УДК 517.926

ПРЯМОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

А.Б. Урдалетова, С.К. Кыдыралиев

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений при изучении линейных систем обычно изучают метод Леонарда Эйлера (1707–1783), основанный на использовании характеристических чисел матрицы коэффициентов системы, и, иногда, метод интегрируемых комбинаций Жана Лерона Даламбера (1717–1783). Объединение этих методов, предполагающее использование характеристических чисел для получения интегрируемых комбинаций, как показано в работах авторов статьи, порождает эффект синергии – позволяет существенно упростить процесс решения. В данной работе показано, как с помощью метода Эйлера–Даламбера можно решать задачу интегрирования линейных систем с переменными коэффициентами.

Ключевые слова: системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений; интегрирование систем уравнений с переменными коэффициентами; уравнения Риккати; интегрируемость в квадратурах; новый метод решения.

СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАЛАРЫН ЖАНА РИККАТИ ТЕҢДЕМЕЛЕРИН ТҮЗ ИНТЕГРАЦИЯЛОО

А.Б. Урдалетова, С.К. Кыдыралиев

Кадимки дифференциалдык теңдемелер курсунда сызыктуу системаларды изилдөөдө көбүнчө системанын коэффициенттеринин матрицасынын мүнөздүү сандарын колдонууга негизделген Леонард Эйлердин (1707-1783) ыкмасын, ал эми кээде Жан Лерон Д›Аламбердин (1717-1783) интегралдык комбинациялар ыкмасын колдонушат. Макаланын авторлорунун эмгектеринде көрсөтүлгөндөй, интегралдык комбинацияларды алуу үчүн мүнөздүү сандарды колдонууну камтыган бул ыкмалардын айкалышы синергетикалык таасирди жаратат - бул чыгаруу процессин олуттуу түрдө жөнөкөйлөтүшү мүмкүн. Бул макалада Эйлер – Даламбер ыкмасынын жардамы менен кантип өзгөрүлмө коэффициенттери бар сызыктуу системаларды интеграциялоо маселесин чыгаруу мүмкүн экендиги көрсөтүлөт.

Түйүндүү сөздөр: кадимки сызыктуу дифференциалдык теңдемелер системалары; өзгөрүлмө коэффициенттүү теңдемелер системаларын интеграциялоо; Риккати теңдемелери; квадратураларда интеграцияланууу; жаңы чыгаруу ыкмасы.

DIRECT INTEGRATION OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS AND RICCATI EQUATIONS

A.B. Urdaletova, S.K. Kydyraliev

In the course of ordinary differential equations in the study of linear systems, usually studied the method of Leonard Euler (1707–1783), based on the use of characteristic numbers of the matrix of the coefficients of the system, and, sometimes, the method of integrable combinations by Jean Leron D'Alembert (1717–1783). The combination of these methods, which involves the use of characteristic numbers to obtain integrable combinations, as shown in the works of the authors of the article, generates a synergy effect – it can significantly simplify the solution process. This paper shows how the Euler–D'Alembert method can be used to solve the problem of integrating linear systems with variable coefficients.

Keywords: systems of linear ordinary differential equations; integration of systems of equations with variable coefficients; Riccati equations; integrability in quadratures; new solution method.

Давно доказано, что не все обыкновенные дифференциальные уравнения, например, уравнения Риккати [1], интегрируемы в квадратурах. Это обстоятельство способствовало бурному развитию методов приближенного решения дифференциальных уравнений. При этом, несмотря на большой прогресс в этом направлении, существенным образом связанный с компьютеризацией, задача определения видов дифференциальных уравнений и их систем, которые можно проинтегрировать в квадратурах, остается достаточно актуальной. В данной работе получено условие, при выполнении которого система второго порядка линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами интегрируема в квадратурах. Результаты получены на основе метода, разработанного авторами [2–4].

1. Рассмотрим линейную систему уравнений вида:

$$\begin{cases} y' = ay + bz + f(x), \\ z' = cy + dz + g(x), \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты a, b, c, d – постоянные числа, а f и g – заданные функции. Характеристическим уравнением системы (1) назовем уравнение

$$\Delta(\lambda) = 0, \tag{2}$$

где функция $\Delta(\lambda)$ имеет вид: $\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - c\cdot b$.

Характеристическими числами системы (1) назовем корни уравнения (2).

Пусть p и q – характеристические числа системы. Для того чтобы решить систему (1), на первом шаге вычтем функцию py от левой и правой частей 1-го уравнения системы и pz – от обеих частей 2-го уравнения:

$$\begin{cases} y' - py = (a-p)y + bz + f(x), \\ z' - pz = cy + (d-p)z + g(x). \end{cases} \tag{3}$$

Так как число p является характеристическим, определитель $\begin{vmatrix} a-p & b \\ c & d-p \end{vmatrix}$ равен нулю, то есть строчки определителя пропорциональны. Пусть коэффициент пропорциональности равен k. Умножим 2-ое уравнение системы (3) на k: $\begin{cases} y' - py = (a-p)y + bz + f(x), \\ k[z' - pz] = kcy + k(d-p)z + kg(x), \end{cases}$ и вычтем второе уравнение из первого.

Тогда

$$[y - kz]' - p[y - kz] = f(x) - kg(x). \tag{4}$$

Уравнение (4) является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно неизвестной функции $y - kz$. Проинтегрировав его, получим выражение для $y - kz$ в виде

$$y - kz = F(x; C_1), \tag{5}$$

где F – некоторая определенная функция.

Повторим процедуру, взяв q вместо p, и получим:

$$y - mz = G(x;\, C_2), \tag{6}$$

где G – некоторая определенная функция.

Рассмотрим равенства (5) и (6) как систему алгебраических уравнений относительно y и z, и, решив ее, получим решение системы (1).

Пример 1. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = 8y - 3z - 4e^{5x}, \\ z' = y + 4z + 4e^{7x}. \end{cases} \tag{7}$$

Характеристическими числами системы (7) являются корни уравнения:

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(4-\lambda) - (-3)\cdot 1 = 0 => \lambda_1 = 5;\ \ \lambda_2 = 7.$$

1) Воспользовавшись корнем $\lambda = 5$, перепишем систему (7) в виде:

$\begin{cases} y' - 5y = 3y - 3z - 4e^{5x}, \\ z' - 5z = y - z + 4e^{7x}. \end{cases}$ Отняв от 1-го уравнения утроенное 2-ое, получим:

$(y-3z)' - 5(y-3z) = -4e^{5x} - 12e^{7x}$. Решением полученного уравнения является функция: $y - 3z = -4xe^{5x} - 6e^{7x} + C_1e^{5x}$.

2) Повторим процедуру, взяв второе характеристическое число $\lambda = 7$:

$\begin{cases} y' - 7y = y - 3z - 4e^{5x}, \\ z' - 7z = y - 3z + 4e^{7x}. \end{cases}$ Отнимем от 1-го уравнения 2-ое:

$(y-z)' - 7(y-z) = -4e^{5x} - 4e^{7x}$, и, проинтегрировав, получим:

$$y - z = 2e^{5x} - 4xe^{7x} + C_2e^{7x}.$$

Осталось найти y и z. Для этого решим алгебраическую систему:

$$\begin{cases} y - 3z = -4xe^{5x} - 6e^{7x} + C_1e^{5x}, \\ y - z = 2e^{5x} - 4xe^{7x} + C_2e^{7x}, \end{cases}$$

и получим, что решение системы (7) есть пара функций:

$$\begin{cases} y = (3+2x)e^{5x} + 3(1-2x)e^{7x} - 0{,}5C_1e^{5x} + 1{,}5C_2e^{7x}, \\ z = (1+2x)e^{5x} + (3-2x)e^{7x} - 0{,}5C_1e^{5x} + 0{,}5C_2e^{7x}. \end{cases}$$

2. Успех, достигнутый при решении систем с постоянными коэффициентами, позволяет надеяться на успешное применение метода Эйлера–Даламбера и к системам с переменными коэффициентами. Оказывается, это происходит не всегда. Начнем с рассмотрения случая, когда это возможно.

Пример 2. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = (3-2x)y + 4z + 7e^{-x^2}, \\ z' = 4y - (2x-3)z. \end{cases} \tag{8}$$

Характеристическими значениями системы (8) являются корни уравнения:

$$\begin{vmatrix} (3-2x)-\lambda & 4 \\ 4 & -(2x-3)-\lambda \end{vmatrix} = ((3-2x)-\lambda)((3-2x)-\lambda)-4\cdot 4 = 0$$

$$=> \lambda_1 = -1-2x; \ \lambda_2 = 7-2x.$$

1) Воспользовавшись корнем $\lambda = -1-2x$, перепишем систему (8) в виде $\begin{cases} y' + (1+2x)y = 4y + 4z + 7e^{-x^2}, \\ z' + (1+2x)z = 4y + 4z. \end{cases}$

Отняв от 1-го уравнения 2-ое, получим:

$(y'-z') + (1+2x)(y-z) = 7e^{-x^2}$. Решением полученного, относительно неизвестной функции $y-z$ дифференциального уравнения, является функция $y-z = (7e^x + A)e^{-x(1+x)}$.

2) Повторим процедуру, взяв второе характеристическое значение:

$\lambda = 7-2x$: $\begin{cases} y' + (2x-7)y = -4y + 4z + 7e^{-x^2}, \\ z' + (2x-7)z = 4y - 4z. \end{cases}$ Прибавим к 1-му уравнению 2-е:

$(y'+z') + (2x-7)(y+z) = 7e^{-x^2}$, и, проинтегрировав, получим: $y+z = (-e^{-7x} + B)e^{-x(x-7)}$.

Осталось найти y и z. Для этого нужно решить систему:

$$\begin{cases} y-z = (7e^x + A)e^{-x(1+x)}, \\ y+z = (-e^{-7x} + B)e^{-x(x-7)}. \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим: $2y = (7e^x + A)e^{-x(x+1)} + (-e^{-7x} + B)e^{-x(x-7)} = 6e^{-x^2} + e^{-x^2}(Ae^{-x} + Be^{7x})$.

Разность уравнений системы есть функция:

$$-2z = (7e^x + A)e^{-x(x+1)} - (-e^{-7x} + B)e^{-x(x-7)} = 8e^{-x^2} + e^{-x^2}(Ae^{-x} - Be^{7x}).$$

Таким образом, решение системы (8): $\begin{cases} y = 3e^{-x^2} + 0{,}5e^{-x^2}(Ae^{-x} + Be^{7x}), \\ z = -4e^{-x^2} - 0{,}5e^{-x^2}(Ae^{-x} - Be^{7x}). \end{cases}$

Пример 3. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 y' = (1-3x)y + xz + 3, \\ x^2 z' = 2y - xz. \end{cases} \qquad (9)$$

Найдем характеристические значения системы (9):

$$\begin{vmatrix} 1-3x-\lambda & x \\ 2 & -x-\lambda \end{vmatrix} = (1-3x-\lambda)(-x-\lambda) - 2\cdot x = 0 => \lambda_1 = -3x; \ \lambda_2 = 1-x.$$

1) Воспользовавшись корнем $\lambda = -3x$, перепишем систему (9) в виде:

$\begin{cases} x^2 y' + 3xy = y + xz + 3, \\ x^2 z' + 3xz = 2y + 2xz. \end{cases}$ Отняв от удвоенного 1-го уравнения 2-ое, получим:

$x^2(2y' - z') + 3x(2y - z) = 6.$ Это уравнение можно решить, рассмотрев его как линейное дифференциальное уравнение относительно $2y - z$. В то же время процесс интегрирования уравнения заметно упростится, если заметить, что после умножения уравнения на x, его можно будет записать в виде $[x^3(2y - z)]' = 6x.$ Таким образом, $x^3(2y - z) = 3x^2 + C_1 => 2y - z = 3/x + C_1/x^3$.

2) Повторим процедуру, взяв второе значение $\lambda = -x + 1$:

$\begin{cases} x^2y' + (x - 1)y = -2xy + xz + 3, \\ x^2z' + (x - 1)z = 2y - z. \end{cases}$ Как и должно было произойти, при неизвестных в правой части системы получились пропорциональные коэффициенты. Но, к большому сожалению, линейное дифференциальное уравнение относительно $y + xz$ не получится, потому что $x^2(y' + xz')$ не равно $x^2(y + xz)'$. Как же быть? Несложно понять, что никаких оснований для паники нет. Мы можем воспользоваться линейной комбинацией решений, полученной при помощи первого характеристического значения:

$2y - z = 3/x + C_1/x^3$. Для этого выразим z: $z = 2y - 3/x - C_1/x^3$, и подставив в первое уравнение исходной системы, получим:

$x^2y' = (1 - 3x)y + x(2y - 3/x - C_1/x^3) + 3 => x^2y' + (x - 1)y = -C_1/x^2$. Решение полученного уравнения: $y = C_1(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}) + C_2e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x}$. Осталось выписать значение z:

$$z = 2y - \frac{3}{x} - \frac{C_1}{x^3} = 2[C_1(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}) + C_2e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x}] - \frac{3}{x} - \frac{C_1}{x^3} =$$

$= C_1(\frac{2}{\tilde{o}^2} - \frac{2}{x} - \frac{1}{\tilde{o}^3}) + 2C_2e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x} - \frac{3}{x}$. Итак, получилось, что решение системы (9) есть пара функций:

$$\begin{cases} y = C_1(\frac{1}{\tilde{o}^2} - \frac{1}{x}) + C_2e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x}, \\ z = C_1(\frac{2}{\tilde{o}^2} - \frac{2}{x} - \frac{1}{\tilde{o}^3}) + 2C_2e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x} - \frac{3}{x}. \end{cases}$$

Подведем некоторые итоги.

Теорема 1

Система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x)z + f(x), \\ z' = c(x)y + d(x)z + g(x), \end{cases} \tag{10}$$

где функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ – коэффициенты системы, а $f(x)$ и $g(x)$ – свободные члены, интегрируема в квадратурах в том случае, если хотя бы для одного характеристического значения матрицы коэффициентов системы (10) $\lambda(x)$ имеет место равенство:

$$k = \frac{a(x) - \lambda(x)}{c(x)}, \text{ где } k \text{ – некоторое число.} \qquad (11)$$

Доказательство теоремы 1 получается из предыдущих рассуждений.
Замечание.
Понятно, что равенство (11) эквивалентно равенству: $k = \dfrac{b(x)}{d(x) - \lambda(x)}$.

3. Осталось рассмотреть ситуацию, где условие (11) не имеет места.
Пример 4. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = (x + \frac{1}{x})y + (1 - x^2)z - \frac{1}{x}, \\ \quad z' = y + (-x + \frac{1}{x})z. \end{cases} \qquad (12)$$

Найдем характеристические значения системы (12):

$$\begin{vmatrix} (x + \frac{1}{x}) - \lambda & 1 - x^2 \\ 1 & (-x + \frac{1}{x}) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{x} + 1; \ \lambda_2 = \frac{1}{x} - 1.$$

Воспользовавшись корнем $\lambda = 1/x + 1$, перепишем систему (12) в виде:

$$\begin{cases} y' - (1 + \frac{1}{x})y = (x - 1)y + (1 - x^2)z - \frac{1}{x}, \\ \quad z' - (1 + \frac{1}{x})z = y + (-x - 1)z. \end{cases}$$

При неизвестных в правой части системы получились пропорциональные коэффициенты. Но, так как коэффициент (x-1) не является постоянным, линейное дифференциальное уравнение относительно $y - (x - 1)z$ не получится, потому что $(y' + (x-1)z')$ не равно $(y + (x-1)z)'$. К сожалению, похожая ситуация имеет место и для другого характеристического значения. Что же делать?

Давайте, обратив внимание на характер коэффициентов системы, перепишем ее в виде:

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{x}y = xy + (1 - x^2)z - \frac{1}{x}, \\ \quad z' - \frac{1}{x}z = y - xz. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на x, и вычтем из первого: $y' - xz' - \dfrac{1}{x}(y - xz) = z - \dfrac{1}{x}$. Хотя линейного дифференциального уравнения относительно $y - xz$ не получилось, можно считать, что нам повезло. Потому что, отправив z в левую часть полученного уравнения и, приняв во внимание то, что $y' - xz' - z = (y - xz)'$, получим линейное дифференциальное уравнение: $(y - xz)' - \dfrac{1}{x}(y - xz) = -\dfrac{1}{x}$. Решение этого уравнения: $y - xz = 1 + C_1 x$.

Теперь, подставим найденное значение $y = xz + 1 + C_1 x$ во второе уравнение исходной системы, и получим уравнение: $z' - \frac{1}{x} z = 1 + C_1 x.$ Его решение: $z = x \cdot \ln x + C_1 x^2 + C_2 x.$ Далее, подставив найденное значение z в выражение $y = xz + 1 + C_1 x$, закончим решение системы: $y = x^2 \cdot \ln x + C_1 x^3 + C_2 x^2 + 1 + C_1 x.$

Настало время формализовать наши рассуждения.

Теорема 2

Система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x)z + f(x), \\ z' = c(x)y + d(x)z + g(x), \end{cases} \tag{13}$$

где функции $a(x), b(x), c(x), d(x)$ – коэффициенты системы, а $f(x)$ и $g(x)$ – свободные члены, интегрируема в квадратурах в том случае, если имеются функции $k(x)$ и λ(x), такие, что

$$k(x) = \frac{a(x) - \lambda(x)}{c(x)} = \frac{b(x) - k'(x)}{d(x) - \lambda(x)}. \tag{14}$$

Доказательство

Перепишем систему (13) в виде:

$$\begin{cases} y' - \lambda(x)y = [a(x) - \lambda(x)]y + b(x)z + f(x), \\ z' - \lambda(x)z = c(x)y + [d(x) - \lambda(x)]z + g(x), \end{cases}$$

а затем воспользуемся равенствами (14). Тогда,

$$\begin{cases} y' - \lambda(x)y = k(x)c(x)y + \{k(x)[d(x) - \lambda(x)] + k'(x)\}z + f(x), \\ \qquad z' - \lambda(x)z = c(x)y + [d(x) - \lambda(x)]z + g(x) \end{cases}.$$

Теперь умножим второе уравнение на $k(x)$ и вычтем из первого:

$y' - k(x)z' - \lambda(x)[y - k(x)z] = k'(x)z + f(x) - k(x)g(x)$. Для завершения доказательства осталось перенести слагаемое $k'(x)z$ в левую часть уравнения, и записать его как линейное дифференциальное уравнение первого порядка: $(y - k(x)z)' - \lambda(x)[y - k(x)z] = f(x) - k(x)g(x)$, которое можно проинтегрировать и получить значение функции $y - k(x)z$. Далее, выразив y через z и подставив во второе уравнение системы (13), получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с неизвестной функцией z. Так как такие уравнения интегрируемы в квадратурах, тем самым доказана интегрируемость системы (13).

Итак, мы доказали, что разрешимость системы (13) сводится к решению системы (14). Но, и это несложно увидеть, если исключить из (14) функцию λ(x), то получится уравнение Риккати, которое в общем виде не интегрируемо в квадратурах. Что и не удивительно. Как говорит теория [1], линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, и соответствующие им системы вида (13), в общем виде не интегрируются в квадратурах. Поэтому, нахождение интегрируемых комбинаций решений систем уравнений с переменными коэффициентами возможно только в отдельных случаях. Иногда, как в случае примера 4, это удается сделать путем подбора. Более алгоритмичный путь возможен, если имеет место условие (11).

На основе вышесказанного можно сформулировать следующий порядок действий при решении систем вида (13):

- найдите решения λ(x) характеристического уравнения системы;

- проверьте, возможно, эти решения удовлетворяют условию (11). Если да, то система интегрируется в квадратурах, и ее можно решить, взяв за образец примеры 2 или 3. Если условия (11) не выполнены, то можно попытаться найти функции, удовлетворяющие условиям (14) путем подбора, как в примере 4.

Заключение. Результаты работы демонстрируют мощный эффект синергии, возникающий при объединении подходов Эйлера и Даламбера к решению систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В данном случае продемонстрировано, как объединенный подход позволяет без особых теоретических сложностей перейти от систем с постоянными коэффициентами к системам с переменными коэффициентами и получить условие их интегрируемости в квадратурах. Наличие явного вида решений таких систем позволяет расширить возможности качественного анализа поведения их решений.

Литература

1. *Егоров А.И.* Уравнения Риккати / А.И. Егоров. М.: Физматлит, 2001.
2. *Кыдыралиев С.К.* Преимущества метода цепочки при решении линейных дифференциальных уравнений / С.К. Кыдыралиев, Е.С. Бурова, А.Б. Урдалетова // Вестник КРСУ. 2020. Т. 20. № 8. С. 16–20.
3. *Кыдыралиев С.К.* Формула решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Вестник КРСУ. 2020. Т. 20. № 8. С. 11–15.
4. *Kydyraliev S.K.* Direct integration of systems of linear differential and difference equations / S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova // University of Nis. Serbia, Filomat 33:5 (2019). Pp. 1453–1461.