УДК 517.75, 517.927, 517.956.3

Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М., Илиясова Г.Б.
Казахский государственный женский педагогический университет

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МНОГОТОЧЕЧНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

В данной статье рассматривается линейная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечным интегральным условием. Для решения рассматриваемой задачи применяется метод параметризации. Разбиением интервала точками нагружения и введением дополнительных параметров рассматриваемая задача сводится к эквивалентной краевой задаче с параметрами. Эквивалентная краевая задача с параметрами состоит из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами, многоточечного интегрального условия и условия склеивания. Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами строится с помощью фундаментальной матрицы дифференциального уравнения. Подставляя значения в соответствующих точках построенного решения в многоточечное интегральное условие и условие склеивания, составляется система линейных алгебраических уравнений относительно параметров. Предложен алгоритм нахождения решения линейной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечным интегральным условием, основанный на методе параметризации.

Ключевые слова: *многоточечная краевая задача, нагруженное дифференциальное уравнение, интегральное условие, метод параметризации*

A linear boundary value problem for the system of loaded differential equations with multipoint integral condition is considered. The method of parameterization is used for solving the considering problem. The considering problem by introducing additional parameters at the loading points is reduced to an equivalent boundary value problem with parameters. The equivalent boundary value problem with parameters consist of the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations with parameters, multipoint integral condition and continuity condition. The solution of the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations with parameters is constructed using the fundamental matrix of the differential equation. The system of a linear algebraic equations with respect to the parameters are composed by substituting the values of the corresponding points in the built solutions to the multipoint integral condition and the continuity condition. An algorithm for finding the solution of the linear boundary value problem for the system of loaded differential equations with multipoint integral condition based on the parameterization method is offered.

Key words: *multi-point boundary value problem, loaded differential equation, integral condition, parameterization method*

В последние годы наблюдается интенсивное исследование нагруженных дифференциальных уравнений, связанное с различными приложениями задач, ассоциированных с нагруженными уравнениями. К задачам приложений, описываемых этими уравнениями, относятся задача долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги [1-3], моделирования процессов переноса частиц, некоторые задачи оптимального управления [3,4]. Отметим, что нагруженные дифференциальные уравнения описывают процессы с последействием, в которых состояние процесса в какой-либо точке и в какой-либо момент может оказывать влияние на весь процесс в целом [2].

В работах [4-7] предложен численный метод решения систем линейных неавтономных обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными интегральными условиями. Метод основан на операции свертывания интегральных условий в локальные, что позволяет свести решение исходной задачи к решению задачи Коши относительно систем обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных алгебраических уравнений.

Одним из конструктивных и эффективных методов решения двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений является метод параметризации [8]. Данный метод, кроме доказательства однозначной разрешимости исследуемой задачи, дает непосредственный алгоритм построения приближенного решения, сходящегося к ее точному решению. В работе [9] метод параметризации развит на многоточечные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, установлены эффективные условия разрешимости и построены конструктивные алгоритмы нахождения решения.

Ранее в работах [10, 11] на основе метода параметризации найдены коэффициентные признаки однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений и построены алгоритмы нахождения решения этой задачи.

В работе [12] предложен алгоритм нахождения решения линейной краевой задачи с многоточечным интегральным условием для систем нагруженных дифференциальных уравнений при импульсном воздействии, основанный на методе параметризации.

В настоящей работе рассматривается линейная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечным интегральным условием

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{i=1}^{m} A_i(t)x(\theta_i) + f(t), \quad t \in (0,T), \ \ x \in R^n, \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{m+1} B_j x(\theta_j) + \int_0^T M(t)x(t)dt = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

где матрицы $A_i(t),\, M(t)$, $i = \overline{0,m}$, размерности $(n \times n)$ и n–вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, B_j, $j = \overline{0,m+1}$ – постоянные матрицы размерности $(n \times n)$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m < \theta_{m+1} = T$.

В данной работе задача (1), (2) исследуется методом параметризации. Интервал $[0,T]$ разбиваем на части точками нагружения: $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{m+1} [\theta_{r-1}, \theta_r)$.

Введем пространство $C([0,T], \theta, R^{n(m+1)})$ систем функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{m+1}(t))$, где функции $x_r(t)$, $r = \overline{1,m+1}$, непрерывны на $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ и имеют конечные левосторонние пределы $\lim_{t \to \theta_r - 0} x_r(t)$, $r = \overline{1,m+1}$, с нормой $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1,m+1}} \sup_{t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)} \|x_r(t)\|$.

Сужение вектор-функции $x(t)$ на r-ый интервал $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t) = x(t)$ при $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1,m+1}$.

Введем параметры $\lambda_r = x_r(\theta_{r-1})$, $r = \overline{1,m+1}$, и на каждом интервале $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ произведем замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $r = \overline{1,m+1}$. Введение дополнительных параметров позволяет получить начальные данные. Тогда исходная задача (1), (2) перейдет к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A_0(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\lambda_{j+1} + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \tag{3}$$

$$u_r(\theta_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,m+1}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=0}^{m} B_j \lambda_{j+1} + B_{m+1}\lambda_{m+1} + B_{m+1}\lim_{t\to T-0} u_{m+1}(t) + \sum_{k=1}^{m+1}\int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} M(t)[u_k(t)+\lambda_k]dt = d, \qquad (5)$$

$$\lambda_p + \lim_{t\to\theta_p-0} u_p(t) = \lambda_{p+1}, \quad p=\overline{1,m}. \qquad (6)$$

Решением задачи (3)-(6) является пара $(\lambda, u[t])$ с элементами $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{m+1}) \in R^{n(m+1)}$, $u[t] = (u_1(t), u_2(t), ..., u_{m+1}(t)) \in C([0,T], \theta, R^{n(m+1)})$, где функции $u_r(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, и при $\lambda_r = \lambda_r^*$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3) и условиям (4)-(6).

Задачи (1), (2) и (3)–(6) эквивалентны. Если пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$, где $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, ..., \tilde{\lambda}_{m+1}) \in R^{n(m+1)}$, $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), ..., \tilde{u}_{m+1}(t)) \in C([0,T], \theta, R^{n(m+1)})$ – решение задачи (3)-(6), то функция $\tilde{x}(t)$ определяемая равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t)$, $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_{m+1} + \lim_{t\to T-0}\tilde{u}_{m+1}(t)$ будет решением исходной задачи (1), (2). И наоборот, если функция $x(t)$ является решением задачи (1), (2), то пара $(\lambda, u[t])$ где $\lambda = (x(\theta_0), x(\theta_1), ..., x(\theta_m))$, $u[t] = (x(t)-x(\theta_0), x(t)-x(\theta_1), ..., x(t)-x(\theta_m))$, будет решением задачи (3)-(6).

При фиксированных значениях параметров $\lambda \in R^{n(m+1)}$ систему функций $u[t]$ можно определить решая задачи Коши (3), (4). Используя $X(t)$ – фундаментальную матрицу дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, решение задачи Коши (3), (4) запишем в виде

$$u_r(t) = X(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_r + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1} + f(\tau)\right]d\tau, \; t\in[\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r=\overline{1,m+1}. \qquad (7)$$

Переходя в правой части (7) к пределу при $t \to \theta_r - 0$, и подставив соответствующие им выражения в условия (5), (6), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров λ_r, $r=\overline{1,m+1}$:

$$\sum_{j=0}^{m} B_j\lambda_{j+1} + B_{m+1}\lambda_{m+1} + C_{m+1}X(T)\int_{\theta_m}^{T} X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_{m+1} + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1}\right]d\tau +$$
$$+\sum_{k=1}^{m+1}\int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} M(t)\left\{X(t)\int_{\theta_{k-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_k + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1}\right]d\tau + \lambda_k\right\}dt = \qquad (8)$$
$$= d - C_0X(T)\int_{\theta_m}^{T} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{m+1}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} M(t)X(t)\int_{\theta_{j-1}}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau dt,$$

$$\lambda_p + X(\theta_p)\int_{\theta_{p-1}}^{\theta_p} X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_p + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1}\right]d\tau - \lambda_{p+1} =$$
$$= -X(\theta_p)\int_{\theta_{p-1}}^{\theta_p} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \; p=\overline{1,m}. \qquad (9)$$

Матрицу, соответствующую левой части системы уравнений (8), (9), обозначим через $Q_*(\theta)$ и систему запишем в виде,

$$Q_*(\theta)\lambda = -F_*(\theta), \quad \lambda \in R^{n(m+1)}, \qquad (10)$$

где:

$$F_*(\theta)=\begin{pmatrix} -d+C_0X(T)\int\limits_{\theta_m}^{T}X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau+\sum\limits_{j=1}^{m+1}\int\limits_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}M(t)X(t)\int\limits_{\theta_{j-1}}^{t}X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau dt \\ X(\theta_1)\int\limits_{\theta_0}^{\theta_1}X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ X(\theta_m)\int\limits_{\theta_{m-1}}^{\theta_m}X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \end{pmatrix}.$$

Как видно из уравнений (8), (9), коэффициенты и правая часть системы (10) находятся как решение матричных и векторных задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt}=A_0(t)z+A_i(t)\,,\quad t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ i=\overline{0,m},\ \ z(\theta_{r-1})=0,\ \ r=\overline{1,m+1}, \tag{11}$$

$$\frac{dz}{dt}=A_0(t)z+f(t)\,,\quad t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ \ z(\theta_{r-1})=0,\ \ r=\overline{1,m+1}. \tag{12}$$

Решение системы (10) вектор $\lambda^*=\left[Q(\theta)\right]^{-1}F(\theta)$, где $\lambda^*\in R^{n(m+1)}$ состоит из значений решений исходной задачи (1), (2) в начальных точках подинтервалов, т.е. $\lambda_r^*=x^*(\theta_{r-1})$, $r=\overline{1,m+1}$. Если известно $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_{m+1}^*)$ - решение системы (10), тогда решение задачи Коши

$$\frac{dx^*}{dt}=A_0(t)x^*+\sum_{j=1}^{m}A_j(t)\lambda_{j+1}^*+f(t),\quad t\in[\theta_{r-1},\theta_r),$$

$$x^*(\theta_{r-1})=\lambda_r^*,\quad r=\overline{1,m+1},$$

записывается в следующей аналитической форме

$$x^*(t)=X(t)X^{-1}(\theta_{r-1})\lambda_r^*+X(t)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}X^{-1}(\tau)\left[\sum_{j=1}^{m}A_j(\tau)\lambda_{j+1}^*+f(\tau)\right]d\tau,$$

$$t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\quad r=\overline{1,m+1}, \tag{13}$$

значение функции $x^*(t)$ на правом конце $t=T$ имеет вид

$$x^*(T)=X(t)X^{-1}(\theta_m)\lambda_{m+1}^*+X(t)\int\limits_{\theta_m}^{t}X^{-1}(\tau)\left[\sum_{j=1}^{m}A_j(\tau)\lambda_{j+1}^*+f(\tau)\right]d\tau. \tag{14}$$

Таким образом, в этом случае получаем решение линейной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечным интегральным условием (1), (2) в аналитической форме (13), (14).

В качестве иллюстрации вышеизложенного алгоритма рассмотрим следующий пример.

Пример. На $[0,T]$ рассмотрим линейную краевую задачу для системы нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечным интегральным условием

$$\frac{dx}{dt}=A_0(t)x+A_1(t)x(\theta_1)+f(t),\quad t\in(0,T), \tag{15}$$

$$B_0x(0)+B_1x(\theta_1)+B_2x(T)+\int\limits_0^T M(t)x(t)dt=d,\quad d\in R^2,\quad x\in R^2, \tag{16}$$

где $T=1$, $\theta=1/2$, $A_0=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $A_1(t)=\begin{pmatrix}0 & t\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}-t^2-\frac{5}{4}t\\ -t^2+t-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$, $B_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $M(t)=\begin{pmatrix}2t & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $d=\begin{pmatrix}11/3\\ 1/12\end{pmatrix}$.

В рассматриваемой задаче фундаментальной матрицей дифференциальной части уравнения (15) является $X(t)=\begin{pmatrix}1 & e^{2t}\\ -1 & e^{2t}\end{pmatrix}$.

Дополнительные параметры λ_r, $r=1,2$, введем как значения решения в начальных точках подинтервалов: $\lambda_1=x(0)$, $\lambda_2=x(1/2)$, и произведем замену через $u_1(s)=x(s)-\lambda_1$, $s\in[0,1/2)$, $u_2(s)=x(s)-\lambda_2$, $s\in[0,1/2)$. Тогда получим

$$u_1(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{2t}-1\right) & \frac{1}{2}\left(e^{2t}-1\right)\\ \frac{1}{2}\left(e^{2t}-1\right) & \frac{1}{2}\left(e^{2t}-1\right)\end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\left(e^{2t}-1-2t\right) & \frac{1}{8}\left(e^{2t}-1-2t+2t^2\right)\\ \frac{1}{4}\left(e^{2t}-1+2t\right) & \frac{1}{8}\left(e^{2t}-1-2t-2t^2\right)\end{pmatrix}\lambda_2+$$

$$+\begin{pmatrix}-\frac{1}{16}\left(t^2-29t-\frac{29}{2}+\frac{29}{2}e^{2t}\right)\\ -\frac{1}{16}\left(-17t^2+11t-\frac{29}{2}+\frac{29}{2}e^{2t}\right)\end{pmatrix},\quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right),$$

$$u_2(t)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\left(2-3e^{2t-1}+2t\right) & \frac{1}{16}\left(-11+12e^{2t-1}+4t^2-4t\right)\\ \frac{1}{4}\left(-4+3e^{2t-1}+2t\right) & -\frac{1}{16}\left(9-12e^{2t-1}+4t^2+4t\right)\end{pmatrix}\lambda_2+$$

$$+\begin{pmatrix}-\frac{1}{16}\left(t^2-29t-\frac{27}{4}+21e^{2t-1}\right)\\ \frac{1}{16}\left(17t^2-11t+\frac{89}{4}-21e^{2t-1}\right)\end{pmatrix},\quad t\in\left[\frac{1}{2},1\right],$$

Краевое условие и условия импульсного воздействия решения при $t=1/2$ приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно параметров:

$$\begin{pmatrix}\frac{11}{8} & \frac{1}{8} & \frac{101}{48}-\frac{3}{8}e & \frac{31}{192}-\frac{3}{8}e\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e & 1+\frac{1}{4}e & -\frac{3}{8}-\frac{1}{4}e & \frac{247}{96}-\frac{5}{16}e\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e & -\frac{3}{2}+\frac{1}{4}e & -\frac{3}{16}+\frac{1}{8}e\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e & \frac{1}{4}e & -\frac{21}{16}+\frac{1}{8}e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{11}\\ \lambda_{12}\\ \lambda_{21}\\ \lambda_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3511}{768}-\frac{21}{32}e\\ -\frac{161}{384}-\frac{13}{64}e\\ -\frac{115}{64}+\frac{29}{32}e\\ -\frac{53}{64}+\frac{29}{32}e\end{pmatrix}.$$

Отсюда найдем значения параметров, которые обозначим через $\lambda^*_{i,j}$, $i,j=1,2$,

$\lambda_{11}^{*}=1$, $\lambda_{12}^{*}=0$, $\lambda_{21}^{*}=\dfrac{3}{2}$, $\lambda_{22}^{*}=\dfrac{1}{4}$.

Тогда единственное решение $x^{*}(t)$ задачи (15), (16) определяется с помощью формы (13), (14) в следующем виде:

$$x^{*}(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & e^{2t}\\ -1 & e^{2t}\end{pmatrix}\int_{0}^{t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\tau\\ -\frac{1}{2}\left(1+2\tau^{2}\right)e^{-2\tau}\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}t+1\\ t^{2}\end{pmatrix},\quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right),$$

$$x^{*}(t)=\begin{pmatrix}\frac{5}{8}+\frac{7}{8}e^{2t-1}\\ -\frac{5}{8}+\frac{7}{8}e^{2t-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & e^{2t}\\ -1 & e^{2t}\end{pmatrix}\int_{\frac{1}{2}}^{t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\tau\\ -\frac{1}{2}\left(1+2\tau^{2}\right)e^{-2\tau}\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}t+1\\ t^{2}\end{pmatrix},\quad t\in t\in\left[\frac{1}{2},1\right],$$

В этом примере нам удалось построить фундаментальную матрицу дифференциальной части рассматриваемого обыкновенного дифференциального уравнения. Алгоритм метода параметризации позволил построить решение задачи (15), (16) в явном виде.

Литература:

1. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги грунтовых вод // Дифференц. уравнения, 1982. - Т. 18. -№ 1. - С. 72-81.
2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. -М.: Наука, 2012. -232 с.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа,1995. – 205 с.
4. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2004. - Т. 44. № 9. - С. 1585-1595.
5. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении задач оптимального управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Ж. вычисл. матем. и математической физики. - 2012. - Т. 52. № 12. - С. 2163-2177.
6. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 2014. - Т. 54. № 7. - С. 1096-1109.
7. Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On Numerical Solution to Loaded Systems of Ordinary Differential Equations with Non-separated Multipoint and Integral Conditions // Numerical Analysis and Applications. - 2014. - Vol. 17. -№ 1. - P. 1-16.
8. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 1989. - Т. 29. № 1. - С. 50-66.
9. Иманчиев А.Е. Необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной многоточечной краевой задачи // Известия МОН РК, НАН РК. Серия физико-математическая. - 2002. № 3. - С. 79-84.
10. Бакирова Э.А. О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер. физ-матем. - 2005. № 1. - С. 95-102.

11. Кадирбаева Ж.М. Об однозначной и корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Матем. журнал МОН РК. - 2009. - Т. 9. № 4. - С. 63-71.

12. Кадирбаева Ж.М., Кабдрахова С.С. О разрешимости линейной краевой задачи с многоточечным интегральным условием для нагруженных дифференциальных уравнений при импульсном воздействии // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. - 2016. № 1(305). – С. 178-189.