**АБЛАБЕКОВА Ч. А.**¹КГУСТА им. Н. Исанова Бишкек, Кыргызская Республика**ABLABEKOVA CH. A.**¹KSUSTA n. a. N. Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic
achacha@mail.ru**РАВНОМЕРНО ПОЛНЫЕ ПО ЧЕХУ ПАРАКОМПАКТЫ****UNIFORMLY COMPLETE IN CZECH PARA COMPACTS**

Бул макалада бир калыптуу, канатчалуу паракомпакт деген аныктама киргизилген. Чех боюнча толук паракомпакт тууралуу түзүлгөн теорема далилденген.

Өзөк сөздөр: калыптуу мейкиндиктер, паракомпакт, бир калыптуу канатчалуу, чагылдыруу, Чех боюнча толук.

В статье вводится понятие равномерных, перистых паракомпактах. Доказывается сформированная теорема о полных по Чеху паракомпактах.

Ключевые слова: равномерное пространство, паракомпакт, равномерно-перистые, отображения, полные по Чеху.

In this article introduced the concept of uniform, pluming paracompact. This theorem about full of Cech paracompact is proved.

Key words: uniform spaces, paracompact, uniform pluming, mapping, full of Cech paracompact.

Введение. В данной работе вводится равномерно перистые паракомпакты в равномерном пространстве. Устанавливаются их характеристики и доказывается равномерность τ -полного по Чеху равномерного пространства. Ниже рассматриваемые равномерные R -паракомпакты. Свойства равномерных паракомпактов можно почерпнуть в книгах [1], [4].

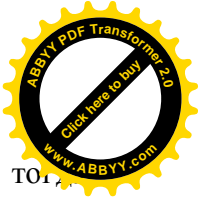
В терминах полных сильных оперений сформулирована теорема о полных по Чеху паракомпактах.

Основная часть. Перечислим ряд важных определений и результатов.

Определение 1. Наименьшее кардинальное число τ называется индексом ограниченности псевдоравномерного пространства (X, \mathcal{U}) , если псевдоравномерность \mathcal{U} имеет базу \mathfrak{B} , состоящую из покрытий мощности $\leq \tau$ и обозначается $l(\mathcal{U})$. Псевдоравномерное пространство (X, \mathcal{U}) называется τ -ограниченным, если $l(\mathcal{U}) \leq \tau$.

Определение 2. Покрытие γ равномерного пространства (X, \mathcal{U}) называется равномерно локально конечным, если существует такое равномерное покрытие $\alpha \in \mathcal{U}$, что каждый элемент A покрытия α пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия γ .

Определение 3. Равномерное пространство (X, \mathcal{U}) называется равномерно паракомпактным в смысле Райса или равномерно R -паракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать равномерно локально конечное открытое покрытие.



Теорема 1. (X, \mathcal{U}) равномерно R -паракомпактно тогда и только тогда, когда $\alpha^\circ \in \mathcal{U}$ для любого открытого покрытия пространства (X, \mathcal{U}) , где $\alpha^\circ = \{\cup \alpha' : \alpha' \subset \alpha, \alpha' - \text{конечно}\}$

Основой следующего определения служит теорема 1.

Определение 4. (X, \mathcal{U}) называется равномерно τ -перистым, если существует псевдоравномерность $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ удовлетворяющая следующим условиям:

- (1) $w(\mathcal{V}) \leq \tau$;
- (2) $\cap \{\alpha(x) : \alpha \in \mathcal{V}\} = K_x$ -бикомпактно для любого $x \in X$;
- (3) Система $\{\alpha(K_x) : \alpha \in \mathcal{V}\}$ является базой окрестностей бикомпакта K_x в $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ для каждого $x \in X$.

Равномерно \aleph_0 -перистые равномерные пространства называются равномерно перистыми.

Теорема 2. (X, \mathcal{U}) равномерно τ -перисто тогда и только тогда, когда (X, \mathcal{U}) совершенно и равномерно непрерывно отображается на некоторое метрическое пространство.

Следующие определения имеют основой равномерно полные по Чеху равномерные пространства, введенные Вильгельмом /6/.

Определение 7. Пусть (X, \mathcal{U}) равномерное пространство, $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ -произвольная система равномерных покрытий. Фильтр \mathcal{F} в множестве X называется \mathcal{K} -фильтром Коши в (X, \mathcal{U}) , если $\alpha \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ для любого $\alpha \in \mathcal{K}$.

Определение 8. Пусть (X, \mathcal{U}) равномерное пространство и $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$. Равномерное пространство (X, \mathcal{U}) называется \mathcal{K} -полным, а система \mathcal{K} называется полной, если всякий \mathcal{K} -фильтр Коши \mathcal{F} имеет по крайней мере одну точку прикосновения, т. е. $\cap \{F : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.

Определение 9. Индексом полноты $ic(\mathcal{U})$ равномерности \mathcal{U} равномерного пространства (X, \mathcal{U}) называется наименьшее кардинальное число τ такое, что существует \mathcal{K} -полная система $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$ мощности τ , т. е. $|\mathcal{K}| = \tau$. Другими словами, $ic(\mathcal{U}) = \min \{\tau : \mathcal{K} \subset \mathcal{U}, \mathcal{K} - \text{полна}, |\mathcal{K}| \leq \tau\}$.

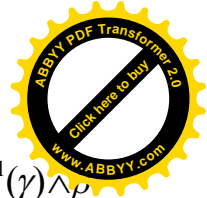
Если $ic(\mathcal{U}) \leq \tau$ для равномерного пространства (X, \mathcal{U}) , то (X, \mathcal{U}) называется равномерно τ -полным по Чеху равномерным пространством. Равномерно \aleph_0 -полные по Чеху равномерные пространства, в точности, равномерно полные по Чеху равномерные пространства в смысле Вильгельма /6/.

Имеет место равномерный аналог теоремы 3. Фролика /7/, характеристики полных по Чеху паракомпактов.

Теорема 3. (X, \mathcal{U}) равномерно τ -полно по Чеху тогда и только тогда, когда (X, \mathcal{U}) совершенно и равномерно непрерывно отображается на полное метрическое пространство.

Для определения абсолютов равномерных пространств необходимо определить «адекватные» совершенным отображениям равномерно совершенные отображения.

Определение 10. Отображение $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ равномерного пространства (X, \mathcal{U}) в равномерное пространство (Y, \mathcal{V}) называется предкомпактным, если для любого



$\alpha \in \mathcal{U}$ существует $\gamma \in \mathcal{V}$ и конечное равномерное покрытие $\beta \in \mathcal{U}$ такие, что $f^{-1}(\gamma) \wedge \beta$ вписано в α .

Определение 11. Равномерно непрерывное отображение $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ равномерного пространства (X, \mathcal{U}) в равномерное пространство (Y, \mathcal{V}) называется равномерно совершенным, если оно предкомпактно и совершенно.

Предложение 1. Если (B, \mathcal{U}) - бикompактное равномерное пространство, тогда естественная проекция $\pi_Y : (B \times Y, \mathcal{U} \times \mathcal{V}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ является равномерно совершенным отображением для любого равномерного пространства (Y, \mathcal{V}) .

Предложение 2. Если $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ равномерно совершенное отображение равномерного пространства (X, \mathcal{U}) в равномерное пространство (Y, \mathcal{V}) и $F \subset X$ замкнутое подпространство. Тогда отображение сужения $g = f|_F : (F, \mathcal{U} \wedge F) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ также равномерно совершенно.

Теорема 4. Пусть $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ равномерно совершенное отображение равномерного пространства (X, \mathcal{U}) на равномерное пространство (Y, \mathcal{V}) . Тогда следующие свойства равномерных пространств сохраняются как в сторону образа, так и в сторону прообраза:

- 1) полнота и $ic(\mathcal{U}) \leq \tau$;
- 2) предкомпактность;
- 3) τ -ограниченность;
- 4) равномерная локальная компактность;
- 5) равномерная полнота по Чеху;
- 6) равномерная R-паракомпактность.

Определение 12. Равномерное пространство $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ называется абсолютном равномерного пространства (X, \mathcal{U}) , если выполнены следующие условия

(A1) Существует равномерно совершенное неприводимое отображение $\pi_X : (\dot{X}, \dot{\mathcal{U}}) \rightarrow (X, \mathcal{U})$ равномерного пространства $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ на (X, \mathcal{U}) .

(A2) Всякое равномерно совершенное неприводимое отображение $g : (Z, \mathcal{W}) \rightarrow (\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ равномерного пространства (Z, \mathcal{W}) на равномерное пространство $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ является равномерным гомеоморфизмом.

Определение 13. Равномерное пространство (X, \mathcal{U}) называется равномерно экстремально несвязным, если выполнены следующие условия:

- 1) Топологическое пространство X является экстремально несвязным.
- 2) Равномерность \mathcal{U} содержит максимальную предкомпактную

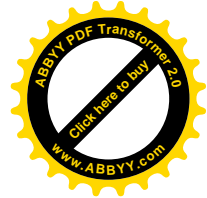
равномерность \mathcal{U}_β пространства X .

Теорема 5. Равномерное пространство (X, \mathcal{U}) обладает следующими свойствами:

- 1) полнота и $ic(\mathcal{U}) \leq \tau$;
- 2) предкомпактность;
- 3) τ -ограниченность;
- 4) равномерная локальная компактность;
- 5) равномерная полнота по Чеху;
- 6) равномерная R-паракомпактность

тогда и только тогда, когда такими же свойствами обладает равномерный абсолют $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$.

Определение 14. Абсолютном равномерно непрерывного сюръективного отображения $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ называется любое равномерно непрерывное отображение



$$\begin{array}{ccc}
 (\dot{X}, \dot{\mathcal{U}}) & \xrightarrow{\dot{f}} & (\dot{Y}, \dot{\mathcal{V}}) \\
 \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\
 (X, \mathcal{U}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{V})
 \end{array}$$

$\dot{f}: (\dot{X}, \dot{\mathcal{U}}) \rightarrow (\dot{Y}, \dot{\mathcal{V}})$ делающее диаграмму

коммутативной, т.е. $\pi_Y \circ \dot{f} = f \circ \pi_X$, где $\pi_X: (\dot{X}, \dot{\mathcal{U}}) \rightarrow (X, \mathcal{U})$, $\pi_Y: (\dot{Y}, \dot{\mathcal{V}}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ - естественные проекции.

Теорема 6. Пусть $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ произвольное сюръективное равномерно непрерывное отображение. Тогда существует равномерно непрерывный абсолют $\dot{f}: (\dot{X}, \dot{\mathcal{U}}) \rightarrow (\dot{Y}, \dot{\mathcal{V}})$ и выполняется следующее:

- 1) если f предкомпактно, то \dot{f} также предкомпактно;
- 2) если f равномерно совершенно, то \dot{f} также равномерно совершенно;
- 3) если f равномерно совершенно и неприводимо, то \dot{f} равномерный гомеоморфизм.

Теорема 7. Для того чтобы у равномерно непрерывного отображения $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ существовал единственный абсолют \dot{f} необходимо и достаточно, чтобы f было s -отображением

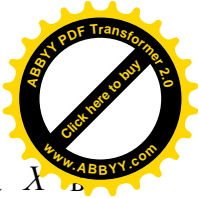
Определение 15. Равномерное пространство (X, \mathcal{U}) называется сильно равномерно τ - перистым пространством, если существует псевдоравномерность $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, удовлетворяющая условиям:

- (1) $w(\mathcal{V}) \leq \tau$;
- (2) $\bigcap \{\alpha(x) : \alpha \in \mathcal{V}\} = K_x$ -бикompактно для любого $x \in X$;
- (3) Система $\{\alpha(K_x) : \alpha \in \mathcal{V}\}$ является базой окрестностей бикompакта K_x в $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ для каждого $x \in X$;
- (4) $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{V}, \mathcal{U}_p\}$, где $\mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}$ сильнейшая предкомпактная равномерность из \mathcal{U} /1/.

Определение 16. Равномерное пространство (X, \mathcal{U}) называется сильно равномерно τ - полным по Чеху пространством, если существует псевдоравномерность $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, удовлетворяющая условиям:

- (1) $w(\mathcal{V}) \leq \tau$;
- (2) $\bigcap \{\alpha(x) : \alpha \in \mathcal{V}\} = K_x$ -бикompактно для любого $x \in X$;
- (3) Система $\{\alpha(K_x) : \alpha \in \mathcal{V}\}$ является базой окрестностей бикompакта K_x в $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ для каждого $x \in X$;
- (4) $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{V}, \mathcal{U}_p\}$, где $\mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}$ сильнейшая предкомпактная равномерность из \mathcal{U} ;
- (5) псевдоравномерное пространство (X, \mathcal{V}) является полным.

Теорема 8. Равномерное пространство (X, \mathcal{U}) является сильно равномерно τ - полным по Чеху пространством тогда и только тогда, когда (X, \mathcal{U}) равномерно совершенно отображается на некоторое полное метрическое пространство.



Определение 17. Сильное оперение $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ тихоновского пространства X в Стоун - Чеховской бикомпактификации βX называется полным сильным оперением, если $\bigcap \{\cup \alpha : \alpha \in \mathbb{N}\} = X$.

Если тихоновское пространство X имеет в Стоун - Чеховской бикомпактификации βX полное сильное оперение, то будем говорить, что тихоновское пространство X равномерно G_δ -расположено в βX .

В терминах полных сильных оперений сформулируем теорему, следующим образом.

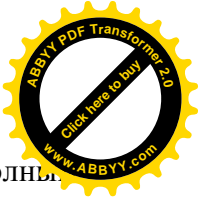
Теорема 9. Пусть X сильно коллективно нормальное пространство. Тогда X является полным по Чеху паракомпактным тогда и только тогда, когда X равномерно G_δ -расположен в Стоун - Чеховской бикомпактификации βX или X является полным сильно перистым пространством.

Следующая теорема устанавливает характеристику полных по Чеху паракомпактов посредством звездно направленных оперений.

Теорема 10. Тихоновское пространство X является полным по Чеху паракомпактным тогда и только тогда, когда X имеет такое звездно направленное оперение $\mathcal{P} = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ в Стоун - Чеховской бикомпактификации βX , что $\bigcap \{\alpha_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ - бикомпакт в X для любых $x \in X$ и $\bigcap \{\cup \alpha_n : n \in \mathbb{N}\} = X$.

Доказательство. Пусть тихоновское пространство X является полным по Чеху паракомпактом, тогда относительно тонкой равномерности \mathcal{U}_f , равномерное пространство (X, \mathcal{U}_f) является равномерно полным по Чеху равномерным пространством [6]. Тогда существует такая псевдоравномерность $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_f$ (\mathcal{U}_f - состоит из всех открытых покрытий и существует база $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ мощности $\leq \aleph_0$). Можем элементы базы \mathcal{B} перенумеровать, т.е. положим $\mathcal{B} = \{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$. Из аксиом базы псевдоравномерности вытекает, что система $\mathcal{B} = \{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$ звездно направлена. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $Exp_n = \{ExB : B \in \beta_n\}$, $ExB = \beta X \setminus [X \setminus B]_{\beta X}$ - оператор продолжения открытых множеств Шанина - Смирнова [8]. Вытекает, что система $\mathcal{P} = \{Ex\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$ - является звездно направленной системой, что для систем \mathcal{P} выполняются все условия теоремы, т.е. $\bigcap \{Ex\beta_n(x) : n \in \mathbb{N}\} = B_x$ - бикомпактно в X для любой точки $x \in X$ и $\bigcap \{\cup Ex\beta_n(x) : n \in \mathbb{N}\} = X$.

Обратно, пусть выполнено условие теоремы, т.е. X имеет в Стоун - Чеховской бикомпактификации βX такое звездно направленное оперение $\mathcal{P} = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, что $\bigcap \{\alpha_n(x) : n \in \mathbb{N}\} = B_x$ - бикомпакт в X для любых $x \in X$ и $\bigcap \{\cup \alpha_n : n \in \mathbb{N}\} = X$. Тогда система $\mathcal{P} \wedge X = \{\alpha_n \wedge X : n \in \mathbb{N}\}$ также является звездно направленной системой открытых покрытий на X . Ясно, что $\mathcal{P} \wedge X \subset \mathcal{U}_f$, где \mathcal{U}_f - тонкая равномерность X и $\mathcal{P} \wedge X$ - есть счетная база некоторой псевдоравномерности $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_f$ на X , т.е. $\mathfrak{w}(\mathcal{V}) \leq \aleph_0$. Ясно, что $\bigcap \{(\alpha_n \wedge X)(x) : n \in \mathbb{N}\} = B_x$, где $B_x = \bigcap \{\alpha_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ - бикомпакт для любой точки $x \in X$. Из леммы 2.1.3. вытекает, что система $\{(\alpha_n \wedge X)(B_x) : n \in \mathbb{N}\}$ - является базой окрестностей бикомпакта B_x для любой точки $x \in X$. Используя тот факт, что $\bigcap \{\cup \alpha_n : n \in \mathbb{N}\} = X$,



доказывается, что метрическая псевдоравномерное пространство (X, \mathcal{U}) является полным. Итак, (X, \mathcal{U}_f) - равномерно полное по Чеху равномерное пространство. Тогда равномерное пространство, (X, \mathcal{U}_f) совершенно и равномерно непрерывно отображается на некоторое полное метрическое пространство. Тогда, в силу теоремы З. Фролика [7] вытекает, что тихоновское пространство X - является полным по Чеху паракомпактом.

Теорема доказана.

Выводы и результаты исследования. В исследовании были даны понятия равномерно перистых и полных паракомпактов. Доказывается полнота паракомпакта по Чеху равномерного пространства. Ведено определение о равномерном пространстве (X, \mathcal{U}) , которое является сильно равномерно τ -полным по Чеху пространством. А также теорема о равномерном пространстве, называемой сильно равномерно τ -полным по Чеху пространством.

Список литературы

1. Борубаев А.А. Равномерная топология [Текст] / А.А. Борубаев.– Бишкек: Илим, 2013. – 338 с.
2. Келли Дж. Л. Общая топология. [Текст] / Дж. Л. Келли. – 2.-е изд.- М.: Наука, 1980.- 431 с.
3. Аблабекова Ч. А. Functionally paracompact uniform spaces. [Текст] / А. А. Чекеев, Ч. А. Аблабекова //Book of abstracts, IV Congress of the TURKIC WORLD MATHEMATICAL SOCIETY, Baku , Azerbaijan, 2011.P. 77.
4. Шостак А.П. Характеристика класса полных по Чеху паракомпактов как классы ϵ -компактности [Текст] / А.П.Шостак // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. J., 1974. – Т. 22. – С. 839-844.
5. Боргес. On stratifiable spaces [Текст] / C.J.R. Borges // Pacific J. Math., 1966. – Vol. 17. – P. 1-16.
6. Вильгельм, М. Criteria of openness for relations [Текст] / M.Wilhelm //Fund. Math. , 1981. - Vol. 124. - P. 219-228.
7. Фролик. Generalization of the G_δ -property of complete metric spaces [Текст] / Z.Frolik // Czech. Math. J., 1960. – Vol. 10. – P. 359-379.
8. Энгелькинг, Р. Общая топология [Текст] / Р.Энгелькинг. - М.: Мир, 1986. – 752 с.
9. Аблабекова Ч. А. Равномерное пространство с равномерным абсолютум [Электронный ресурс] / Ч.А.Аблабекова // Вестник КГУСТА. – Бишкек: 2021 №3(73). – стр. 429-433. Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=47689468>
10. Аблабекова Ч. А. О перистых равномерных пространствах [Электронный ресурс] / Ч.А.Аблабекова // Вестник КГУСТА. – Бишкек: 2021 №3(73). – стр. 434-438. Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=47689469>