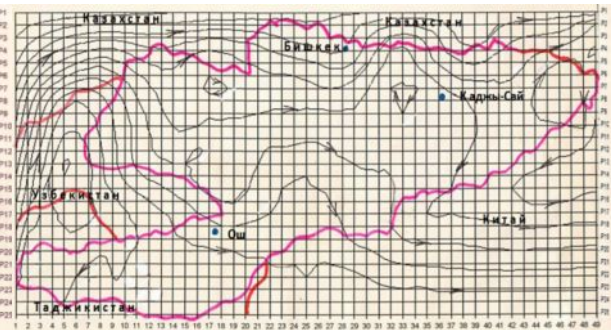


Рис.2. Изолинии функции тока (эксп.1)

Во втором численном эксперименте задавался западный перенос со скоростями $u_0=10\text{м/сек}$, $v_0=1\text{м/сек}$. В этом случае влияние рельефа поверхности на динамику потока значительно меньше и преобладает заданная циркуляция (рис.4). Облако загрязнения имеет более вытянутую форму в восточном направлении (рис.5). После 40 суток

интегрирования облако загрязняющих веществ выходит за пределы расчетной области через восточную границу.

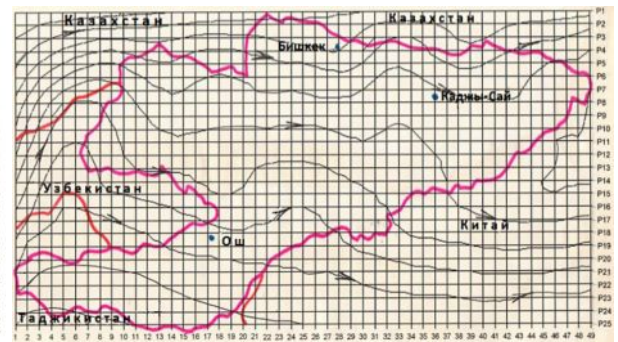
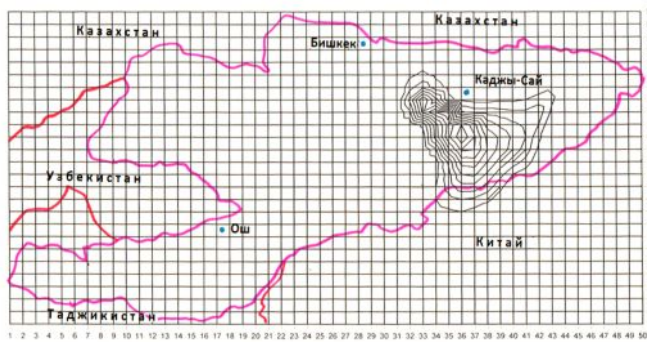


Рис.3. Изолинии концентрации примеси (эксп.1) Рис.4.Изолинии функции тока (эксп.2)

Основные отличия третьего эксперимента от первых двух заключаются в том, что был задан восточный перенос ($u_0=5$ м/сек, $v_0=0,5$ м/сек), а концентрация примеси задавалась на восточной границе расчетной области. Этот численный эксперимент моделирует процесс распространения радиоактивного облака, перемещающегося с территории Китая. Динамика облака приведена на рис.6-8 через 10, 25 и 35 суток интегрирования.

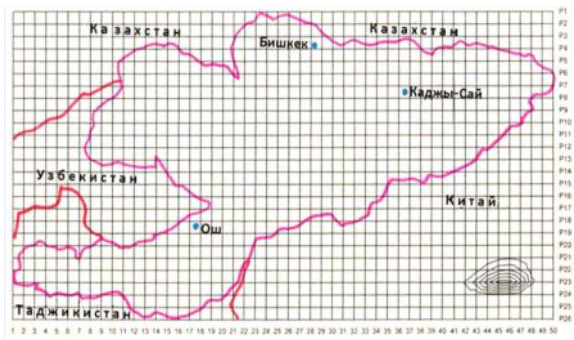
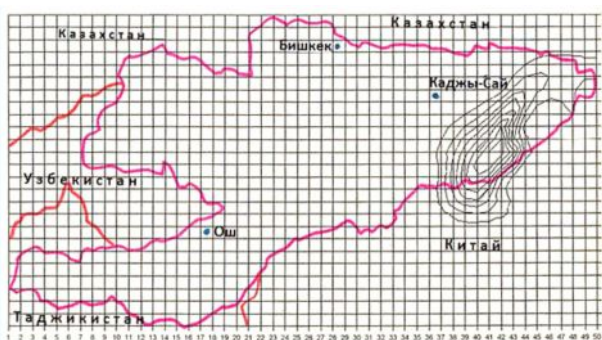


Рис.5.Изолинии концентрации примеси (эксп.2)

Рис.6.Изолинии концентрации (эксп.3)

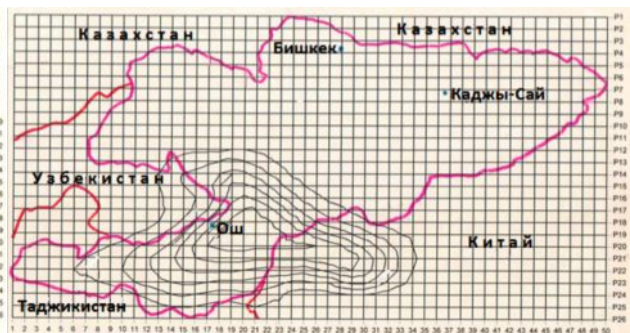
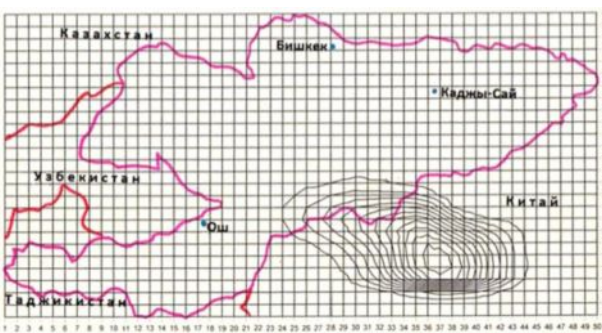


Рис.7.Изолинии функции тока – 25суток (эксп.3)

Рис.8.Изолинии функции тока- 35 суток (эксп.3)

В заключение отметим, что результаты проведенных численных экспериментов демонстрируют реалистичность моделирования процесса распространения примеси.



Выводы. Загрязнение атмосферы примесями различного происхождения вызывает научный интерес, прежде всего тем, что большая часть атмосферных примесей оказывает вредное влияние как на животный и растительный мир, так и на здоровье человека.

Концентрация примесей, в том числе и радиоактивных, в атмосфере и на земной поверхности в сильной степени зависит от метеорологических факторов, что подтверждается и выполненными численными экспериментами даже в рамках математической модели. Среди упомянутых факторов важное значение имеют скорость и направление ветра, их изменчивость с высотой, термическая устойчивость атмосферы, облака, туманы и осадки, рельеф местности и т. п. Под влиянием этих факторов концентрация примесей в атмосфере изменяется в широких пределах. В связи с этим представляется важным разработка трехмерных численных моделей переноса и трансформации примесей для оценки выбора мест для строительства промышленных предприятий, жилищ и т.д.

Список литературы

1. Кочергин В.П. К вопросу о численном моделировании гидротермодинамических задач океана [Текст] / В.П. Кочергин, С.Н. Складар, Р.К. Султанов // Морской Гидрофизический журнал. - 1990. - № 2. - С. 10-18.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики [Текст] / Г.И.Марчук. - М.: Наука, 1989. - 608 с.
3. Матвеев Л.Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы [Текст] / Л.Т.Матвеев. - Л.: Гидрометеиздат, 1984. - 751 с.
4. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях [Текст] / Ф.Мезингер, А.Аракава. - Л.: Гидрометеиздат, 1979. - 136 с.
5. Дымников В.П. Современные проблемы математической теории климата [Текст] / В.П. Дымников, А.С.Грицун // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. - 2005. — Том 41. - С. 266-284.
6. Пененко В.В. Оптимальное прогнозирование природных процессов с оценкой неопределенности [Текст] / В.В.Пененко, Е.А.Цветова // ПМТФ. - 2009. - № 2. - С. 156-166.