УДК 519.86:632.521

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЧАСТОТЫ И ВЫСОТЫ РОСТА КУСТАРНИКА КАРАГАНЫ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ

Н.Д. Уманова, И. Козубай, Ж.М. Омуров

Одно из направлений математического моделирования растений связано с анализом динамики популяций, которые развиваются в среде обитания в различных условиях. Динамика популяции определяется на основе процессов роста и вымирания, которые зависят от множества факторов, влияющих на ее развитие – численность и устойчивый рост популяции, а также продолжительность ее роста. Влияющими факторами являются: температурный режим, интенсивность окружающей среды, климатические условия, наличие или недостаток пищевых ресурсов и др. факторы. Продолжительность жизни популяций может снижаться или увеличиваться под влиянием различных факторов, которые попадают в среду обитания. Приведены показатели расчетного метода для процесса роста и исчезновения C.aurantiaca, то есть кустарника карагана, его особенностей, которые помогают приспосабливаться и изменять форму роста в зависимости от различных условий на абсолютной высоте 2100–2700 м. Метод расчета роста кустарника карагана определяли с использованием модели Ферхюльса.

Ключевые слова: C.aurantiaca; карагана; популяция; счетный метод; математическая модель; модель Ферхюльса; коэффициент; биомасса.

АЛТЫГАНА БАДАЛЫНЫН УБАКЫТКА ЖАРАША КӨБӨЙҮШҮНҮН ЖЫШТЫГЫН ЖАНА БИЙИКТИГИН АНЫКТАГАН МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛЬ

Н.Д. Уманова, И.Козубай, Ж.М.Омуров

Өсүмдүктөрдү математикалык моделдөөнүн багыттарынын бири ар кандай шарттарда чөйрөдө өнүккөн популяциялардын динамикасын талдоо менен байланышкан. Популяциялардын динамикасы өсүү жана жок болуу процесстеринин негизде аныкталат, алар анын өнүгүшүнө таасир этүүчү көптөгөн факторлорго - популяциянын санына жана туруктуу өсүшүнө, ошондой эле анын өсүшүнүн узактыгына байланыштуу. Таасир этүүчү факторлор болуп температуралык режим, айлана-чөйрөнүн интенсивдүүлүгү, климаттык шарттар, азык-түлүк ресурстарынын болушу же жоктугу жана башка факторлор эсептелет. Популяциялардын жашоо узактыгы жашоо чөйрөсүнө кирген ар кандай факторлордун таасири астында кыскарышы же көбөйүшү мүмкүн. C. arantiaca, башкача айтканда, алтыгана бадалынын өсүшү жана жок болушу үчүн эсептөө ыкмасынын көрсөткүчтөрү, 2100-2700 абсолюттук бийиктикте ар кандай шарттарга жараша ыңгайлашууга жана өсүү формасын өзгөртүүгө жардам берүүчү анын өзгөчөлүктөрү көрсөтүлгөн. Караган бадалынын өсүшүн эсептөө ыкмасы **Ферхюльс** моделин колдонуу менен аныкталган.

Түйүндүү сөздөр: C.aurantiaca; алтыгана; түрү; эсептөө ыкмасы; математикалык модель; Ферхюльс модели; коэффициент; биомасса.

MATHEMATICAL MODEL OF THE FREQUENCY AND HEIGHT OF THE GROWTH OF THE KARAGANY SHRUB DEPENDING ON TIME

N.D. Umanova, I. Kozubai, Zh.M. Omurov

One of the directions of mathematical modeling of plants is associated with the analysis of the dynamics of populations that develop in the habitat under various conditions. Population dynamics is determined based on the processes of growth and extinction, which depend on many factors affecting its development – the number and steady growth of the population, as well as the duration of its growth. The influencing factors are: temperature regime, environmental intensity, climatic conditions, availability or lack of food resources, and other factors. The life expectancy of populations may decrease or increase under the influence of various factors that enter the habitat. The indicators of the calculation

method for the process of growth and disappearance of C.aurantiaca, that is, the karagan shrub, its features that help to adapt and change the shape of growth depending on various conditions at an absolute altitude of 2100-2700 m are given. The method of calculating the growth of the karagan shrub was determined using the Ferhuls model.

Keywords: C.aurantiaca; karagana; population; counting method; mathematical model; Ferhuls model; coefficient; biomass.

Кириш сөз. Туруктуу чөйрөдө чексиз ареалдагы шарттарда обочолонуп өнүккөн алтыгана бадалынын баштапкы убакытта көбөйүшүн t_0 жана биомассасын x_0 моделди куруу менен карап көрөлү. Бул популяциялык моделде өсүмдүктөрдүн санынын өзгөрүшүнүн x(t) эки фактору менен гана аныкталат: өсүү жана жок болуу факторлору аркылуу. Анда өсүү процессин төмөнкүчө чагылдырууга болот.

$$\chi = \left(\alpha\chi - \beta\chi\right) * \Delta t\,, \tag{1}$$

Мында, α *жана* β өсүүсүнүн жана жок болуусунун коэффициенти, α − β = ε аркылуу белгилейбиз. (1) формуланы Δt *бөлүп*, $\Delta t \to 0$ чегине өтүп, дифференциалдык тендемени алабыз:

$$\frac{\Delta\chi}{\Delta t} = \alpha\chi - \alpha\chi \tag{1.1}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\chi}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}(\alpha - \beta) * \chi = \varepsilon t \tag{1.2}$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \varepsilon t \tag{2}$$

Мында, баштапкы шарты $x(t_0\,) = x_0$.

Популяциянын биомассынын өзгөрүү процессин (2) – дифференциалдык теңдеме математикалык моделин көрсөтөт. Баштапкы шартын эске алуу менен төмөнкү теңдемени жазабыз.

$$\chi\left(t\right) = \chi_0 e^{\varepsilon(t - t_0)}. \tag{3}$$

Экспонент боюнча табигый популяция өзүнүн санын көбөйтпөйт. Эгерде популяцияга кандайдыр бир чектөөлөрсүз, шарт түзүлүп турган болсо жакшы өсүп кетүүсүн курулган модель аркылуу көрсөтүүгө мүмкүн. Убакыттын өтүшү менен кандайдыр популяциянын саны өзгөрүп турааты белгилүү. Ошондуктан, эгерде өнүгүп өсүү процесси ыңгайлуу шартта болсо, жаралуу процесси жок болуу процессине караганда жогору болуп, алтыгана бадалынын бутактануусунун саны убакытка жараша көбөйөт. **v(t)** менен популяциянын өсүү ылдамдыгын белгилейбиз, эгерде **v(t)** белгилүү болсо, $\boldsymbol{t_1}$ **-** $\boldsymbol{t_2}$ убакыт аралыгындагы көбөйүү санын төмөнкү формула менен аныктайбыз.

$$\int_{t_1}^{t_2} v\left(t\right)dt = N\left(t_2\right) - N\left(t_1\right), \tag{4}$$

N(t) – v(t) үчүн баштапкы көрүнүш.

Мисалы, ар убакыт сайын азыктандырып, жагымдуу чөйрө түзүү менен популяциянын өсүп, өнүгүүсү үчүн шарттар түзүлөт. Анда (4) - формуланы колдонуу менен төмөндөгү теңдемени аныкталат:

$$N\left(t_1\right) = N\left(t_0\right) + \alpha\int_{t_0}^{t_1} e^{kt}dt = N\left(t_0\right) + \frac{\alpha}{k}\left(e^{kt_1} - e^{kt_0}\right), \tag{5}$$

а жана k белгилери α,β,ε менен белгиленишет. Демек (5) – формула менен өсүп өнүгүү санын алса болот. Ал эми (3) – формула аркылуу бардык популяция түрлөрүнүн көбөйүп өсүү саны азык заттардын,

суунун,, ыңгайлуу шарттардын туруктуулугу жана терс таасирлердин жоктугу менен чексиз жогорулашын далилдейт [1–4].

MATLAB программасындагы Ферхюльста модели

Сандын квадратынын пропорционалдуулугу жана убакыттын бирдигине жараша бул модел көбөйүүсүнүн азайышын жана токтоп калышын аныктоого болот. Ошондо (2) – форомуланын ордуна

$$\frac{d\chi}{dt} = \varepsilon\chi - \gamma\chi^2 , \tag{6}$$

ε > 0 ошол эле маанини берет, **γ > 0** түрлөр арасындагы атаандаштык коэффициенти. **γ/ε = d** *белгилеп,кийинки тендемени алабыз.*

$$\chi(t) = \chi \frac{h}{\left(h - \chi_0 e^{-\varepsilon(t-t_0)} + \chi_0\right)} \; . \tag{7}$$

Түзүлгөн модель чектелген ареалдык шарттарда популяциянын өсүү өзгөчүлүктөрүн жетишинче так чагылдыра алат. (7) – формуласын колдонуу бир гана ар кандай учурда популяциянын санын аныктоо эмес, берилген шартта максималдуу санын да аныктаса болот [3, 4, 5].

Материалдар жана изилдөө ыкмалары. Популяциянын өсүү (7) – формуласы аркылуу өсүү графикасын түзүү үчүн төмөнкү функциялык командалар колдонулат:

stem(x,t):

stem(X.T) – T векторунда жана X векторундагы абсцисс ординаторлор менен эсептелип график түзүлөт.

stem(…. ‘LINESPEC’) – алдын ала берилген окшош команда менен **‘LINESPEC’** спецификалык линиясы аркылуу, **plot;** функциясы үчүн окшош спецификалык берилет. Эгерде, **stem(Y) – Y** вектордук ординатору менен эсептөөдө функциянын графиги түзүлсө, анда, **stem(…. ‘filled’)** – боек маркерлери менен функциянын графигин түзөт.

Эгерде өсүү коэффициенти e=0,1 барабар болгондо, (7) формула менен матлабдан төмөнкүдөй жыйынтык алабыз (1 – сүрөт, 1 – табл.)

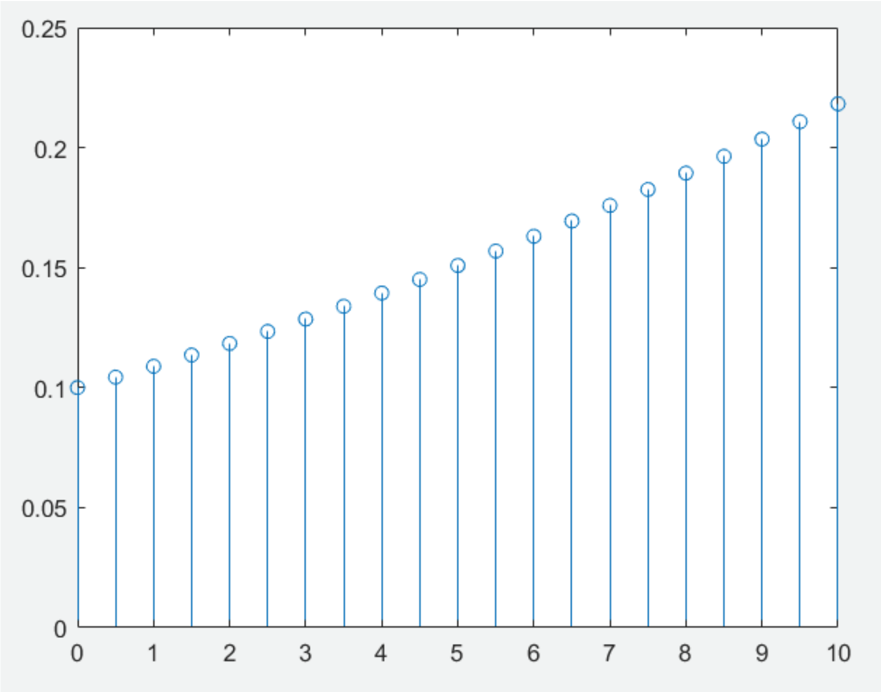
```
t =0:0.5:10
h=0.7;
t0=0;
x0=0.1;
e=0.1;
x = (x0*h)./((h-x0).*exp(-e.*(t- t0))+x0)
 stem(t,x)
```

Эгерде өсүү коэффицинти e=0,2 барабар болгондо, (7) формула менен төмөнкүдөй жыйынтык алабыз (2 - сүрөт, 2 - табл.)

```
 t = 0:0.5:10
h=0.7;
t0=0;
x0=0.1;
e=0.2;
x = (x0*h)./((h-x0).*exp(-e.*(t- t0))+x0)
 stem(t,x)
```

Эгерде өсүү коэффицинти e=0,6 барабар болгондо, (7) формула менен төмөнкүдөй жыйынтык алабыз (3 – сүрөт, 3 – табл.)

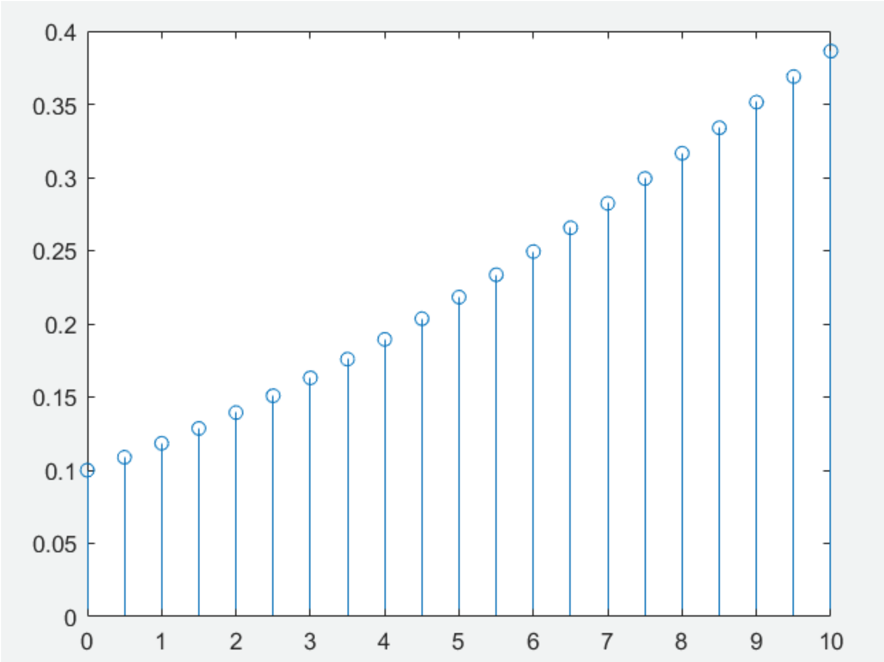
```
t = 0:0.5:10
h=0.7;
```



1-сүрөт. Өсүү процессинин коэфициенти е = 0.1 барабар болгондогу көрсөткүчү

Таблица 1 – Убакытка жараша өлчөм бийиктиги

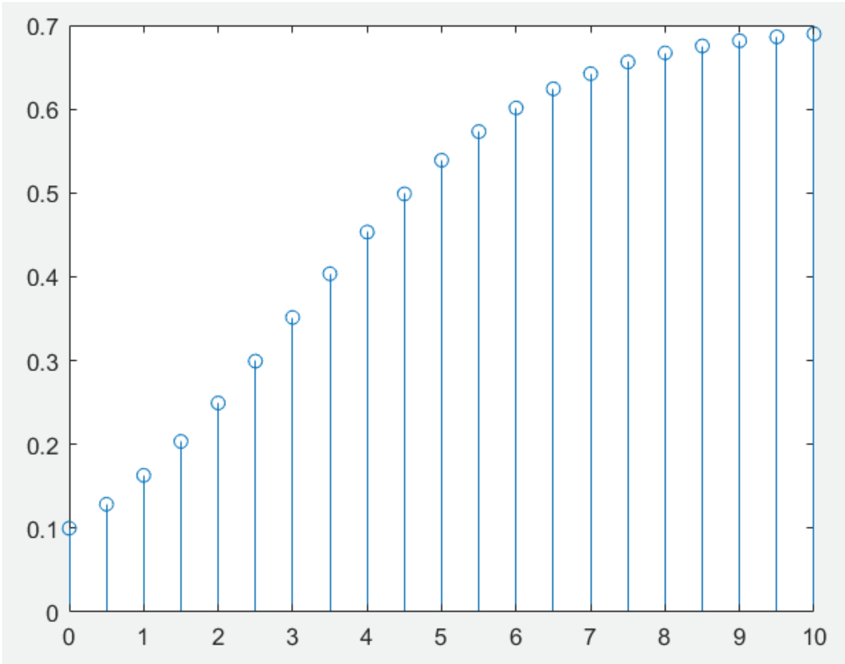
	1ден 5ке чейин мамычалар	6дан 10го чейин мамычалар	11ден 15ке чейин мамычалар	16дан 20га чейин мамычалар	21 мамыча
t, жыл	0	2.5000	5.0000	7.5000	10.0000
	0.5000	3.0000	5.5000	8.0000	
	1.0000	3.5000	6.0000	8.5000	
	1.5000	4.0000	6.5000	9.0000	
	2.0000	4.5000	7.0000	9.5000	
x, см	0.1000	0.1234	0.1509	0.1826	0.2183
	0.1044	0.1286	0.1569	0.1894	
	0.1089	0.1339	0.1631	0.1964	
	0.1136	0.1394	0.1694	0.2035	
	0.1184	0.1451	0.1759	0.2108	



2-сүрөт. Өсүү процессинин коэфициенти e=0.2 барабар болгондогу көрсөткүчү

Таблица 2 – Убакытка жараша өлчөм бийиктиги

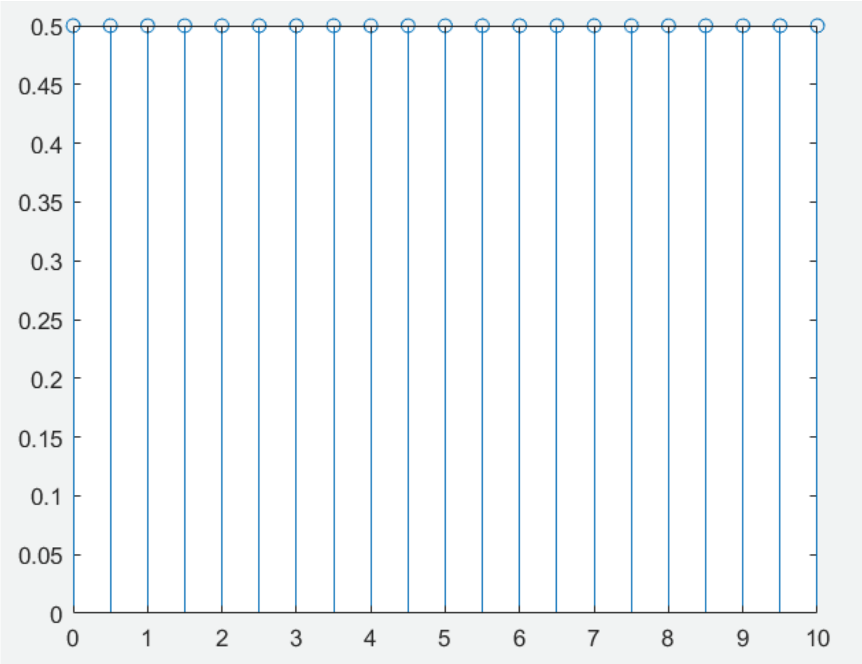
	1ден 5ке чейин мамычалар	6дан 10го чейин мамычалар	11ден 15ке чейин мамычалар	16дан 20га чейин мамычалар	21 мамыча
t, жыл	0	2.5000	5.0000	7.5000	10.0000
	0.5000	3.0000	5.5000	8.0000	
	1.0000	3.5000	6.0000	8.5000	
	1.5000	4.0000	6.5000	9.0000	
	2.0000	4.5000	7.0000	9.5000	
x, см	0.1000	0.1509	0.2183	0.2993	0.3863
	0.1089	0.1631	0.2335	0.3165	
	0.1184	0.1759	0.2494	0.3340	
	0.1286	0.1894	0.2656	0.3514	
	0.1394	0.2035	0.2823	0.3689	



3-сүрөт. Өсүү процессинин коэфициенти e=0.6 барабар болгондогу көрсөткүчү

Таблица 3 – Убакытка жараша өлчөм бийиктиги

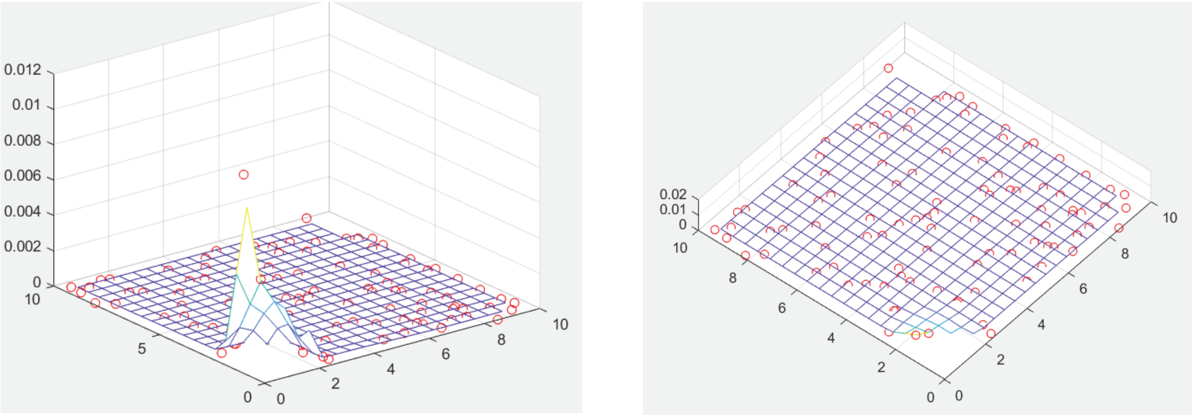
	1ден 5ке чейин мамычалар	6дан 10го чейин мамычалар	11ден 15ке чейин мамычалар	16дан 20га чейин мамычалар	21 мамыча
t, жыл	0	2.5000	5.0000	7.5000	10.0000
	0.5000	3.0000	5.5000	8.0000	
	1.0000	3.5000	6.0000	8.5000	
	1.5000	4.0000	6.5000	9.0000	
	2.0000	4.5000	7.0000	9.5000	
x, см	0.1000	0.2993	0.5390	0.6563	0.6862
	0.1286	0.3514	0.5732	0.6671	
	0.1631	0.4035	0.6014	0.6753	
	0.2035	0.4533	0.6242	0.6815	
	0.2494	0.4988	0.6422	0.6862	



4-сүрөт. Өсүү процессинин коэфициенти e=0.0 барабар болгондогу көрсөткүчү

Таблица 4 – Убакытка жараша өлчөм бийиктиги

	1ден 5ке чейин мамычалар	6дан 10го чейин мамычалар	11ден 15ке чейин мамычалар	16дан 20га чейин мамычалар	21 мамыча
t, жыл	0	2.5000	5.0000	7.5000	10.0000
	0.5000	3.0000	5.5000	8.0000	
	1.0000	3.5000	6.0000	8.5000	
	1.5000	4.0000	6.5000	9.0000	
	2.0000	4.5000	7.0000	9.5000	
x, см	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000



5-сүрөт. 10-жылда ээлеген аянты

Таблица 5 – Убакытка жараша өлчөм бийиктиги

	1ден 5ке чейин мамычалар	6дан 10го чейин мамычалар	11ден 15ке чейин мамычалар	16дан 20га чейин мамычалар	21 мамыча
t, жыл	0	2.5000	5.0000	7.5000	10.0000
	0.5000	3.0000	5.5000	8.0000	
	1.0000	3.5000	6.0000	8.5000	
	1.5000	4.0000	6.5000	9.0000	
	2.0000	4.5000	7.0000	9.5000	
s =					
108.3422	227.8615	17.7379	174.8356	174.8356	67.0889
58.3877	23.0343	114.1231	218.5182	234.0463	35.7692
149.0050	152.0700	167.9546	104.1959	110.2305	73.4281
287.4444	99.4915	175.3046	69.2952	145.4641	113.2036
231.2342	177.2006	208.6217	87.8219	49.2459	78.0579
105.0981	107.4852	130.3559	17.2315	11.2606	4.8067
109.3658	194.4376	68.5477	189.2271	3.4852	3.4852
144.4649	83.6087	111.3418	140.6356	30.8303	38.5655
40.2088	67.9697	84.3122	98.4593	39.2974	72.9204
195.3158	144.2933	40.0520	76.5744	162.5206	145.3756
75.1844	9.8059	184.1917	34.0643	49.3619	102.3410
126.0729	147.2121	186.3440	146.5454	55.4451	10.9718
119.6226	29.7327	209.9749	9.3480	135.8650	23.7143
72.2201	93.9583	125.4565	67.0915	66.3927	122.1589
140.8449	53.0503	206.1260	18.1147	111.3339	150.6425
118.2985	51.6534	136.5134	94.9286	81.4378	125.1407
168.3027	17.3839	91.3962	75.5508	104.9791	117.0292

```
t0=0;
x0=0.1;
e=0.6;
x = (x0*h)./((h-x0).*exp(-e.*(t- t0))+x0)
stem(t,x)
```

Жогоруда берилген коэффициенти е-0,6 болгон көрсөткүчтү карасак, анда алынган жыйынтыктар алтыгана бадалы үчүн ыңгайлуу чөйрө болуп эсептелип, жылдык өсүү көрсөткүчтөрү максималдуу бийиктигин берет.

Эгерде өсүү коэффицинти е = 0,0 барабар болгондо, 7 формула менен төмөнкүдөй жыйынтык алабыз (4 – сүрөт, 4 – табл.)

```
t =0:0.5:10
h=0.7;
t0=0;
x0=0.5;
e=0.0;
x=(x0*h)./((h-x0).*exp(-e.*(t- t0))+x0)
stem(t,x).
```

Өсүү коэффициенти е = 0.0 болгон көрсөткүчүн карасак, алтыгана бадалын жок кылууда колдонулган гербициттин концентрациясынын оптималдуу өлчөмдөгү көрсөткүчү өсүү коэффициентин токтотконун байкасак болот.

Ал эми популяциянын 10-жылда канча аянтты ээлегенин төмөнкү функциянын командалары менен табабыз. Алынган жыйынтыктар 5 – сүрөттө жана 5 – таблицада көрсөтүлгөн.

```
x = rand(100, 1)*10 ;
y = rand(100, 1)*10 ;
z0=0.1;
z = z0.*exp(-x.^2 - y.^2);
ti = 0:0.5:10
pi=3.14;
s=pi.* (x.^2 +y.^2)./2
[XI, YI] = meshgrid(ti, ti);
ZI = griddata(x, y, z, XI, YI);
mesh(XI, YI, ZI), hold on, plot3(x, y, z, ‘or’)
```

Корутунду. Жогорку таблицалардын негизинде алтыгана бадалынын өсүүшү убакыттан көз карандылыгын көрсөтөт. Бул MATLAB аныктаган сандык көрсөткүчтөр, тажрыйба аркылуу алынган маалыматтарды тастыктап берүү максатында колдонууга болот. Алтыгана бадалынын өсүшүн Ферхюльста модели аркылуу жогорку деңгээлде аныктаган сандык эсептөө методунда далилденди жана бул метод өсүмдүктөрдүн бардык популяциясына колдонууга сунушталат.

Колдонулган адабияттар

1. *Ильина И.В.* Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов / И.В. Ильина, Д.И. Трубецкова. М.: Изд-во МГУ, 2010. 412 с.
2. *Перцев Н.В.* Математическая модель динамики популяции, развивающейся в условиях воздействия вредных веществ / Н.В. Перцев, Г.Е. Царегородцева // Сиб. журн. индустр. матем., 2010. Т. 13. № 1. С. 109–12.
3. *Соколов С.В.* С59 Модели динамики популяций: учеб. пособие / С.В. Соколов. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018. 61 с.
4. *Топаж А.Г.* Дискретные модели популяционной динамики: достоинства, проблемы и обоснование / А.Г. Топаж, А.В. Абрамова, С.Е. Толстопятов // Компьютерные исследования и моделирование. 2016. Т. 8. Вып. 2. С. 267–284.