УДК. 378.14

Салыков С., Тологожоева Н., Салыкова Н.
К.Тыныстанов ат. ЫМУ

ТАР БУРЧТУН ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРЫН ОКУТУУНУН АЙРЫМ МАСЕЛЕЛЕРИ

Мектеп математикасынын маанилүү бөлүмдөрүнүн бири болгон тригонометриялык функцияларды жана ага байланыштуу болгон негизги теңдештиктерди окутуунун технологияларын жана өздөштүргөн маалыматтарды үзгүлтүксүз пайдалануунун жолдорун тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын мисалында көрсөтүүгө аракет жасалды.

Традиция боюнча тар бурчтун тригонометриялык функцияларын окуп-үйрөнүү мектеп планиметриясында, ал эми каалагандай бурчтун тригонометриялык функциясынын негизги касиеттери 9-класстын алгебра жана 10-11-класстардын алгебра жана анализдин башталышы курсунда ишке ашырылып келүүдө. Окутуу практикасы жана атайы изилдөөлөр көрсөткөндөй [2],[4], 8- класстын окуучулары окуу жылынын башында тар бурчтун тригонометриялык функциялары жөнүндө алган билимдери андан ары өтө сейрек колдонулуп, натыйжада, бөлүмдүн көп фактылары алардын эстеринде өтө бүлбүлдөгөн абалда сактала турганы белгилүү.

Бөлүмдүн программадагы мазмунуна токтолсок, котормо окуу китебинен (А.В.Погорелов Геометрия 7-11-класстары үчүн окуу китеби. - Бишкек, 2005) айырмаланып, белгилүү окумуштуулар И.Бекбоев, А.Бөрүбаев, А.Айылчиев тарабынан даярдалган 7-9-класстардын геометрия боюнча окуу китебинде [1, 113-121] төртүнчү негизги тригонометриялык функция катарында котангенске да тар бурчка жанаша жаткан катеттин карама–каршы жаткан катетке болгон катышы катарында аныктама берилип, ага тиешелүү бир катар теңдештиктер сунушталганын белгилөө зарыл. Котормо окуу китеби сыяктуу эле [1], окуу китебинде бурчтун косинусу ал бурчтун чоңдугунан гана көз каранды экендиги жөнүндөгү теорема (бул теоремадан натыйжа катарында калган тригонометриялык функциялар да бурчтун чоңдугуна гана көз каранды боло тургандыгы келип чыгаары кийинчерээк эскертилет) синтез методу менен далилденип берилет. Кыргыз авторлорунун окуу китебинде котормо окуу китебинен айырмаланып, бардык тригонометриялык функциялар биринчи эле темада берилип, ушуну менен убакыт үнөмдөөгө да, окуу материалынын көлөмүн азайтууга да мүмкүнчүлүк түзүлгөн [1]. Окуу китебинде окуучулар үчүн чоочун болгон терминдерге да түшүндүрмө берилип, этимологиялык так маалыматтарга ээ болууга да окуучуларга мүмкүнчүлүктөр ачылганын айта кетүү абзел. Мисалы, синус деген термин латын тилинен «Ийрилик, ийүү» дегенди билдире турганы ж.б. этимологиялык маалыматтар берилген. Негизги тригонометриялык теңдештиктер Пифагордун теоремасын колдонуу менен негизделсе, ал теореманын өзү тар бурчтун косинусунун аныктамасынан келип чыккан катыштарды теңдеш өзгөртүп түзүү менен далилденип берилет.

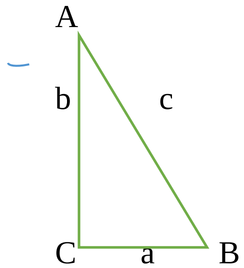
Кыргыз авторлорунун окуу китебиндеги эң маанилүү айырмачылык катарында, окуу материалдарынын прикладдык-практикалык маанисин ачып көрсөтүү максатында тик бурчтуу үч бурчтуктарды чыгарууда, жарым кылымдан ашык убакыттан бери мектеп математикасынын ар түрдүү бөлүмдөрүн окутууда кеңири колдонууга ээ болгон, белгилүү окумуштуу-методист В.М.Брадистин “Төрт орундуу” математикалык таблицаларын колдонуу менен тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын маанилерин табууга байланыштуу болгон билгичтикти калыптандырууга да атайын темада көңүл бурулган. Мисалы, $\sin 38^0 30^1 = 0{,}6225$ боло турганын таблицаны пайдалануу менен негизделип көрсөтүлгөн.

Тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын аныктамалары, негизинен, функциянын тигил же бул берилген мааниси боюнча тар бурчту (демек, тик бурчтуу үч бурчтукту) түзүүгө берилген көбүнчө тренировкалык жана айрымдары чыгармачылык менен иштөөнү талап кылган көнүгүүлөр аркылуу бышыкталат. Мисалы, 3-көнүгүү [1,115] тар бурчтун синусу $\frac{1}{2}$ге барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтукту түзүүнү сунуштайт. Мындай үч бурчтук тар бурчу 30^0 ка, ал эми ага каршы жаткан катети гипотенузанын жарымына барабар боло турган тик бурчтуу үч бурчтук экендиги жөнүндөгү корутундуга окуучулар өз алдынча жетүүгө тийиш.

$\mathrm{Sin}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha$ сыяктуу негизги теңдештиктер менен бирге эле $\cos\left(90^0 - \alpha\right) = \sin\alpha,\quad \sin\left(90^0 - \alpha\right) = \cos\alpha$ формулалары да аналитикалык жол менен, тиешелүү функциялардын аныктамаларына таянуу менен негизделип берилген.

Бөлүмдүн аягында (котормо окуу китебинен айырмаланып) тригонометриялык функцияларынын аныктамаларына жана Пифагордун теоремасына таянуу менен тик бурчтуу үч бурчтукту чыгаруунун төрт учуру (эки катет, гипотенуза жана катет, бир катет жана тар бурчтарынын бири, гипотенуза жана тар бурчу боюнча калган белгисиз элементтерин табуу) каралып, тиешелүү көнүгүүлөр сунушталган. Мындай көнүгүүлөрдө адетинче, сызыктуу жана бурчтук чоңдуктар белгилүү жана изделүүчү катарында берилип, тик бурчтуу жана тең капталдуу үч бурчтуктар, ошондой эле ромб менен чектелүүгө туура келет.

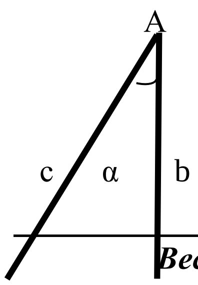
Тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын аныктамаларын кийирүүдө проблемалык окутуунун элементин колдонуу аркылуу окуучулардын ой жүгүртүүсүн активдештирүү максатында, тик бурчтуу үч бурчтуктун сызыктуу өлчөмдөрүнө тиешелүү болгон бардык катыштарды чиймедеги белгилөөгө таянуу менен жазып чыгууну сунуштоого болот:



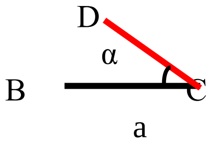
$\frac{b}{c}$, $\frac{a}{c}$; $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$; $\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a}$

Окуучулар бул катышты жазып чыгышкандан кийин, алгачкы төрт катыш математикада өтө маанилүү болуп, аларды өзгөчө термин, символдор менен белгилөө кабыл алынганына окуучулардын көңүлүн буруу менен, $\frac{b}{c} = cos\alpha$, $\frac{a}{c} = sin\alpha,$ $\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\alpha$, $\frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\alpha$ аныктамаларын берүү максатка ылайык.

Жогоруда келтирилген тригонометриялык функциялар жөнүндөгү окуу материалдарын мисалдарды чыгарууда, ошондой эле теоремаларды далилдөөдө кеңири (өз убагында) пайдалануу менен бул багытта окуучулардын билимдеринин бекем болушуна жетише алабыз. Бул максатта тик бурчтуу үч бурчтуктун элементтеринин ортосундагы катыштарды изилдөөнү колдонууга мүмкүн экенин көрсөтөлү [4]. Чиймедеги АВС үч бурчтугунда



$\angle C = 90^0$, СД $\perp$ АВ,



AC = в, BC= a, AB = c

СД ⊥ АВ аркылуу Δ АДС жана Δ ВДС үч бурчтуктары пайда болот. α бурчу үч үч бурчтукта тең кездешип, натыйжада, ар бир тригонометриялык функциялар үч ар түрдүү катыштар менен, чиймеде белгиленген элементтер аркылуу таблицада көрсөтүлгөндөй туюнтулат.

(СД ны h, ВД ны a^1, АД ны b´ аркылуу белгилейли.)

Үч бурчтуктар	sinα	cosα	tgα	ctgα
ABC	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
АСД	$\frac{h}{b}$	$\frac{b^1}{b}$	$\frac{h}{b^1}$	$\frac{b^1}{h}$
ВСД	$\frac{BD}{a}=\frac{a^1}{a}$	$\frac{h}{a}$	$\frac{a^1}{h}$	$\frac{h}{a^1}$

Берилген үч тригонометриялык функциялардын маанилеринен барабардыктарды түзүп, a, b, c,a^1, b^1, h чоңдуктарынын арасындагы пропорциялаш көз карандылыктарга ээ болобуз:

$$\frac{a}{c}=\frac{a^1}{a},\quad \frac{b}{c}=\frac{b^1}{b},\quad \frac{h}{b^1}=\frac{a^1}{h}$$

Бул барабардыктарды теңдеш өзгөртүп түзүү менен төмөнкүдөй барабардыктарга келебиз:

$a^2=ca^1,\quad b^2=cb^1,\quad h^2=a^1b^1$ (1)

Бул барабардыктар тик бурчтуу үч бурчтугунда катеттеринин квадраты гипотенуза менен ошол катеттин гипотенузага болгон проекциясынын көбөйтүндүсүнө, ал эми гипотенузага түшүрүлгөн бийиктик катеттердин гипотенузадагы проекцияларынын орто геометриялыгына барабар экендиги жөнүндөгү теоремаларды туюнтуп турат.

Ал эми sinα үчүн түзүлгөн $\frac{a}{c}$ *жана* $\frac{h}{b}$ эки туюнтмаларды барабарлап, $ab=ch$ деген, б.а., катеттердин көбөйтүндүсү гипотенуза менен ага түшүрүлгөн бийиктиктин көбөйтүндүсүнө барабар деп окула турган геометриялык мисалдарды чыгарууда пайдалуу болгон катнашты алабыз (бул катыш кийинки класстарда берилип, көп байкалбай да калары белгилүү).

Жогоруда келтирилген көз карандылыктар салт боюнча фигуралардын окшоштугу өтүлгөндөн берилип, натыйжада, окуучулардын билимдеринин оперативдүү болушуна терс таасирин тийгизип келүүдө. Демек, тик бурчтуу үч бурчтуктун элементтеринин ортосундагы закон ченемдүүлүктөрдү бир далай убакытка эрте берүү менен окуучулардын математика боюнча билимдеринин деңгээлинин жогорулашына шарт түзгөн болобуз.

(1)барабардыктардын биринчи экөөнү мүчөлөп кошуу менен, теңдеш өзгөртүп түзүү аркылуу $a^2=b^2+c^2$ деген Пифагордун теоремасын далидөөнүн дагы бир жолун көрсөтүп коюуга болот. Андан ары бул барабардыктан негизги тригонометриялык теңдештикке

$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$ $же sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$ келебиз.

Акыркы барабардык sinα, cosα функцияларынын бири боюнча экинчисинин, ал эми ал формулага tgα = sinα: $cos\alpha$, ctgα = cosα: $sin\alpha$ барабардыктарын кошуп пайдалансак sin, cos, tg, ctg функцияларына биринин мааниси боюнча калгандарынын маанисин табууга мүмкүнчүлүк пайда болот. Функциялардын маанилерин эсептөөнү уюштурууда интерактивдик төмөнкүдөй ыкманы колдонууга болот. Чакан топ түзүү менен, алардын бирине, маселен, sinα нын, экинчисине cosα нын д.у.с. мааниси боюнча таблицаны же микрокалькуляторду колдонуу менен калган функциялардын маанилерин табууну сунуштап, натыйжасын презентациялоо аркылуу текшерүүнү ишке ашырса болот.

(1) барабардыктар (же таблица) кийинчерээк туура кең бурчтуктарды өтүүдө да окуучуларга тиешелүү окуу материалдарын сапаттуу өздөштүрүүгө жардамдашмакчы. Радиусу R болгон айланага, тиешелүү түрдө, ичтен жана сырттан сызылган туура көп бурчтуктардын жактарын $a_n жана\ b_n$ аркылуу белгилесек,

$a_n=2\mathrm{R}\ \sin\frac{180^0}{n}$, $b_n=2\mathrm{Rtg}\frac{180^0}{n}$ (2) формулалар алынат.

([1] окуу китебинде бул теоремалар далилдөөгө маселе катарында берилгенин белгилеп кетели [1,135]).

(2) барабардыктарды пайдалануу менен a_3, b_3, a_4, b_4, a_6, b_6 маанилерин оңой эле табууга болот. (Чакан топторго ар түрдүү жолдорду колдонуу менен далилдөөнү жүргүзүүнү сунуштоого болот). (2) теңдештиктерден $\frac{180^0}{n}$ бөлчөгүн тиешелүү туюнтма менен алмаштырып, b_n ди a_n жана R аркылуу туюнта турган формуланы, өз алдынча изилдөөнү класска фронталдык тапшырма катарында берүүгө болот. Ал үчүн $a_n=2\mathrm{R}\ \sin\frac{180^0}{n}$ формуласына $sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$ барабардыгын колдонуу менен, алынган $cos\frac{180^0}{n}=\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4\mathrm{R}^2}}$ теңдештигин коюу менен окуучулар байкашат. Эми $b_n=2\mathrm{Rtg}\frac{180^0}{n}$ барабардыгын жана $\mathrm{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{cos\varphi}$ теңдештигин пайдалануу менен

$b_n=\frac{2\mathrm{R}\ \sin\frac{180^0}{n}}{\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4\mathrm{R}^2}}}=\frac{a_n}{\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4\mathrm{R}^2}}}$ формуласын теңдеш өзгөртүп түзүү аркылуу алышат. Ошол эле (2) формулалар$360^0\mathrm{R}\ \sin 1^0$ жана $360^0\mathrm{R}\ tg\,1^0$ деген айланага ичтен жана сырттан сызылган туура 180 – бурчтуктун периметрин билдире турган туюнтмаларды алууга да мүмкүндүк берет.

Мына ошентип, тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын аныктамаларына жана алардын натыйжаларын ылайыгы менен пайдалануу аркылуу, бул бөлүмдүн негизги окуу материалдарын мектеп планиметрия курсунун аягына чейин колдонууну ишке ашыра алабыз. Натыйжада, окуучулардын тригонометриялык функциялар жөнүндөгү алгачкы билимдеринин бекем болушуна жетишүүгө болот.

Кийинки темаларда каалагандай үч бурчтуктун элементтеринин ортосундагы көз карандылыктарды окуп үйрөнүү толук болуш үчүн кең бурчтун тригонометриялык функциялар жөнүндөгү маалыматтарды дагы берүүгө туура келет. Чындыгында эле, тар бурчтун функциялары менен чектелиш үчүн үч бурчтуктун бир жагынын квадратын калган эки жагынын жана алардын арасындагы бурчу боюнча табууга мүмкүндүк берүүчү теореманын жекече учуру үчүн кароого аргасыз болмокпуз. Тиешелүү аныктамалар $\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha$ формулалары менен бериле турганы белгилүү. Андан ары $\sin 0^0=\sin 180^0=0$, $\cos 90^0-0$ $\sin 90^0=1$, $\cos 0^0=1$, $\cos 180^0=-1$.

Котормо окуу китебинен айырмаланып, кыргыз авторлору китебинде тригонометриялык функциялардын жалпыланган аныктамаларын берүүгө координаттык методду ийгиликтүү колдонгонун белгилейли. Мындай жалпылоолордон кийин классикалык болуп калган синустар жана косинустар теоремасын далилдөөгө болот. Косинустар теоремасын далилдөөдө окуу китебинен айырмаланган төмөндөгүдөй жолду дагы колдонууга болот. Ал үчүн төмөндөгүдөй алдын–ала негизделип көрсөтүлгөн формулаларды a = b · cosC + c· cosB, b = a· cosC + c · cosA, c= a · cosB + b · cos A колдонобуз. Бул формулаларды бириктирип, cosA, cosB, cosC карата сызыктуу бир тектүү эмес, ал эми a,b,c ларга карата сызыктуу бир тектүү болгон үч теңдемени алабыз. Косинустарды белгисиз катарында кабыл алып, системаны чыгаруу менен төмөндөгүдөй формуланы алабыз.Cosc $=\frac{а^2+в^2-с^2}{2ав}$Андан ары аналогия методун колдонуп, калган эки формуланы алабыз.

Адабияттар:

1. Бекбоев И.Б. ж.б. Геометрия. Орто мектептин 7-9-кл. үчүн окуу китеби. - Б.: Педагогика, 2000.
2. Бекбоев И.Б., Салыков С.С. ж.б. Геометрияны 7-9-класстарда окутуу: Мугалимдер үчүн методикалык колдонмо. - Б.: Педагогика, 2003.
3. Бекбоев И.Б. ж.б. Жалпы билим берүүчү мектептер үчүн программа. Математика 5-11-кл. - Б.: Педагогика, 2003.
4. Дубнов Я.С. Беседа о преподавании математики. – М.: Просвещение, 1965.
5. Мишин В.И. Методика преподавания математики: Частная методика. - М.: Просвещение, 1987.