ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

УДК. 515.123. DOI:10.35803/1694-5298.2021.4.683-688

АБЛАБЕКОВА Ч. А.
[1]КГУСТА им. Н. Исанова Бишкек, Кыргызская Республика

ABLABEKOVA CH. A.
[1]KSUCTA n. a. N. Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic
achacha@mail.ru

РАВНОМЕРНО ПОЛНЫЕ ПО ЧЕХУ ПАРАКОМПАКТЫ

UNIFORMLY COMPLETE IN CZECH PARA COMPACTS

Бул макалада бир калыптуу, канатчалуу паракомпакт деген аныктама киргизилген. Чех боюнча толук паракомпакт тууралуу түзүлгөн теорема далилденген.

Өзөк сөздөр: *калыптуу мейкиндиктер, паракомпакт , бир калыптуу канатчалуу, чагылдыруу, Чех боюнча толук .*

В статье вводится понятие равномерных, перистых паракомпактах. Доказывается сформированная теорема о полных по Чеху паракомпактах.

Ключевые слова: *равномерное пространство, паракомпакт, равномерно-перистые, отображения, полные по Чеху .*

In this article introduced the concept of uniform, pluming paracompact. This theorem about full of Cech paracompact is proved.

Key words: *uniform spaces, paracompact, uniform pluming, mapping, full of Cech paracompact.*

Введение. В данной работе вводится равномерно перистые паракомпакты в равномерном пространстве. Устанавливается их характеристики и доказывается равномерность τ- полного по Чеху равномерного пространства. Ниже рассматриваемые равномерные R-паракомпакты. Свойства равномерных паракомпактов можно почерпнуть в книгах /1/, /4/.

В терминах полных сильных оперений сформулирована теорема о полных по Чеху паракомпактах.

Основная часть. Перечислим ряд важных определений и результатов.

Определение 1. Наименьшее кардинальное число τ называется индексом ограниченности псевдоравномерного пространства $(X,\mathscr{U})$, если псевдоравномерность $\mathscr{U}$ имеет базу $\mathfrak{B}$, состоящую из покрытий мощности $\le\tau$ и обозначается $l(\mathscr{U})$. Псевдоравномерное пространство $(X,\mathscr{U})$ называется τ-ограниченным, если $l(\mathscr{U})\le\tau$.

Определение 2. Покрытие γ равномерного пространства $(X,\mathscr{U})$ называется равномерно локально конечным, если существует такое равномерное покрытие $\alpha\in\mathscr{U}$, что каждый элемент A покрытия α пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия γ.

Определение 3. Равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$ называется равномерно паракомпактным в смысле Райса или равномерно R-паракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать равномерно локально конечное открытое покрытие.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Теорема 1. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ равномерно R-паракомпактно тогда и только тогда, когда $\alpha^{<}\in\mathcal{U}$ для любого открытого покрытия пространства $(X,\mathcal{U})$, где $\alpha^{<}=\{\cup\alpha':\alpha'\subset\alpha,\alpha'-\textit{конечно}\}$

Основой следующего определения служит теорема 1.

Определение 4. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ называется равномерно τ-перистым, если существует псевдоравномерность $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$ удовлетворяющая следующим условиям:

(1) $w(\mathcal{V})\leq\tau$;

(2) $\cap\{\alpha(x):\alpha\in\mathcal{V}\}=K_x$-бикомпактно для любого $x\in X$;

(3) Система $\{\alpha(K_x):\alpha\in\mathcal{V}\}$ является базой окрестностей бикомпакта K_x в $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ для каждого $x\in X$.

Равномерно $\aleph_0$- перистые равномерные пространства называются равномерно перистыми.

Теорема 2. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ равномерно τ-peristo тогда и только тогда, когда $(X,\mathcal{U})$ совершенно и равномерно непрерывно отображается на некоторое метрическое пространство.

Следующие определения имеют основой равномерно полные по Чеху равномерные пространства, введенные Вильхельмом /6/.

Определение 7. Пусть $(X,\mathcal{U})$ равномерное пространство, $\mathcal{H}\subset\mathcal{U}$-произвольная система равномерных покрытий. Фильтр $\mathcal{F}$ в множестве X называется $\mathcal{H}$- фильтром Коши в $(X,\mathcal{U})$, если $\alpha\cap\mathcal{F}\neq\varnothing$ для любого $\alpha\in\mathcal{H}$.

Определение 8. Пусть $(X,\mathcal{U})$ равномерное пространство и $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{U}$. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ называется $\mathcal{H}$- полным, а система $\mathcal{H}$ называется полной, если всякий $\mathcal{H}$- фильтр Коши $\mathcal{F}$ имеет по крайней мере одну точку прикосновения, т. е $\cap\{[F]:F\in\mathcal{F}\}\neq\varnothing$.

Определение 9. Индексом полноты $ic(\mathcal{U})$ равномерности $\mathcal{U}$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ называется наименьшее кардинальное число τ такое, что существует $\mathcal{H}$-полная система $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{U}$ мощности τ, т. е $|\mathcal{H}|=\tau$. Другими словами, $ic(\mathcal{U})=\min\{\tau:\mathcal{H}\subset\mathcal{U},\mathcal{H}\text{-}\textit{полна},|\mathcal{H}|\leq\tau\}$.

Если $ic(\mathcal{U})\leq\tau$ для равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$, то $(X,\mathcal{U})$ называется равномерно τ - полным по Чеху равномерным пространством. Равномерно $\aleph_0$ - полные по Чеху равномерные пространства, в точности, равномерно полные по Чеху равномерные пространства в смысле Вильхельма /6/.

Имеет место равномерный аналог теоремы З. Фролика /7/, характеристики полных по Чеху паракомпактов.

Теорема 3. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ равномерно τ- полно по Чеху тогда и только тогда, когда $(X,\mathcal{U})$ совершенно и равномерно непрерывно отображается на полное метрическое пространство.

Для определения абсолютов равномерных пространств необходимо определить «адекватные» совершенным отображениям равномерно совершенные отображения.

Определение 10. Отображение $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ в равномерное пространство $(Y,\mathcal{V})$ называется предкомпактным, если для любого

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$\alpha\in\mathcal{U}$ существует $\gamma\in\mathcal{V}$ и конечное равномерное покрытие $\beta\in\mathcal{U}$ такие, что $f^{-1}(\gamma)\wedge\beta$ вписано в α.

Определение 11. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ в равномерное пространство $(Y,\mathcal{V})$ называется равномерно совершенным, если оно предкомпактно и совершенно.

Предложение 1. Если $(B,\mathcal{U})$ - бикомпактное равномерное пространство, тогда естественная проекция $\pi_Y:(B\times Y,\mathcal{U}\times\mathcal{V})\to(Y,\mathcal{V})$ является равномерно совершенным отображением для любого равномерного пространства $(Y,\mathcal{V})$.

Предложение 2. Если $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ равномерно совершенное отображение равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ в равномерное пространство $(Y,\mathcal{V})$ и $F\subset X$ замкнутое подпространство. Тогда отображение сужения $g=f|_F:(F,\mathcal{U}\wedge F)\to(Y,\mathcal{V})$ также равномерно совершенно.

Теорема 4. Пусть $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ равномерно совершенное отображение равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ на равномерное пространство $(Y,\mathcal{V})$. Тогда следующие свойства равномерных пространств сохраняются как в сторону образа, так и в сторону прообраза:

1) полнота и $ic(\mathcal{U})\le\tau$;
2) предкомпактность;
3) τ- ограниченность;
4) равномерная локальная компактность;
5) равномерная полнота по Чеху;
6) равномерная R-паракомпактность.

Определение 12. Равномерное пространство $(\dot{X},\dot{\mathcal{U}})$ называется абсолютом равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$, если выполнены следующие условия

(A1) Существует равномерно совершенное неприводимое отображение $\pi_X:(\dot{X},\dot{\mathcal{U}})\to(X,\mathcal{U})$ равномерного пространства $(\dot{X},\dot{\mathcal{U}})$ на $(X,\mathcal{U})$.

(A2) Всякое равномерно совершенное неприводимое отображение $g:(Z,\mathcal{W})\to(\dot{X},\dot{\mathcal{U}})$ равномерного пространства $(Z,\mathcal{W})$ на равномерное пространство $(\dot{X},\dot{\mathcal{U}})$ является равномерным гомеоморфизмом.

Определение 13. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ называется равномерно экстремально несвязным, если выполнены следующие условия:

1) Топологическое пространство X является экстремально несвязным.
2) Равномерность $\mathcal{U}$ содержит максимальную предкомпактную равномерность $\mathcal{U}_\beta$ пространства X.

Теорема 5. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ обладает следующими свойствами:

1) полнота и $ic(\mathcal{U})\le\tau$;
2) предкомпактность;
3) τ-ограниченность;
4) равномерная локальная компактность;
5) равномерная полнота по Чеху;
6) равномерная R-паракомпактность

тогда и только тогда, когда такими же свойствами обладает равномерный абсолют $(\dot{X},\dot{\mathcal{U}})$.

Определение 14. Абсолютом равномерно непрерывного сюръективного отображения $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ называется любое равномерно непрерывное отображение

$$\begin{tikzcd}
(\dot{X},\dot{\mathscr{U}}) \arrow[r, "\dot{f}"] \arrow[d, "\pi_X"'] & (\dot{Y},\dot{\mathscr{V}}) \arrow[d, "\pi_Y"] \\
(X,\mathscr{U}) \arrow[r, "f"] & (Y,\mathscr{V})
\end{tikzcd}$$

$\dot{f}:(\dot{X},\dot{\mathscr{U}})\to(\dot{Y},\dot{\mathscr{V}})$ делающее диаграмму коммутативной, т.е. $\pi_Y\circ\dot{f}=f\circ\pi_X$, где $\pi_X:(\dot{X},\dot{\mathscr{U}})\to(X,\mathscr{U})$, $\pi_Y:(\dot{Y},\dot{\mathscr{V}})\to(Y,\mathscr{V})$- естественные проекции.

Теорема 6. Пусть $f:(X,\mathscr{U})\to(Y,\mathscr{V})$ произвольное сюръективное равномерно непрерывное отображение. Тогда существует равномерно непрерывный абсолют $\dot{f}:(\dot{X},\dot{\mathscr{U}})\to(\dot{Y},\dot{\mathscr{V}})$ и выполняется следующее:

1) если f предкомпактно, то $\dot{f}$ также предкомпактно;

2) если f равномерно совершенно, то $\dot{f}$ также равномерно совершенно;

3) если f равномерно совершенно и неприводимо, то $\dot{f}$ равномерный гомеоморфизм.

Теорема 7. Для того чтобы у равномерно непрерывного отображения $f:(X,\mathscr{U})\to(Y,\mathscr{V})$ существовал единственный абсолют $\dot{f}$ необходимо и достаточно, чтобы f было с-отображением

Определение 15. Равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$ называется сильно равномерно τ - перистым пространством, если существует псевдоравно мерность $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$, удовлетворяющая условиям:

(1) $w(\mathscr{V})\le\tau$;

(2) $\cap\{\alpha(x):\alpha\in\mathscr{V}\}=K_x$-бикомпактно для любого $x\in X$;

(3) Система $\{\alpha(K_x):\alpha\in\mathscr{V}\}$ является базой окрестностей бикомпакта K_x в $(X,\tau_{\mathscr{U}})$ для каждого $x\in X$;

(4) $\mathscr{U}=\sup\{\mathscr{V},\mathscr{U}_p\}$, где $\mathscr{U}_p\subset\mathscr{U}$ сильнейшая предкомпактная равномерность из $\mathscr{U}$ /1/.

Определение 16. Равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$ называется сильно равномерно τ - полным по Чеху пространством, если существует псевдо равномерность $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$, удовлетворяющая условиям:

(1) $w(\mathscr{V})\le\tau$;

(2) $\cap\{\alpha(x):\alpha\in\mathscr{V}\}=K_x$-бикомпактно для любого $x\in X$;

(3) Система $\{\alpha(K_x):\alpha\in\mathscr{V}\}$ является базой окрестностей бикомпакта K_x в $(X,\tau_{\mathscr{U}})$ для каждого $x\in X$;

(4) $\mathscr{U}=\sup\{\mathscr{V},\mathscr{U}_p\}$, где $\mathscr{U}_p\subset\mathscr{U}$ сильнейшая предкомпактная равномерность из $\mathscr{U}$;

(5) псевдоравномерное пространство $(X,\mathscr{V})$ является полным.

Теорема 8. Равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$ является сильно равномерно τ - полным по Чеху пространством тогда и только тогда, когда $(X,\mathscr{U})$ равномерно совершенно отображается на некоторое полное метрическое пространство.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Определение 17. Сильное оперение $\{\alpha_n : n\in\mathbb{N}\}$ тихоновского пространства X в Стоун - Чеховской бикомпактификации βX называется полным сильным оперением, если $\cap\{\cup\alpha : \alpha\in\mathbb{N}\}=X$.

Если тихоновское пространство X имеет в Стоун – Чеховской бикомпактификации βX полное сильное оперение, то будемговорить, что тихоновское пространство X равномерно G_δ - расположено в βX.

В терминах полных сильных оперений сформулируем теорему, следующим образом.

Теорема 9. Пусть X сильно коллективно нормальное пространство. Тогда X является полным по Чеху паракомпактным тогда и только тогда, когда X равномерно G_δ - расположен в Стоун – Чеховской бикомпактификации βX или X является полным сильно перистым пространством.

Следующая теорема устанавливает характеристику полных по Чеху паракомпактов посредством звездно направленных оперений.

Теорема 10. Тихоновское пространство X является полным по Чеху паракомпактным тогда и только тогда, когда X имеет такое звездно направленное оперение $\mathcal{P}=\{\alpha_n : n\in\mathbb{N}\}$ в Стоун – Чеховской бикомпактификации βX, что $\cap\{\alpha_n(x) : n\in\mathbb{N}\}$ - бикомпакт в X для любых $x\in X$ и $\cap\{\cup\alpha_n : n\in\mathbb{N}\}=X$.

Доказательство. Пусть тихоновское пространство X является полным по Чеху паракомпактом, тогда относительно тонкой равномерности $\mathcal{U}_f$, равномерное пространство $(X,\mathcal{U}_f)$ является равномерно полным по Чеху равномерным пространством /6/. Тогда существует такая псевдоравномерность $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}_f$ ($\mathcal{U}_f$ - состоит из всех открытых покрытий и существует база $\mathcal{B}\subset\mathcal{V}$ мощности $\leq\aleph_0$. Можем элементы базы $\mathcal{B}$ перенумеровать, т.е. положим $\mathcal{B}=\{\beta_n : n\in\mathbb{N}\}$. Из аксиом базы псевдоравномерности вытекает, что система $\mathcal{B}=\{\beta_n : n\in\mathbb{N}\}$ звездно направлена. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ положим $Exp_n=\{ExB : B\in\beta_n\}$, $ExB=\beta X\setminus[X\setminus B]_{\beta X}$ - оператор продолжения открытых множеств Шанина – Смирнова /8/. Вытекает, что система $\mathcal{P}=\{Ex\beta_n : n\in\mathbb{N}\}$ - является звездно направленной системой, что для систем $\mathcal{P}$ выполняются все условия теоремы, т.е. $\cap\{Ex\beta_n(x) : n\in\mathbb{N}\}=B_x$ - бикомпактно в X для любой точки $x\in X$ и $\cap\{\cup Ex\beta_n(x) : n\in\mathbb{N}\}=X$.

Обратно, пусть выполнено условие теоремы, т. е. X имеет в Стоун – Чеховской бикомпактификации βX такое звездно направленное оперение $\mathcal{P}=\{\alpha_n : n\in\mathbb{N}\}$, что $\cap\{\alpha_n(x) : n\in\mathbb{N}\}=B_x$ - бикомпакт в X для любых $x\in X$ и $\cap\{\cup\alpha_n : n\in\mathbb{N}\}=X$. Тогда система $\mathcal{P}\wedge X=\{\alpha_n\wedge X : n\in\mathbb{N}\}$ также является звездно направленной системой открытых покрытий на X. Ясно, что $\mathcal{P}\wedge X\subset\mathcal{U}_f$, где $\mathcal{U}_f$ - тонкая равномерность X и $\mathcal{P}\wedge X$ - есть счетная база некоторой псевдоравномерности $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}_f$ на X, т.е. $w(\mathcal{V})\leq\aleph_0$. Ясно, что $\cap\{(\alpha_n\wedge X)(x) : n\in\mathbb{N}\}=B_x$, где $B_x=\cap\{\alpha_n(x) : n\in\mathbb{N}\}$ - бикомпакт для любой точки $x\in X$. Из леммы 2.1.3. вытекает, что система $\{(\alpha_n\wedge X)(B_x) : n\in\mathbb{N}\}$ - является базой окрестностей бикомпакта B_x для любой точки $x\in X$. Использую тот факт, что $\cap\{\cup\alpha_n : n\in\mathbb{N}\}=X$,

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com
ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

доказывается, что метрическая псевдоравномерное пространство $(X,\mathcal{V})$ является полным. Итак, $(X,\mathcal{U}_f)$ - равномерно полное по Чеху равномерное пространство. Тогда равномерное пространство, $(X,\mathcal{U}_f)$ совершенно и равномерно непрерывно отображается на некоторое полное метрическое пространство. Тогда, в силу теоремы З. Фролики /7/ вытекает, что тихоновское пространство X - является полным по Чеху паракомпактом.

Теорема доказана.

Выводы и результаты исследования. В исследовании были даны понятия равномерно перистых и полных паракомпактов. Доказывается полнота паракомпакта по Чеху равномерного пространства. Ведено определение о равномерном пространстве $(X,\mathcal{U})$, которое является сильно равномерно τ - полным по Чеху пространством. А также теорема о равномерном пространстве, называемой сильно равномерно τ - полным по Чеху пространством.

Список литературы

1. Борубаев А.А. Равномерная топология [Текст] / А.А. Борубаев.– Бишкек: Илим, 2013. – 338 с.
2. Келли Дж. Л. Общая топология. [Текст] / Дж. Л. Келли. – 2.-е изд.- М.: Наука, 1980.- 431 с.
3. Аблабекова Ч. А. Functionally paracompact uniform spaces. [Текст] / А. А. Чекеев, Ч. А. Аблабекова //Book of abstracts, IV Congress of the TURKIC WORLD MATHEMATICAL SOCIETY, Baku , Azerbaijan, 2011.P. 77.
4. Шостак А.П. Характеристика класса полных по Чеху паракомпактов как классы ε-компактности [Текст] / А.П.Шостак // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. J., 1974. – Т. 22. – С. 839-844.
5. Боргес. On stratifiable spaces [Текст] / C.J.R. Borges // Pacific J. Math., 1966. – Vol. 17. – P. 1-16.
6. Вильхельм, M. Criteria of openness for relations [Текст] / M.Wilhelm //Fund. Math. , 1981. - Vol. 124. - P. 219-228.
7. Фролик. Generalization of the G_δ-property of complete metric spaces [Текст] / Z.Frolik // Czech. Math. J., 1960. – Vol. 10. – P. 359-379.
8. Энгелькинг, Р. Общая топология [Текст] / Р.Энгелькинг. - М.: Мир, 1986. – 752 с.
9. Аблабекова Ч. А. Равномерное пространство с равномерным абсолютом [Электронный ресурс] / Ч.А.Аблабекова // Вестник КГУСТА. – Бишкек: 2021 №3(73). – стр. 429-433. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=47689468
10. Аблабекова Ч. А. О перистых равномерных пространствах [Электронный ресурс] / Ч.А.Аблабекова // Вестник КГУСТА. – Бишкек: 2021 №3(73). – стр. 434-438. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=47689469