УДК 517.977.5

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЦЕССА В ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

У.Э. Дуйшеналиева

Проанализированы вопросы влияния параметров задачи на скорость сходимости приближенных решений модельной задачи оптимального управления упругими колебаниями с интегральным оператором Фредгольма в случае, когда функция внешнего воздействия нелинейна по управлению и приложена к подвижной точке. При выводе основных теоретических результатов установлено, что интегральный оператор Фредгольма существенно влияет на построение обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса, оптимального управления и его приближений, оптимального процесса и его приближений, а также на скорость сходимости приближений во всех случаях. При численных расчетах обнаружено, что и другие параметры задачи влияют на существование полного решения задачи нелинейной оптимизации и на скорость сходимости его приближений. Результаты численных расчетов приведены в виде таблиц.

Ключевые слова: краевая задача; обобщенное решение; обобщенный функционал; интегральный оператор; коэффициент сжимаемости; условие Липшица; операторное уравнение; приближение по резольвенте; конечномерное приближение; сходимость.

СЕРПИЛГИЧТҮҮ ТЕРМЕЛҮҮЛӨРДҮ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ОПТИМАЛДАШТЫРУУ МАСЕЛЕСИНДЕ ОПТИМАЛДУУ БАШКАРУУНУН ЖАНА ОПТИМАЛДУУ ПРОЦЕССТИН ЖАКЫНДЫГЫНЫН КАЙТАЛАНМАЛУУЛУГУНА САНДЫК ТАЛДОО ЖҮРГҮЗҮҮ

У.Э. Дуйшеналиева

Бул макалада маселенин параметрлеринин Фредгольм интегралдык оператору менен ийкемдүү термелүүлөрдү оптималдуу башкаруунун моделдик маселесинин болжолдуу чечимдеринин жакындашуу ылдамдыгына тийгизген таасири жөнүндө маселелер тышкы таасирдин функциясы башкарууда сызыктуу эмес болуп, кыймылдуу чекитке жакындаткан учурда талдоого алынган. Негизги теориялык жыйынтыктарды чыгарууда Фредгольм интегралдык оператору башкарылуучу процесстин четки маселесин жалпылап чыгарууга, оптималдуу башкарууга жана анын жакындашууларына, оптималдуу процесске жана анын жакындашууларына, ошондой эле бардык учурларда жакындаштыруунун ылдамдыгына олуттуу таасирин тийгизери белгиленген. Сандык эсептөөлөрдө сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин толук чыгарылышына жана анын жакындашуу ылдамдыгына маселенин башка параметрлери да таасирин тийгизери аныкталган. Сандык эсептөөлөрдүн натыйжалары таблица түрүндө берилген.

Түйүндүү сөздөр: чектик маселе; жалпыланган чыгарылыш; жалпыланган функционал; интегралдык оператор; кысылуу коэффициенти; Липшицтин шарты; оператордук теңдеме; резольвента боюнча жакындатуу; чектүү-өлчөмдүү жакындоо; жакындашуу.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE CONVERGENCE OF THE APPROXIMATIONS OF THE OPTIMAL CONTROL AND THE OPTIMAL PROCESS IN THE PROBLEM OF NONLINEAR OPTIMIZATION OF ELASTIC OSCILLATIONS

U.E. Duishenalieva

The article analyzes the influence of the parameters of the problem on the rate of convergence of approximate solutions of the model problem of optimal control of elastic oscillations with the Fredholm integral operator in the case when the external action function is nonlinear in control and is applied to a moving point. When deriving the main theoretical results, it was found that the Fredholm integral operator significantly affects the construction of a generalized solution to a boundary value problem of a controlled process, optimal control and its approximations, an optimal process and its approximations, as well as the rate of convergence of approximations in all cases. Numerical calculations revealed that other parameters of the problem affect the existence of a complete solution to the nonlinear optimization problem and the convergence rate of its approximations. The results of numerical calculations are presented in the form of tables.

Keywords: boundary value problem; generalized solution; generalized functional; integral operator; compressibility coefficient; Lipschitz condition; operator equation; approximation by resolvent; finite-dimensional approximation; convergence.

Введение. В работах [1–3] приведены основные теоретические выводы, полученные при решении задачи точечного подвижного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями. Ниже выписаны основные необходимые формулы, согласно которым проводились численные расчеты.

Результаты приведены в виде таблиц, которые позволяют анализировать зависимость скорости сходимости приближенных решений задачи нелинейной оптимизации от параметров задачи.

Постановка нелинейной задачи оптимизации с равномерно распределенным точечным управлением. Рассмотрим задачу, где требуется минимизировать обобщенный квадратичный функционал вида

$$I[u]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u(t)\right]dt,\quad 0<\beta<1. \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи:

$$V_{tt}=V_{xx}+\lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+g(x)\delta(x-x_0)f[t,u(t)], \tag{2}$$

$$V(0,x)=\psi_1(x),\ V_t(0,x)=\psi_2(x),\qquad 0<x<1, \tag{3}$$

$$V_x(t,0)=0,\ \ V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\ \ 0<t\le T\ , \tag{4}$$

где *u(t)* – функция управления, функция $g(x)$, имеющая обобщенную производную $g'(x)$, удовлетворяет условию $g(1)=0$.

Численные расчеты были выполнены при следующих данных:

1. *T=1.*
2. Функции начального состояния

2.1. $\psi_1(x)=\sin\pi x;$

$$\left\|\psi_1(x)\right\|^2_{H(0,T)}=\int_0^1\sin^2\pi x dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-\cos 2\pi x)dx=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x)\Big|_0^1=\frac{1}{2};$$

2.2. $\psi_2(x)$ – начальная скорость, положим $\psi_2(x)\equiv 0$, т. е. колебание начинается без начальной скорости:

3. $\xi(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{3}x, & 0\le x\le\dfrac{3}{4}\\ 2x-2, & \dfrac{3}{4}\le x\le 1\end{cases}.$

4. $\beta=0,6.$

5. $g(x) = x^2$; $\|g(x)\|^2_{H(0,T)} = \int_0^1 g^2(x)dx = \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}$;

$x_0 = \frac{3}{4}$; $g^2(x_0) = (x_0^2)^2 = [(\frac{3}{4})^2]^2 = (\frac{9}{16})^2 = \frac{81}{256}$.

6. Функция внешнего источника

6.1. $f\left[t,u(t)\right] = barcctgau(t) - \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} < barcctgau(t) - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$;

6.2. $\|f\left[t,u(t)\right]\|^2_{H(0,T)} = \int_0^T (f\left[t,u(t)\right])^2 dt = \int_0^T (barcctgau(t) - \frac{\pi}{2})^2 dt \le \int_0^T (\frac{\pi}{6})^2 dt = \frac{\pi^2}{36} T < \infty$;

т. е. $f\left[t,u(t)\right] \in H(0,T)$; $\|f\left[t,u(t)\right]\|_{H(0,T)} = \frac{\pi\sqrt{T}}{6}$.

$\max\left|f_u\left[t,u(t)\right]\right| = \left|-\frac{ba}{(au)^2+1}\right| = |ba| = f_0$.

7. Функция критерия качества

7.1. $p\left[t,u(t)\right] = arctgau(t)$, $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} < arctgau(t) < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$;

$AB: -\frac{\sqrt{3}}{3a} < u < \frac{\sqrt{3}}{3a}$, $a > 0$;

при $a \to 0$ интервал AB расширяется до $-\infty < u < \infty$, при $a \to \infty$ интервал сужается до точки $u = 0$.

7.2. $\|p[t,u(t)]\|_{H(0,T)} = \frac{\pi\sqrt{T}}{6}$;

7.3. $p_u[t,u(t)] = \frac{a}{\left(au(t)\right)^2 + 1}$;

7.4. $\|p[t,u(t)] - p[t,v(t)]\|_{H(0,T)} \le p_0 \|u(t) - v(t)\|_{H(0,T)}$, $p_0 = a$.

8. $\alpha = 0{,}4$, $\alpha = 0{,}8$, $\alpha = 1{,}2$, $\alpha = 1{,}6$, $\alpha = 2{,}0$.

9. В силу второго условия оптимальности [1], имеем: $u_0(t) = \varphi\left[t,q(t),\beta\right]$

$$\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]} = \beta\frac{arctgau(t)\cdot\frac{a}{(au(t))^2+1}}{-\frac{ba}{(au(t))^2+1}} = -\frac{\beta}{b}arctgau(t) = q(t);$$

$$u^0(t) = -\frac{1}{a}tg(\frac{bq(t)}{\beta}) = \varphi[t,q(t),\beta] \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3a} < u^0(t) < \frac{\sqrt{3}}{3a} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3a} < -\frac{1}{a}tg\frac{bq(t)}{\beta} < \frac{\sqrt{3}}{3a}.$$

$$\|\varphi[t,q(t),\beta]\|_{H(0,T)} \le \frac{\sqrt{3}}{3a}T < \infty; \ \ \varphi_0(\beta)=\varphi_q[t,q(t),\beta]=\frac{b}{a\beta\cos^2(\dfrac{bq(t)}{\beta})} \le \frac{4b}{3a\beta}; \ -\frac{\pi}{6} < \frac{bq(t)}{\beta} < \frac{\pi}{6}.$$

Коэффициент сжатия γ находим по формуле [1]:

$$\gamma = 4\sqrt{T}[1+\frac{\lambda^2 K_0 T^2}{\lambda_1 - |\lambda|\sqrt{K_0 T^2}}](\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6})\cdot f_0\varphi_0(\beta) < 1$$

при $f_0 = a$, $\varphi_0(\beta)=\dfrac{4}{3ab\beta}$; $\gamma = 4\sqrt{T}c_0(\dfrac{1}{\lambda_1^2}+\dfrac{1}{6})ba\cdot\dfrac{4b}{3a\beta}=\dfrac{16b^2\sqrt{T}}{3\beta}c_0(\dfrac{1}{\lambda_1^2}+\dfrac{1}{6})$.

На практике значения параметров c_0, λ_1, β, T выбираем так, чтобы выполнялось неравенство $\gamma<1$, при этом значения γ существенно влияют на скорость сходимости приближений, т. е. если γ близко к нулю скорость увеличивается, если γ ближе к единице, то скорость замедляется.

Таблица 1 – Степень влияния ядра интегрального оператора на коэффициент сжимаемости γ

K_0	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
c_0	2.017233	2.097614	2.109318	2.110691	2.114401
γ	0.539378	0.329053	0.253811	0.215766	0.193396

I. Сходимость приближений решения операторного уравнения. В работах [1, 2] было установлено, что решение операторного уравнения

$$q(t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)\left[h_n-\int_0^T E_n(T,\tau,\lambda)f\left[\tau,\varphi\left(\tau,q(\tau),\beta\right)\right]d\tau\right]$$

строится методом последовательных приближений по следующей схеме:

$q_n = G\left[q_{n-1}\right]=h-G_0\left[q_{n-1}\right]$; $n=1,2,3,...$ n = 1,2,3,…, и точное решение определяется по формуле

$q^0(t)=\lim\limits_{n\to\infty}q_n(t)$. Имеет место оценка $\left\|q^0(t)-q_n(t)\right\|_{H(0,T)} \le \dfrac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|G_0\left[h(t)\right]\right\|_{H(0,T)}$,

где $G_0[h(t)]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)\int\limits_0^T E_n(T,\tau,\lambda)f[\tau,q(\tau),\beta]d\tau$.

$$\|G_0[h(t)]\|_{H(0,T)} \le 4\sqrt{T}(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2})})(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6})\|f[t,u(t)]\|_{H(0,T)} \le 4\sqrt{T}c_0(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6})\cdot\frac{\pi}{6}\sqrt{T} =$$

$$=4T\frac{\pi}{6}c_0(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6})<\infty.$$

Таблица 2 – Зависимость скорости сходимости приближений решения операторного уравнения от собственных значений краевой задачи

n	$\|q^0(t)-q_n(t)\|_{H(0,T)}$				
	$\lambda_1=0,593243$	$\lambda_1=0,791034$	$\lambda_1=0,917845$	$\lambda_1=1,008421$	$\lambda_1=1,076873$
1	14.874167	3.800441	1.132038	1.398015	1.092004
2	8.022798	1.250546	0.287324	0.301644	0.211189
3	4.327321	0.411496	0.072926	0.065085	0.040843
4	2.334062	0.135404	0.018509	0.014043	0.007899
5	1.258942	0.044555	0.004698	0.003030	0.001528

II. Сходимость приближений оптимального управления. В работе [3] показано, что сходимость приближений оптимального управления удовлетворяют оценке:

$$\|u^0(t)-u_n(t)\|_{H(0,T)} \le \|\varphi[t,q^0(t),\beta]-\varphi[t,q_n(t),\beta]\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta)\|q^0(t)-q_n(t)\|_{H(0,T)} =$$

$$=\frac{4b}{3a\beta}\|q^0(t)-q_n(t)\|_{H(0,T)} \to 0.$$

Таблица 3 – Зависимость скорости сходимости приближений оптимального управления от собственных значений краевой задачи и от параметров задачи

n	$\|u^0(t)-u_n(t)\|_{H(0,T)}$				
	$\lambda_1=0,593243$	$\lambda_1=0,791034$	$\lambda_1=0,917845$	$\lambda_1=1,008421$	$\lambda_1=1,076873$
1	33,053704	8,445424	2,515639	3,106701	2,426675
2	17,828441	2,778991	0,638497	0,670323	0,469309
3	9,616269	0,914435	0,162058	0,144633	0,090762
4	5,186804	0,300897	0,041132	0,031207	0,017553
5	2,797648	0,099011	0,010440	0,006733	0,003395

III. Сходимость приближений оптимального процесса. В работе [3] показано, что *m*–приближение оптимального процесса по резольвенте удовлетворяет оценке:

$$\|V^0(T,x)-V^m(T,x)\|_{H(Q)} \le C_1(\lambda)(|\lambda|\frac{\sqrt{K_0T^2}}{\lambda_1})^m,$$

где

$$C_1(\lambda)=\lambda\sqrt{K_0T^2}(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\frac{T\sqrt{K_0}}{\lambda_1}})[\{3T\|\psi_1(x)\|^2_{H(0,T)}+\frac{1}{\lambda_1^2}\|\psi_2(x)\|^2_{H(0,T)}+$$

$$+\frac{2g^2(x_0)T}{\lambda_1^2}\|f[t,u^0(t)]\|^2_{H(0,T)}\}(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6})]^{\frac{1}{2}}; \quad d=1-\frac{1}{\ln|\lambda|\frac{T\sqrt{K_0}}{\lambda_1}}$$

$$\left\| V^0(t,x) - V^m(t,x) \right\|_{H(Q)} \le \lambda_1 d_0 \sqrt{(3T \cdot \frac{1}{2} + \frac{2T}{\lambda_1^2} \cdot \frac{81}{256} \cdot \frac{\pi^2}{36} T)(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6})} \cdot h^m, \quad m = 1,2,3,...$$

Таблица 4 – Зависимость скорости сходимости m–приближения оптимального процесса от собственных значений краевой задачи и от параметров задачи

n	$\left\| V^0(t) - V^m(t) \right\|_{H(Q)} \le$				
	$\lambda_1 = 0,593243$	$\lambda_1 = 0,791034$	$\lambda_1 = 0,917845$	$\lambda_1 = 1,008421$	$\lambda_1 = 1,076873$
1	0,030637	0,092372	0,171145	0,173450	0,179339
2	0,000519	0,008215	0,016865	0,017286	0,018410
3	8,79224E-06	0,000731	0,001662	0,001723	0,001890
4	1,48946E-07	6,49725E-05	0,000164	0,000172	0,000194

В работе [3] показано, что *m, k*–приближение оптимального процесса с учетом приближения оптимального управления удовлетворяет оценке:

$$\left\| V^m(t,x) - V_k^m(t,x) \right\|_{H(Q)} \le C_2(\lambda) \left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \ \forall m = 1,2,3,...,$$

где $C_2(\lambda) = 2Tg(x_0) f_0 \left\{ \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T^2}{\left(\lambda_1 - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2} \right)^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right\}^{1/2}$,

$$\left\| V^m(t,x) - V_k^m(t,x) \right\|_{H(Q)} \le 2Tg(x_0) f_0 \sqrt{c_0 (\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6})} \left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} =$$

$$= \frac{9}{8} T \cdot b \cdot a \sqrt{c_0 (\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6})} \left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)}.$$

Таблица 5 – Зависимость скорости сходимости приближений m, k–приближение оптимального процесса от собственных значений краевой задачи и от параметров задачи

n	$\left\| V^m(t,x) - V_k^m(t,x) \right\| \le$				
	$\lambda_1 = 0,593243$	$\lambda_1 = 0,791034$	$\lambda_1 = 0,917845$	$\lambda_1 = 1,008421$	$\lambda_1 = 1,076873$
1	9,160001	1,828029	0,478225	0,117491	0,402684
2	4,940703	0,601518	0,544528	0,117491	0,077877
3	2,664906	0,197931	0,121379	0,025351	0,015061
4	1,437392	0,065130	0,030807	0,005470	0,002913

В работе [3] показано, что *m,k,r* – конечномерное приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке:

$$\left\|V_k^m(t,x)-V_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\left[6\left(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right)\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\psi_{1n}^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\|\psi_2(x)\|_{H(0,1)}^2+2g^2(x_0)\|f(t,u_k(t))\|_H^2\right)\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\right)\right]^{1/2}\xrightarrow[r\to\infty]{}0,\quad\forall m,k=1,2,3,....$$

$$\left\|V_k^m(t,x)-V_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\{6c_0[\frac{2}{\lambda_n^2\pi^2}+2\cdot\frac{81}{256}\cdot\frac{\pi^2}{36}T]\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\{6c_0[1+\cdot\frac{9\pi^2}{512}T]\cdot\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{r+1}{r^2}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Таблица 6 – Зависимость скорости сходимости приближений m,k,r–конечномерного приближения оптимального процесса от собственных значений краевой задачи и от параметров задачи

r	$\left\|V_k^m(t,x)-V_k^{m,r}(t,x)\right\|\le$				
	$\lambda_1=0,593243$	$\lambda_1=0,791034$	$\lambda_1=0,917845$	$\lambda_1=1,008421$	$\lambda_1=1,076873$
1	1,697251	1,730736	1,735558	1,736123	1,737648
2	1,039350	1,059855	1,062808	1,063154	1,064088
3	0,800092	0,815877	0,818150	0,818416	0,819135

В работе [3] показано, что *m,k,r*–приближение сходится к оптимальному процессу по норме гильбертова пространства *H(Q):*

$$\left\|V^0(t,x)-V_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\left\|V^0(t,x)-V^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+$$

$$+\left\|V^m(t,x)-V_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+\left\|V_k^m(t,x)-V_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0.$$

Таблица 7 – Зависимость скорости сходимости приближений оптимального процесса от собственных значений краевой задачи и от параметров задачи

n	$\left\|V_0(t,x)-V_k^{m,r}(t,x)\right\|\le$				
	$\lambda_1=0,593243$	$\lambda_1=0,791034$	$\lambda_1=0,917845$	$\lambda_1=1,008421$	$\lambda_1=1,076873$
1	10,887888	3,651137	2,384927	2,454100	2,319670
2	5,980572	0,326351	1,201051	1,197930	1,160375
3	3,465007	1,669588	0,850619	0,845489	0,836086

Выводы. Анализ данных, приведенных в таблицах 1–7, подтверждает теоретические выводы, полученные в работах [1–3]. Например, влияние интегрального оператора Фредгольма на условие сжимаемости можно проследить по численным показателям таблицы 1. Влияние остальных параметров задачи на скорость сходимости приближений можно проследить по структурам формул, согласно которым вычислены $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$.

Литература

1. *Керимбеков А.* Задача подвижного точечного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями / А.К. Керимбеков, У.Э. Дуйшеналиева // Вестник КРСУ. 2016. Т. 16. № 5. С. 51–57.
2. *Дуйшеналиева У.Э.* Решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний, описываемых фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями с подвижными точечными управлениями / У.Э. Дуйшеналиева // Вестник КРСУ. 2016. Т. 16. № 9. С. 7–11.
3. *Керимбеков А.* Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний при точечном управлении / А. Керимбеков, У.Э. Дуйшеналиева // Проблемы автоматики и управления. 2016. № 2. С. 57–62.