

УДК 624.012 (575.2) (04)

## ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА МНОГОСЛОЙНОЙ БАЛКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

**А.Г. Шубович** – соискатель,  
**М.Д. Кутуев** – докт. техн. наук, профессор,  
**Г.М. Садыков** – канд. техн. наук, доцент

In clause examples of use a spline – functions for visualization and the analysis of change of a bend of multilayered designs under action of cross-section loading without longitudinal effort, a power method with application of method Ritz are considered.

В настоящее время разработан целый ряд концепций создания многослойных конструкций. Появление технологий производства многослойных конструкций и повышенные требования к их конструктивным и эксплуатационным свойствам требуют разработки новых прикладных методов расчета, отличающихся от классических методик [1]. В ряде современных методик расчета многослойных конструкций основной упор делается на использовании сплайн-функций, позволяющих более точно описать поведение многослойной конструкции. Новые компьютерные технологии только усиливают возможность применения интерполяции в разработке новых методик. Это не единичный пример применения сплайн-функций в научных исследованиях, проводимых в строительной механике. Многие авторы в своих работах используют сплайн-функции для численных расчетов [2, 3].

В данном примере рассматривается использование программного пакета MATLAB [4] для построения сплайн-функций, рассчитывающих прогиб неподвижно закрепленной с двух сторон многослойной балки под действием синусоидальной поперечной нагрузки без

продольного усилия энергетическим методом Ритца [5] (рис. 1).

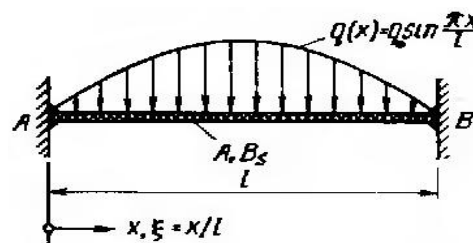


Рис. 1. Жестко закрепленная с двух сторон многослойная балка.

Вследствие симметрии системы и нагрузки относительно середины пролета полный прогиб многослойной балки равен  $w = w_M + w_S$ , где  $w_B = w_M$  и  $w_S = w_Q$ . Согласно методу Ритца, основанного на минимизации потенциальной энергии [4] и использования отдельных прогибов  $w_M$  и  $w_Q$  можно минимизировать потенциалы  $\Pi_M$  и  $\Pi_Q$  по отдельности. При минимизации  $\Pi_M$  учитывается, что нагрузка действует посередине балки  $x = l/2$ , следовательно, для симметричной части изгиба  $w_M$  выбирается симметричное выражение ряда:

$$w_M(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cdot w_{Mj}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cdot \left( 1 - \cos\left(\frac{2 \cdot j \cdot \pi \cdot x}{l}\right) \right) \quad (1)$$

Функции сравнения  $w_{Mj} = 1 - \cos\left(\frac{2 \cdot j \cdot \pi \cdot x}{l}\right)$

при  $(j = 1, 2, 3, \dots)$  выполняют все граничные условия:  $w_M(0) = 0$ ;  $w_M(l) = 0$ ;  $w'_M(0) = 0$ ;  $w'_M(l) = 0$ .

Подстановка (1) в  $\Pi_M$ , согласно  $\Pi_M = W_M + U_M$ , и приравнивание к нулю частных производных  $\Pi_M$  по неизвестным постоянным  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) дает для них следующую систему уравнений:

$$B_S \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \alpha_j \int_0^l w''_{Mj} \cdot w''_{Mk} dx \right] - \int_0^l q \cdot w_{Mk} dx = 0 \quad (2)$$

После выполнения математических операций подстановки и интегрирования с использованием метода Рунге над уравнениями (1) и (2) получаем выражение для отдельного изгиба  $w_M$ :

$$w_M = \frac{q_0 \cdot l^4}{\pi^4 \cdot B_S} \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1/\pi}{j^2 \cdot (4 \cdot j^2 - 1)} \cdot (1 - \cos(2 \cdot j \cdot \pi \cdot \xi)) \quad (3)$$

где  $\xi = \frac{x}{l}$  – безразмерная координата. График изменения отдельного прогиба  $w_M$  в зависимости от смещения точки нагрузки от начала многослойной балки к ее концу, построен по результатам (3) (рис. 2) – графики расчетов с

помощью функций MATLAB (рассчитанного (a) – стандартными функциями и (b) – сплайн-функцией).

Выражение для отдельного прогиба  $w_Q$  следует из (3) и посредством интегрирования уравнения

$$B_S \cdot w_Q''' + A \cdot w_Q' = 0 \quad (4)$$

и с учетом граничных условий  $w_Q(0) = w_Q(l) = 0$  имеет следующий вид:

$$w_Q = \frac{q_0 \cdot l^2}{\pi^2 \cdot A} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4/\pi}{4 \cdot j - 1} \cdot (1 - \cos(2 \cdot j \cdot \pi \cdot \xi)) \quad (5)$$

Изменения отдельного прогиба  $w_Q$  многослойной балки по всей ее длине и результаты вычисления выражения, описывающего изменение отдельного прогиба (5), были визуализированы с использованием программного пакета MATLAB. Для этого были использованы сплайн-функция, позволяющая визуализировать результаты вычислений, и стандартные функции трехмерной визуализации (рис. 3).

Для получения данных визуализации была сформирована матрица, описывающая поверхность многослойной балки, на которую действует нагрузка. Результаты вычисления значений прогиба были записаны в эту матрицу, рассчитаны и визуализированы в трехмерном пространстве с помощью кубической сплайн-функции. Полный прогиб  $w$  получается путем сложения отдельных прогибов  $w = w_M + w_Q$  согласно уравнениям (3) и (5).

Результаты визуализации расчетных данных с использованием программного пакета MATLAB показаны на рис. 4, где (b) – график, построенный с использованием кубического сплайна.

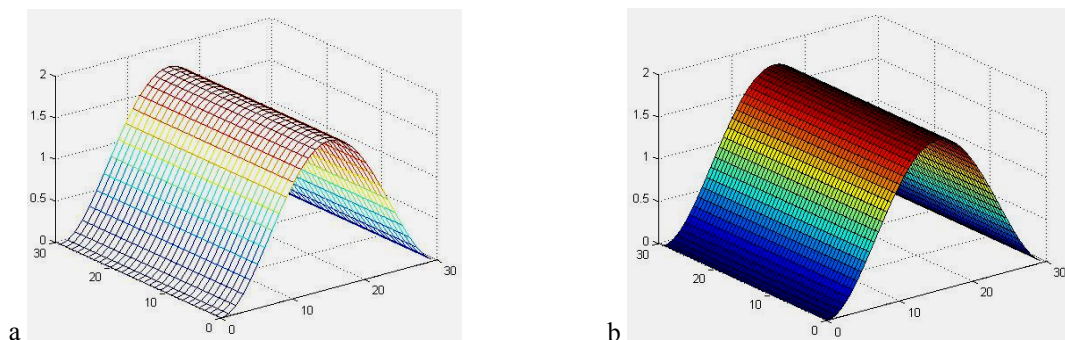


Рис. 2. График изгиба  $w_M$ .

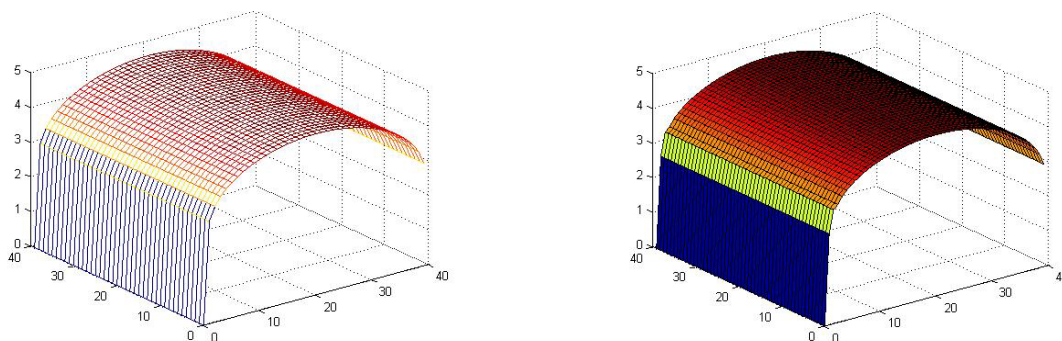


Рис. 3. График изгиба  $w_Q$ .

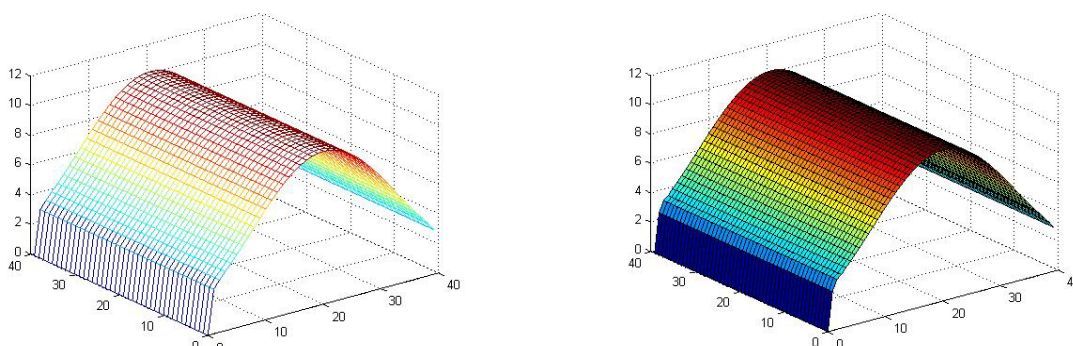


Рис. 4. График изгиба  $w$ .

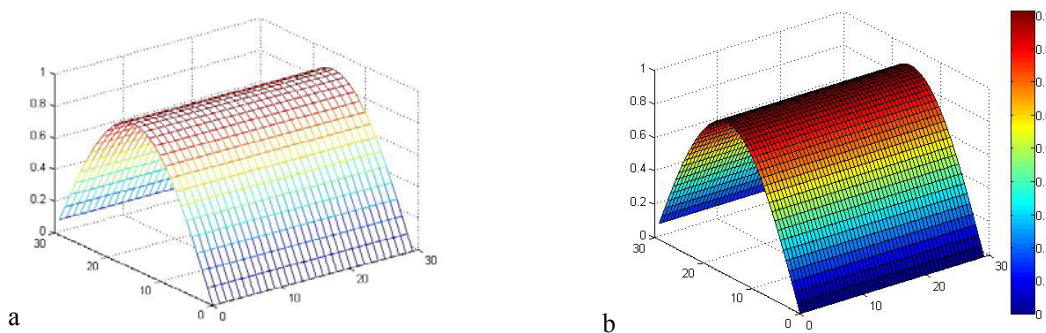


Рис. 5. График изгиба  $w_Q$ .

Следующий шаг – минимизирование  $\Pi_Q$ . Для прогиба  $w_Q$  выбирается симметричный относительно центра многослойной балки  $x = l/2$  ряд:

$$\begin{aligned} w_Q(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot w_{Qj}(x) = \\ &= \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} b_j \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{l}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

Функции сравнений  $w_{Qj} = \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{l}\right)$

при  $j = 1, 2, 3, \dots$  выполняют граничные условия  $w_Q(0) = 0$  и  $w_Q(l) = 0$ . Подстановка (6) в  $\Pi_Q$ , согласно  $\Pi_Q = W_Q + U_Q$ , и приравнивание к нулю частных производных от  $\Pi_Q$  по неизвестным постоянным  $b_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) дает для них следующую систему уравнений:

$$A \cdot \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \left[ b_j \cdot \int_0^l w'_{Qj} \cdot w'_{Qk} dx \right] - \int_0^l q \cdot w_{Qk} dx = 0$$

В результате преобразования раздельный прогиб  $w_Q$  будет равен

$$w_Q = \frac{q_0 \cdot l^2}{\pi^2 \cdot A} \cdot \sin(\pi \cdot \xi) \quad (7)$$

По расчетам выражения (7) выстраивается график раздельного прогиба  $w_Q$  (рис. 5).

Прогиб от изгиба  $w_M$  следует из  $w_Q$ , согласно (6). При трехразовом интегрировании (4) и граничных условиях  $w(0) = w(l) = 0$  и  $w'_M(0) = w'_M(l) = 0$  решение имеет вид

$$w_M = \frac{q_0 \cdot l^4}{\pi^4 \cdot B_S} \cdot (\sin(\pi \cdot \xi) + \pi \cdot \xi^2 - \pi \cdot \xi) \quad (8)$$

График изменения прогиба  $w_M$ , построенный по расчетным данным выражения (7), по-

лучен при использовании программного пакета MATLAB (рис. 6). Полный прогиб  $w$  получается путем суммирования раздельных прогибов  $w_M$  и  $w_Q$  согласно уравнениям (7) и (8). График вычисления полного прогиба  $w$  с использованием кубической сплайн-функции показан на рис. 7. В случае, описанном выше, наиболее приемлемым методом графического представления математической модели изгиба многослойной балки является подход, основанный на использовании сглаживающих кубических сплайн-функций.

Существуют два вида сплайн-функций: интерполяционные сплайны и сглаживающие сплайны. Интерполяционные сплайны целесообразно использовать только в случае, если требуется высокая точность результатов. Применение сглаживающих сплайнов лучше всего подходит при построении математических моделей и анализе изменения механических характеристик, когда не требуется высокая точность результата.

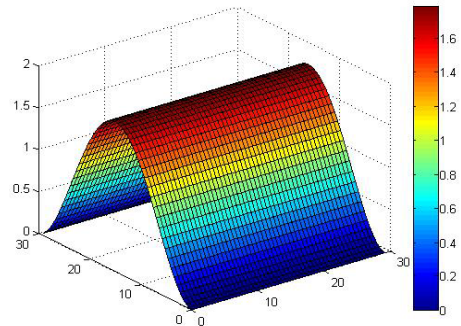
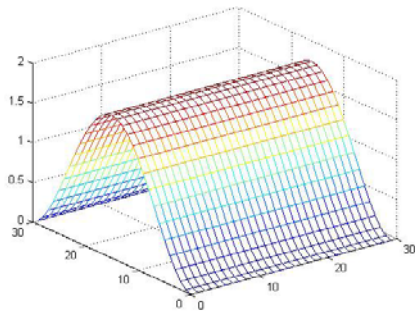


Рис. 6. График изгиба  $w_M$ .

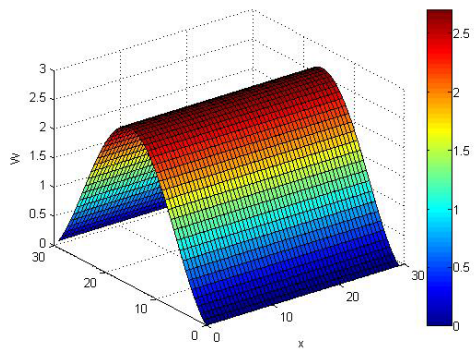
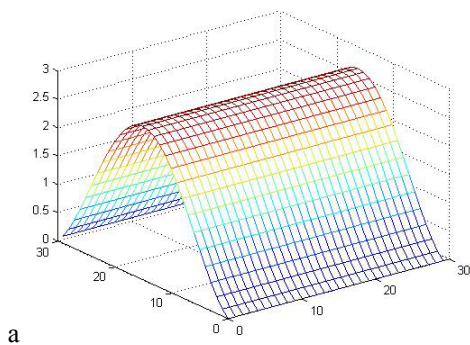


Рис. 7. График изгиба  $w$ .

При создании математической модели изгиба многослойной балки, рассчитанной с применением энергетического метода, использовались кубические сплайн – функции, вложенные в программный пакет MATLAB. Визуализация данных, полученных в результате применения кубических сплайн-функций в виде трехмерного изображения, показывает наиболее качественную картину изменения величины прогиба вдоль многослойной балки, а с помощью цветовой палитры, расположенной справа от графика, возможен количественный анализ изменения прогиба.

#### Литература

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Ешпулатов С.Е. Моделирование оптимальных решений задач строительной механики с использованием новых информационных технологий: Автореф. дисс.... – Бишкек, 2006. – 24 с.
3. Кутуев М.Д., Куканова Р.А. Анализ геометрически нелинейных задач изгиба балок // Известия вузов. – 2006, №3-4. – Бишкек. – С. 3–11.
4. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.
5. Штамм К., Витте Х. Многослойные конструкции. – М.: Стройиздат, 1983. – 300 с.
6. Кутуев М.Д., Шубович А.Г. Новые возможности конструирования многослойных балок // Известия вузов. – 2006. – №5–6. – С. 63–67.
7. Кутуев М.Д., Шубович А.Г. Применение новых информационных технологий в инженерно-строительной практике: Мат. VI межд. научн.-практич. конф. – Томск, 2007. – Ч. 1 – С. 103–106.
8. Кутуев М.Д., Шубович А.Г. Изгиб многослойной балки // Известия вузов. – 2007. – №1–2. – С. 140–145.