УДК 532.516 DOI:10.35803/1694-5298.2021.4.700-711

ТОКТАКУНОВ Т., ОСМОНОВ К.Т.
[1]КГТУ им. И. Раззакова, Бишкек, Кыргызская Республика
[2]КГУСТА им. Н. Исанова, Бишкек, Кыргызская Республика

TOKTAKUNOV T., OSMONOV K.T.
[1]KSTUn.a. I. Razzakov, Bishkek, Kyrgyz Republic
[2]KSUCTA n.a. N Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic
boss-toko@mail.ru fdoinit@mail.ru

ТРЕХМЕРНЫЙ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ЗАКРУГЛЕНИИ ОТКРЫТОГО КАНАЛА

THREE-DIMENSIONAL MODEL FOR NUMERICAL STUDY OF THE MOVEMENT OF A VISCOUS LIQUID ON THE ROUNDING OF AN OPEN CHANNEL

Макалада Рейнольдстун чоң сандарында туурасынан кесилиши тик бурчтуу жантайган ачык каналдын бурулушундагы кысылбаган илээшкек суюктуктун статистикалык стационардык агуусу каралат. Негизги агуунун ийри сызыктуу огу боюнча чектик шарты мезгилдүү болгон үч өлчөмдүү сандык модель сунушталган. Каналдын дубалчасында жана дубалчанын жанында үч катмарлуу чектик шарттары коюлуп, ал эми эркин бетте – нөлдүк жаныма чыңалуусунун шарты коюлат. Маселени чыгаруу үчүн, вертикалдык багыт боюнча косинусоидалык спектралдык функциялары болгон, горизонталдык координаттар боюнча бөлчөктүү кадамдар методунун предиктор-корректор схемалары колдонулат. Кесилиштин изопериметрлик оптималдаштыруу параметри болгон маселени чыгаруунун жалпы алгоритми түзүлгөн.

Өзөк сөздөр: *үч өлчөмдүү сандык модель, Рейнольдс саны, үч катмарлуу чектик шарт, бөлчөктүү кадамдар методу, статистикалык стационардык агуу, спектралдык функция, изопериметрлик оптималдануучу параметр, жалпы алгоритм.*

В статье рассматривается статистически стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости на повороте открытого наклоненного канала прямоугольного поперечного сечения при больших числах Рейнольдса. Предложен трехмерный численный модель с периодическим граничным условием по криволинейной оси основного течения. На стенке и около стенки канала ставится трехслойные граничные условия, а на свободной поверхности – условия нулевого касательного напряжения. Для решения задачи используются схемы предиктор-корректор метода дробных шагов по горизонтальным координатам и с косинусоидальной спектральной функцией по вертикальной координате. Составлен общий алгоритм решения задачи с изопериметрически оптимизируемым параметром сечения.

Ключевые слова: *трехмерный численный модель, число Рейнольдса, трехслойное граничное условие, метод дробных шагов, статистически стационарное течение, спектральная функция, изопериметрически оптимизируемый параметр, общий алгоритм.*

The article considers the statistically stationary flow of a viscous incompressible liquid at the turn of an open inclined channel of a rectangular cross-section with large Reynolds numbers. A three-dimensional numerical model with a periodic boundary condition along the curvilinear axis of the main flow is proposed. Three-layer boundary conditions are placed on the wall and near the channel wall, and zero tangential voltage conditions are placed on the free surface. To solve the problem, the predictor-corrector scheme of the method of fractional steps by horizontal coordinates *and with a cosine-oidal spectral function by vertical coordinate are used. A general algorithm for solving the problem with an isoperimetrically optimized cross-section parameter is compiled.*

Key words: *three-dimensional numerical model, Reynolds number, three-layer boundary condition, fractional step method, statistically stationary flow, spectral function, isoperimetrically optimized parameter, general algorithm.*

Вопрос о движении воды на повороте открытых русел наряду с общим вопросом распределения скоростей в открытых руслах давно привлекал к себе внимание исследователей. В 1876 г. Дж. Томсон [2] опытным путем впервые обнаружил явление поперечной циркуляции на изгибе русла и дал ему правильное физическое объяснение. Еще ранее И. Буссинеск [1] теоретически решил задачу о ламинарном движении вязкой жидкости по плавно изогнутой широкой прямоугольной трубе.

Представим себе открытый поток, движущийся с начала в прямолинейном русле, и рассмотрим, какие изменения произойдут в нем, если, начиная с некоторого сечения, русло приобретет плановую кривизну. Благодаря кривизне граничных поверхностей плановую кривизну постепенно получат не только крайние струйки потока, непосредственно примыкающие к стенкам, но и струи, расположенные вдали от стенок.

В работе [3] отмечено, что при плановом искривлении струй возникает: 1) поперечный уклон свободной поверхности; 2) поперечная циркуляция; 3) вертикальные составляющие скорости усиливают обычный для турбулентного потока обмен количеством движения между отдельными слоями текущей жидкости, что вызывает перераспределение скоростей по ширине потока; 4) при известных условиях появляется возможность отжима потока от стенок и образования водоворотных зон; 5) изменение структуры потока на закруглении, увеличение неравномерности распределения скоростей по живому сечению, удлинение пути движения отдельных частиц благодаря винтовому характеру движения, усиление объема количествами движения между отдельными структурами вызвают усиления диссипации механической энергии, вследствие чего происходят потери энергии.

Для решения задач движения потока на закругления часто приходятся пользоваться уравнениями полуэмпирических теорий турбулентности. При выводе их можно основываться на известных уравнениях Рейнольдса, получаемых в результате операции осреднения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости.

Течение в открытом наклоненном канале строго показывает трехмерное явление. Поэтому предлагаются трехмерные численные модели для течения в открытых каналах. Они подвергаются ограничению, чтобы применить вышеупомянутой модели для конкретных задач. В этой модели трехмерные неизвестные переменные разлагаются в ряды косинуса, показывающие разделение переменных в вертикальном направлении. Рассмотрение бесконечного в осевом направлении канала снимает вопрос о краевых условиях на входе и выходе конечного канала, что сильно усложняет задачу решения уравнений Навье - Стокса.

Уравнения движения турбулентного потока записываются в цилиндрических координатах [3]. К ним прибавляется уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial t} + L'\vartheta_\theta + \frac{\vartheta_r \vartheta_\theta}{r} + \vartheta_z \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial z} = gI_\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{r\partial\theta} + D'\vartheta_\theta + A_h \frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial \vartheta_r}{r\partial\theta} - \vartheta_\theta\right); \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \vartheta_r}{\partial t} + L'\vartheta_r - \frac{\vartheta_\theta^2}{r} + \vartheta_z \frac{\partial \vartheta_r}{\partial z} = -gI_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + D'\vartheta_r - A_h \frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial \vartheta_\theta}{r\partial\theta} - \vartheta_r\right); \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \vartheta_z}{\partial t} + L'\vartheta_z + \vartheta_z \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + D'\vartheta_z; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} + \frac{\vartheta_r}{r} + \frac{\partial \vartheta_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} = 0, \qquad (4)$$

где

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$L' = \vartheta_r \frac{\partial}{\partial r} + \vartheta_\theta \frac{\partial}{r\partial\theta},$$

$$D' = \frac{\partial}{\partial r}\left(A_h \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_h \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_v \frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{1}{r} A_h \frac{\partial}{\partial r},$$

Здесь r, θ, z - цилиндрические координаты точки; $\vartheta_r, \vartheta_\theta, \vartheta_z$ - проекции скорости на направление координатных линий, p - давление; g - ускорение силы тяжести; A_v и A_h - вертикальный и горизонтальный коэффициенты турбулентной вязкости; ρ - плотность жидкости, которая предполагается постоянным; I_r и I_θ - средние уклоны дна по осевым направлениям r и θ. Рассматривая быстро измененные профиля скоростей жидкости около дна канала, мы используем условие скорости скольжения в этих плоскостях.

По предположению, что в каналах горизонтальный масштаб длины станет намного большим, чем масштаб глубины жидкости, уравнение (3) становится гидростатическим приближением, т.е.

$$p = \rho g(\zeta - z), \qquad (5)$$

где ζ - уровень жидкости (воды) над плоскостью r, θ. Здесь предполагается, что атмосферное давление на свободной поверхности равно нулю. Интегрируя уравнение (4) от дна жидкости (z = 0) до произвольной глубины z, получим

$$\vartheta_z(z) = -\frac{\partial}{\partial r}\int_0^z \vartheta_r dS - \frac{1}{r}\int_0^z \vartheta_r dS - \frac{\partial}{r\partial\theta}\int_0^z \vartheta_\theta dS, \qquad (6)$$

где используется правило Лейбница. В работе [4] напоминается, что гравитационное волновое движение, в котором поперечная компонента скорости движения частиц насколько мала, т.е. амплитуда колебаний в волне значительно меньше по сравнению с длиной волны в продольном направлении течения, что вертикальная компонента скорости движения точек поверхности совпадает с производной по времени от смещения ζ:

$$\vartheta_z(z) = \frac{\partial\zeta}{\partial t}. \qquad (7)$$

Упрощение уравнения движения можно произвести в случае руслового потока, у которого глубина значительно меньше радиуса закругления. Для широкого потока отношение глубины h к полуширине b и к радиусу закругления $r = L + R$ (расстояние от центра системы отсчета до координатной точки) - величины малые, где L – расстояние от системы отсчета до внутренней боковой стенки; R – расстояние от внутренней боковой стенки до координаты рассматриваемой точки.

С погрешностью h/r для безнапорного потока со свободной поверхностью можно принять, что распределение давления по вертикали следует гидростатическому закону (5), где $\zeta = z_0$ - координата точки свободной поверхности потока в начале движения; P - избыточное давление сверх атмосферного. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho g \frac{\partial z_0}{\partial r} = \rho g I_r, \qquad \frac{\partial P}{\partial\theta} = \rho g r \frac{\partial z_0}{r\partial\theta} = -\rho g r I_\theta. \qquad (8)$$

Здесь $I_r = \dfrac{\partial z_0}{\partial r}$, $\qquad I_\theta = -\dfrac{\partial z_0}{r\partial\theta}$ (8a)

- поперечный, продольный уклоны свободной поверхности жидкости.

Мы получаем систему уравнений установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в широком канале.

Подставляя уравнения (5) и (6) в уравнения (1) и (2), и интегрируя уравнение (4) от дна жидкости до свободной поверхности ζ, и используя условие на свободной поверхности, получаем так называемые квази-трехмерные уравнения модели как в [5]

$$\frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial t}+L'\vartheta_\theta+\frac{\vartheta_r\vartheta_\theta}{r}-\left(\frac{\partial}{\partial r}\int_0^z \vartheta_r dz+\frac{1}{r}\int_0^z \vartheta_r dz+\frac{\partial}{r\partial\theta}\int_0^z \vartheta_\theta dz\right)\frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial z}=$$
$$gI_\theta-g\frac{\partial\zeta}{r\partial\theta}+D'\vartheta_\theta+A_h\frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial\vartheta_r}{r\partial\theta}-\vartheta_\theta\right); \qquad (9)$$

$$\frac{\partial \vartheta_r}{\partial t}+L'\vartheta_r-\frac{\vartheta_\theta^2}{r}-\left(\frac{\partial}{\partial r}\int_0^z \vartheta_r dz+\frac{1}{r}\int_0^z \vartheta_r dz+\frac{\partial}{r\partial\theta}\int_0^z \vartheta_\theta dz\right)\frac{\partial \vartheta_r}{\partial z}=$$
$$-gI_r-g\frac{\partial\zeta}{\partial r}+D'\vartheta_r-A_h\frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}-\vartheta_r\right); \qquad (10)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\zeta \vartheta_r dz+\frac{1}{r}\int_0^\zeta \vartheta_r dz+\frac{\partial}{r\partial\theta}\int_0^\zeta \vartheta_\theta dz=0. \qquad (11)$$

Эти уравнения в расширенной записи представляются как

$$\frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial t}+\vartheta_r\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r}+\vartheta_\theta\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\vartheta_r\vartheta_\theta}{r}-\left(\frac{\partial}{\partial r}\int_0^z \vartheta_r dz+\frac{1}{r}\int_0^z \vartheta_r dz+\frac{\partial}{r\partial\theta}\int_0^z \vartheta_\theta dz\right)\frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial z}=gI_\theta-$$
$$g\frac{\partial\zeta}{r\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial r}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}A_h\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r}+A_h\frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial\vartheta_r}{r\partial\theta}-\vartheta_\theta\right); \qquad (9')$$

$$\frac{\partial \vartheta_r}{\partial t}+\vartheta_r\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}+\vartheta_\theta\frac{\partial\vartheta_r}{r\partial\theta}-\frac{\vartheta_\theta^2}{r}-\left(\frac{\partial}{\partial r}\int_0^z \vartheta_r dz+\frac{1}{r}\int_0^z \vartheta_r dz+\frac{\partial}{r\partial\theta}\int_0^z \vartheta_\theta dz\right)\frac{\partial \vartheta_r}{\partial z}=-gI_r-$$
$$g\frac{\partial\zeta}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_r}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial\vartheta_r}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}A_h\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}-A_h\frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}-\vartheta_r\right); \qquad (10')$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{\zeta+h} \vartheta_r dz+\frac{1}{r}\int_0^{\zeta+h} \vartheta_r dz+\frac{\partial}{r\partial\theta}\int_0^{\zeta+h} \vartheta_\theta dz=0. \qquad (11)$$

последнее уравнение можно представить в дифференциальной форме

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}\left[\vartheta_r\cdot(h+\zeta)\right]+\frac{1}{r}\int_0^{\zeta+h}\vartheta_r dz+\frac{\partial}{r\partial\theta}\left[\vartheta_\theta\cdot(h+\zeta)\right]=0, \qquad (11')$$

или, раскрывая скобки в $(11')$, можно записать в виде

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{1}{r}\int_0^{\zeta+h}\vartheta_r dz+\vartheta_r\frac{\partial\zeta}{\partial r}+\vartheta_\theta\frac{\partial\zeta}{r\partial\theta}=-(h+\zeta)\left(\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}+\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}\right). \qquad (11'')$$

Уравнения $(9')$ - (11), система уравнений в частных производных с тремя неизвестными ϑ_r, ϑ_θ, ζ, являются базисными уравнениями течения в открытом канале.

Чтобы оценить турбулентную вязкость нужно использовать турбулентные модели, которые являются сложными, чтобы их численно решать. В данном случае эта переменная оценивается из следующей формулы:

$$A_h=K_h\cdot\vartheta_{\theta*}\cdot d=K_h(g\cdot h\cdot I)^{1/2}d=K_h\cdot n_{sh}\left(\overline{\vartheta_\theta}^2+\overline{\vartheta_r}^2\right)^{1/2}\cdot d^{5/6}, \qquad (12')$$

$$A_v=K_v\cdot\vartheta_{\theta*}\cdot d=K_v(g\cdot h\cdot I)^{1/2}d=K_v\cdot n_{sh}\left(\overline{\vartheta_\theta}^2+\overline{\vartheta_r}^2\right)^{1/2}\cdot d^{5/6}, \qquad (12'')$$

которая получается согласно [6] путем выравнивания турбулентной вязкости с турбулентной диффузией, в которой $\overline{\vartheta}_\theta$ и $\overline{\vartheta}_r$ - компоненты вертикально осредненной скорости по θ и r; n_{sh} - коэффициент шероховатости Маннинга; K – постоянная, $K_h = 6.0$ для A_h и $K_v = 0.068$ для A_v; $\vartheta_{\theta *}$ - скорость трения.

Движение жидкости изучается в канале прямоугольного поперечного сечения, где будем ввести обозначения: b - ширина поперечного сечения канала $d = \zeta + h$ - глубина жидкости с изменением уровня свободной поверхности ζ .

Если длина участка поворота достаточно велика, то в известных случаях поток стремится к некоторому стабильному состоянию, при котором картина распределения скоростей во всех сечениях почти одинакова, а зависимость от координаты θ становится статистически стационарным и граничные условия по оси θ может быть определены периодическими граничными условиями.

Граничные условия. На свободной поверхности жидкости

$$\left.\frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial z}\right|_{z=\zeta+h} = 0, \qquad (12a)$$

$$\left.\frac{\partial \vartheta_r}{\partial z}\right|_{z=\zeta+h} = 0, \qquad (12б)$$

$$\zeta\Big|_{z=\zeta+h} = \zeta(r,\theta), \qquad (12в)$$

где $0 \le z \le h + \zeta$.

По радиальной оси, где $L \le r \le L+b$, на границах стенок выполняются условия прилипания:

$$\vartheta_r\big|_{r=L} = 0; \qquad (13a)$$

$$\vartheta_\theta\big|_{r=L} = 0; \qquad (13б)$$

$$\vartheta_r\big|_{r=L+b} = 0; \qquad (13в)$$

$$\vartheta_\theta\big|_{r=L+b} = 0. \qquad (13г)$$

По вертикальной оси, где $0 \le z \le h + \zeta$, на дне закругленного канала также выполняются условия прилипания:

$$\vartheta_r\big|_{z=0} = 0; \qquad (14a)$$

$$\vartheta_\theta\big|_{z=0} = 0. \qquad (14б)$$

С удалением от стенки скорость течения резко возрастает. Возрастание в большинстве случаев происходит в очень тонком слое толщиной δ_l, течение в котором определяется только молекулярной вязкостью жидкости и величиной напряжения сдвига. Поэтому слой называется вязким слоем, или ламинарным подслоем (ламинарной пленкой), т.е. предполагают в нем отсутствие пульсации скорости. Выше вязкого слоя поток имеет турбулентный характер. Принято считать, что резкого перехода от вязкого слоя к турбулентной области течения нет. Поэтому зону перехода обычно выделяют в отдельный переходный слой, течение в котором будет зависеть как от молекулярной, так и от турбулентной вязкости.

Над переходным слоем располагается область полностью развитое турбулентное течение, которое определяется только турбулентными характеристиками, где молекулярная вязкость уже не играет заметной роли.

На границе ламинарного подслоя толщиной δ_l будут выполняться

$$\vartheta_r\Big|_{r=L+\delta_l} = 5{,}6\,\vartheta_{r*} = \frac{g\delta_l}{\nu} n_{sh}^{\,2}\ \overline{\vartheta_r}\cdot(\overline{\vartheta_\theta}^{\,2}+\overline{\vartheta_r}^{\,2})^{1/2}\cdot d^{5/6}; \qquad (15а)$$

$$\vartheta_\theta\Big|_{r=L+\delta_l} = 5{,}6\,\vartheta_{\theta*} = \frac{g\delta_l}{\nu} n_{sh}^{\,2}\ \overline{\vartheta_\theta}\cdot(\overline{\vartheta_\theta}^{\,2}+\overline{\vartheta_r}^{\,2})^{1/2}\cdot d^{5/6}; \qquad (15б)$$

$$\vartheta_r\Big|_{r=L+\text{b}-\delta_l} = 5{,}6\,\vartheta_{r*} = \frac{g\delta_l}{\nu} n_{sh}^{\,2}\ \overline{\vartheta_r}\cdot(\overline{\vartheta_\theta}^{\,2}+\overline{\vartheta_r}^{\,2})^{1/2}\cdot d^{5/6}; \qquad (15в)$$

$$\vartheta_\theta\Big|_{r=L+\text{b}-\delta_l} = 5{,}6\,\vartheta_{\theta*} = \frac{g\delta_l}{\nu} n_{sh}^{\,2}\ \overline{\vartheta_\theta}\cdot(\overline{\vartheta_\theta}^{\,2}+\overline{\vartheta_r}^{\,2})^{1/2}\cdot d^{5/6}; \qquad (15г)$$

$$\vartheta_r\Big|_{z=\delta_l} = 5{,}6\,\vartheta_{r*} = \frac{g\delta_l}{\nu} n_{sh}^{\,2}\ \overline{\vartheta_r}\cdot(\overline{\vartheta_\theta}^{\,2}+\overline{\vartheta_r}^{\,2})^{1/2}\cdot d^{5/6}; \qquad (15д)$$

$$\vartheta_\theta\Big|_{z=\delta_l} = 5{,}6\,\vartheta_{\theta*} = \frac{g\delta_l}{\nu} n_{sh}^{\,2}\ \overline{\vartheta_\theta}\cdot(\overline{\vartheta_\theta}^{\,2}+\overline{\vartheta_r}^{\,2})^{1/2}\cdot d^{5/6}. \qquad (15е)$$

На границе турбулентного подслоя толщиной δ_t выполняются

$$\vartheta_r\Big|_{r=L+\delta_l+\delta_t} = 2{,}44\,\vartheta_{r*} ln\,\frac{\vartheta_{r*}\delta_t}{\nu} + 5{,}5; \qquad (16а)$$

$$\vartheta_\theta\Big|_{r=L+\delta_l+\delta_t} = 2{,}44\,\vartheta_{\theta*} ln\,\frac{\vartheta_{\theta*}\delta_t}{\nu} + 5{,}5; \qquad (16б)$$

$$\vartheta_r\Big|_{r=L+\text{b}-\delta_l-\delta_t} = 2{,}44\,\vartheta_{r*} ln\,\frac{\vartheta_{r*}\delta_t}{\nu} + 5{,}5; \qquad (16в)$$

$$\vartheta_\theta\Big|_{r=L+\text{b}-\delta_l-\delta_t} = 2{,}44\,\vartheta_{\theta*} ln\,\frac{\vartheta_{\theta*}\delta_t}{\nu} + 5{,}5, \qquad (16г)$$

$$\vartheta_r\Big|_{z=\delta_l+\delta_t} = 2{,}44\,\vartheta_{r*} ln\,\frac{\vartheta_{r*}\delta_t}{\nu} + 5{,}5; \qquad (16д)$$

$$\vartheta_\theta\Big|_{z=\delta_l+\delta_t} = 2{,}44\,\vartheta_{\theta*} ln\,\frac{\vartheta_{\theta*}\delta_t}{\nu} + 5{,}5. \qquad (16е)$$

где из соотношений $(12')$ и $(12'')$ можно вывести

$$\vartheta_{\theta*} = \frac{A_h}{K_h\cdot d} = n_{sh}(\overline{\vartheta_\theta}^{\,2}+\overline{\vartheta_r}^{\,2})^{1/2}\cdot d^{-1/6}; \qquad (17')$$

$$\vartheta_{r*} = \frac{A_v}{K_v\cdot d} = n_{sh}(\overline{\vartheta_\theta}^{\,2}+\overline{\vartheta_r}^{\,2})^{1/2}\cdot d^{-1/6}. \qquad (17'')$$

Исходя из статистической стационарности течения, путем использования одного периода по продольной оси θ: $0\le\theta\le\Theta$, т. е. там, где для периода времени $0\le t\le T$ предполагается происхождение одинаковой последовательно расположенной картины течения по всей оси $-\infty\le\theta\le\infty$, будем выписывать условия периодичности

$$\vartheta_\theta(\theta, r, z, t) = \vartheta_\theta(\theta+\Theta, r, z, t); \qquad (18а)$$

$$\vartheta_r(\theta, r, z, t) = \vartheta_r(\theta+\Theta, r, z, t); \qquad (18б)$$

$$\zeta(\theta, r, t) = \zeta(\theta+\Theta, r, t). \qquad (18в)$$

Так как цель исследования включает, помимо получения основного решения, и дальнейшего нахождения оптимального решения, переход к безразмерным величинам целесообразно осуществить, согласно изопериметрической поставке задачи с введением параметра формы сечения. Для пространственно-периодического течения будем использовать обозначения для волнового числа

$$\alpha_0 = \frac{2\pi}{(L+b/2)\Theta} = \frac{2\pi}{\lambda \cdot \chi}, \qquad (L + b/2)\,\Theta = \chi \cdot \lambda\,, \tag{19}$$

отсюда $\lambda = \dfrac{(L+b/2)\Theta}{\chi}$ - отношение длины периодичности к половине длины смоченного периметра поперечного сечения канала.

Сопоставление характерной величины $(L + b/2)\,\Theta$ в продольном направлении за период времени T с учетом размерностей в системе уравнений, при стремлении к приведенным единым параметрам, указывает на первый взгляд к следующим соотношениям:

$$T \sim \frac{\chi}{U_\theta}; \quad \frac{(L+r)\theta}{t} \sim \frac{(L+r)\Theta}{T}; \qquad \frac{(L+b/2)\Theta}{T} = \lambda\, U_\theta\,; \quad (L+b/2)\Theta = T \cdot \lambda \cdot U_\theta\,. \tag{19$'$}$$

В качестве безразмерного параметра формы поперечного сечения выберем $\beta = \dfrac{2h}{b}$ - отношение глубины к полуширине сечения канала, а характерную длину будем связывать с половиной длины смоченного периметра [9]: χ, где $\chi = h + \dfrac{b}{2}$. Тогда величины b и h:

$$b = \frac{2}{1+\beta}\chi\,; \; h = \frac{\beta}{1+\beta}\chi\,; \qquad L \le r \le L + \frac{2}{1+\beta}\chi; \;\; 0 \le z \le \frac{\beta}{1+\beta}\chi + \zeta. \tag{19$''$}$$

Для компонентов скоростей и времени оценим размерные величины, обозначая

$$\vartheta_\theta = U_\theta \cdot \bar{\vartheta}_\theta\,; \qquad \vartheta_r = U_\theta \cdot \bar{\vartheta}_r\,; \qquad t = T \cdot \bar{t}\,; \qquad \vartheta_{\theta*} = U_\theta\, \bar{\vartheta}_{\theta*}\,, \tag{20}$$

$$A_h = \nu_T\, \bar{A}_h\,; \qquad A_v = \nu_T\, \bar{A}_v\,,$$

где U_θ - характерная скорость по оси продольного закругленного потока θ, и для масштаба осредненной динамической скорости, $\bar{\vartheta}_\theta$, $\bar{\vartheta}_r$, $\bar{\vartheta}_{\theta*}$ - безразмерные компоненты скорости.

Одним из способов поиска вторичных течений, периодических одновременно по времени t и по продольной координате θ предполагает, что поля скоростей имеют виды

$$\vartheta_\theta(\,(L + r)\theta\,,\, r,\, z\,,\, t\,) = \vartheta_\theta(\,(L + r)\theta + ct,\, r,\, z)\,; \tag{21а}$$

$$\vartheta_r(\,(L + r)\theta\,,\, r,\, z\,,\, t\,) = \vartheta_r(\,(L + r)\theta + ct,\, r,\, z), \tag{21б}$$

где зависимости скоростей от $\xi = (L + r)\theta - ct$ периодические. При этом проблема поиска вторичного течения может быть сведена к решению специальной задачи, в которой неизвестная скорость c имеет смысл собственного значения. Достоинство этого метода заключается в том, что он уменьшает число независимых переменных, от которых существенно зависит вторичное течение. Он применим для поиска одновременно по t и по $(L + r)\theta$ вторичных течений. Тогда из соотношений (19$'$) могут быть сопоставлены:

$$\frac{(L+r)\theta}{c \cdot t} \sim \frac{(L+r)\Theta}{c \cdot T} = \frac{\lambda \cdot U_\theta}{c} \sim 1; \qquad c \sim \lambda \cdot U_\theta. \tag{19$'''$}$$

В работе [7] для масштаба t используется $t = \sigma^{-1}$ (σ - частота прилива), скоростной масштаб U (амплитуда скорости в среднем из открытой границы), поскольку уравнение неразрывности предлагает масштабирование ζ с $\dfrac{U \cdot H}{\sigma \cdot \chi}$.

Определяются следующие безразмерные параметры

$$S_t = \frac{U_\theta}{\sigma \cdot \chi}$$ - число Струхаля, $$F_r = \frac{U_\theta}{(g \cdot h)^{1/2}} = \frac{U_\theta}{(g \cdot \chi)^{1/2}} \left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$$ - число Фруда,

$$\lambda = \frac{(\mathrm{L}+\mathrm{b}/2)\Theta}{\chi} = F_r \cdot \mathrm{S_t}^{-1} = \frac{U_\theta}{(g\cdot\chi)^{1/2}}\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{U_\theta}{\sigma\cdot\chi}\right)^{-1} = \frac{\sigma\cdot\chi^{1/2}}{g^{1/2}}\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (22а)$$

Для безразмерных величин для учета изопериметрических параметров будем далее обозначать:

$$\bar{b} = \frac{b}{\chi} = \frac{2}{1+\beta}; \qquad \bar{\delta}_t = \frac{\delta_t}{\chi}\frac{1+\beta}{2}; \qquad \bar{\delta}_l = \frac{\delta_l}{\chi}\frac{1+\beta}{\beta}, \qquad (22б)$$

$$\bar{d}_{cp} = \frac{h}{\chi} = \frac{\beta}{1+\beta}, \qquad \bar{d} = \frac{\beta}{1+\beta} + \bar{\zeta}; \qquad \bar{\delta}_t = \frac{\delta_t}{\chi}\frac{1+\beta}{\beta}; \qquad \bar{\delta}_l = \frac{\delta_l}{\chi}\frac{1+\beta}{\beta}. \qquad (22в)$$

Рассматриваемая область изменения пространственных координат в безразмерных величинах (без учета пограничных слоев) записываются как:

$$0 \le \overline{(\mathrm{L}+r)\theta} \le \lambda; \qquad 0 \le \bar{r} \le \frac{2}{1+\beta}; \qquad (22')$$

$$0 \le \bar{z} \le \bar{\zeta} + \frac{\beta}{1+\beta}. \qquad (22'')$$

Чтобы охарактеризовать турбулентное течение выразим размерности скоростей через связь коэффициента турбулентной вязкости, характерной длины и числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\chi\cdot U_\theta}{\nu_T}. \qquad (23')$$

Исходя из подобия течения и модели включающее члены, зависящие от силы тяжести можно также ввести в обозначения число Фруда $F_r = \frac{U_\theta^2}{g\cdot\chi}$.

С учетом обозначений (17)-($23'$) система уравнений ($9'$) - (11), удовлетворяющие граничные условия (12а)-(16е), переписывается как с учетом числа Струхаля

$$S_t = \frac{\chi}{T\cdot U_\theta} \sim 1, \qquad (23''')$$

предположительно имеющим единичный порядок, т.е. при выполнении предположений ($19'$) приводятся к безразмерным величинам. Исходя из этого, разделяя обе части уравнений (9) и ($10'$) на $U_\theta^{\,2}/\chi$, можно их привести к безразмерным формам записей.

$$S_t\frac{\partial\bar{\vartheta}_\theta}{\partial\bar{t}} + \left[\bar{\vartheta}_r\frac{\partial\bar{\vartheta}_\theta}{\partial\bar{r}} + \bar{\vartheta}_r\frac{\partial\bar{\vartheta}_\theta}{\partial\bar{r}} + \bar{\vartheta}_\theta\frac{\partial\bar{\vartheta}_\theta}{\bar{r}\partial\bar{\theta}} + \frac{\bar{\vartheta}_r\bar{\vartheta}_\theta}{\bar{r}} - \left(\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\int_0^{\bar{z}}\bar{\vartheta}_r d\bar{z} + \frac{1}{\bar{r}}\int_0^{\bar{z}}\bar{\vartheta}_r d\bar{z} + \frac{\partial}{\bar{r}\partial\bar{\theta}}\int_0^{\bar{z}}\bar{\vartheta}_\theta d\bar{z}\right)\frac{\partial\bar{\vartheta}_\theta}{\partial\bar{z}}\right] =$$

$$\frac{1}{F_r}\left(I_\theta - \frac{\partial\bar{\zeta}}{\bar{r}\partial\bar{\theta}}\right) + \frac{1}{R_e}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{A}_h\frac{\partial\bar{\vartheta}_\theta}{\partial\bar{r}}\right) + \frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\left(\bar{A}_h\frac{\partial\bar{\vartheta}_\theta}{\partial\bar{\theta}}\right) + \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\bar{A}_v\frac{\partial\bar{\vartheta}_\theta}{\partial\bar{z}}\right) + \frac{1}{\bar{r}}\bar{A}_h\frac{\partial\bar{\vartheta}_\theta}{\partial\bar{r}} + \bar{A}_h\left(2\frac{\partial\bar{\vartheta}_r}{\bar{r}\partial\bar{\theta}} - \bar{\vartheta}_\theta\right)\frac{1}{\bar{r}^2}\right]; \qquad (\bar{9}'')$$

$$S_t\frac{\partial\bar{\vartheta}_r}{\partial\bar{t}} + \left[\bar{\vartheta}_r\frac{\partial\bar{\vartheta}_r}{\partial\bar{r}} + \bar{\vartheta}_\theta\frac{\partial\bar{\vartheta}_r}{\bar{r}\partial\bar{\theta}} - \frac{\bar{\vartheta}_\theta^2}{\bar{r}} - \left(\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\int_0^{\bar{z}}\bar{\vartheta}_r d\bar{z} + \frac{1}{\bar{r}}\int_0^{\bar{z}}\bar{\vartheta}_r d\bar{z} + \frac{\partial}{\bar{r}\partial\bar{\theta}}\int_0^{\bar{z}}\bar{\vartheta}_\theta d\bar{z}\right)\frac{\partial\bar{\vartheta}_r}{\partial\bar{z}}\right] = -$$

$$\frac{1}{F_r}\left(I_r + \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{r}}\right) + \frac{1}{R_e}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{A}_h\frac{\partial\bar{\vartheta}_r}{\partial\bar{r}}\right) + \frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\left(\bar{A}_h\frac{\partial\bar{\vartheta}_r}{\partial\bar{\theta}}\right) + \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\bar{A}_v\frac{\partial\bar{\vartheta}_r}{\partial\bar{z}}\right) + \frac{1}{\bar{r}}\bar{A}_h\frac{\partial\bar{\vartheta}_r}{\partial\bar{r}} - \bar{A}_h\frac{\partial\bar{\vartheta}_\theta}{\bar{r}\partial\bar{\theta}} - \bar{\vartheta}_r)\frac{1}{\bar{r}^2}\right]; \qquad (\overline{10}'')$$

$$S_t\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{t}} + \frac{1}{\bar{r}}\int_0^{\bar{\zeta}+\bar{h}}\bar{\vartheta}_r d\bar{z} + \bar{\vartheta}_r\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{r}} + \bar{\vartheta}_\theta\frac{\partial\bar{\zeta}}{\bar{r}\partial\bar{\theta}} = -(\bar{h}+\bar{\zeta})\left(\frac{\partial\bar{\vartheta}_r}{\partial\bar{r}} + \frac{\partial\bar{\vartheta}_\theta}{\bar{r}\partial\bar{\theta}}\right). \qquad (11''б)$$

Граничные условия можно переписать в обозначениях параметров с «черточками», а затем, при переходе к размерным значениям учесть, что записные виды не меняются.

Наконец, переходя к безразмерным величинам при S_t=1, и «отбрасывая черточки» в обозначениях, выпишем систему уравнений ($\bar{9}''$), ($\overline{10}''$), ($11''$ б):

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial t}+\vartheta_r\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r}+\vartheta_\theta\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\vartheta_r\vartheta_\theta}{r}-\left(\frac{\partial}{\partial r}\int_0^z\vartheta_r dz+\frac{1}{r}\int_0^z\vartheta_r dz+\frac{\partial}{r\partial\theta}\int_0^z\vartheta_\theta dz\right)\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial z}=\frac{1}{F_r}\left(I_\theta-\frac{\partial\zeta}{r\partial\theta}\right)+$$
$$\frac{1}{R_e}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}A_h\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r}+A_h\left(2\frac{\partial\vartheta_r}{r\partial\theta}-\vartheta_\theta\right)\frac{1}{r^2}\right]; \qquad (24)$$

$$\frac{\partial \vartheta_r}{\partial t}+\vartheta_r\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}+\vartheta_\theta\frac{\partial\vartheta_r}{r\partial\theta}-\frac{\vartheta_\theta^2}{r}-\left(\frac{\partial}{\partial r}\int_0^z\vartheta_r dz+\frac{1}{r}\int_0^z\vartheta_r dz+\frac{\partial}{r\partial\theta}\int_0^z\vartheta_\theta dz\right)\frac{\partial\vartheta_r}{\partial z}=-\frac{1}{F_r}\left(I_r+\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)$$
$$+\frac{1}{R_e}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_r}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial\vartheta_r}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}A_h\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}-A_h\left(2\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}-\vartheta_r\right)\frac{1}{r^2}\right]; \qquad (25)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{1}{r}\int_0^{\zeta+h}\vartheta_r dz+\vartheta_r\frac{\partial\zeta}{\partial r}+\vartheta_\theta\frac{\partial\zeta}{r\partial\theta}=-(h+\zeta)\left(\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}+\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}\right). \qquad (26)$$

Для решения системы уравнений (24)-(26) с граничными условиями (12)-(16), (18) при некоторых заданных начальных условиях, учитывающие возмущения потока жидкости, будем ввести следующие обозначения аналогично обозначениям работы:

$$\vartheta_\theta(\theta,r,z,t)=\vartheta_{\theta_p}(\theta,r,t)\cdot w_p(z)=\vartheta_{\theta_p}(\theta,r,t)\cdot\cos(B_pZ'),$$
$$\vartheta_r(\theta,r,z,t)=\vartheta_r(\theta,r,z,t)\cdot w_p(z)=\vartheta_{r_p}(\theta,r,z,t)\cdot\cos(B_pZ'), \qquad (27)$$
$$w_p(z)=\cos(B_pZ'), \qquad T=T_p\cos(B_pZ'),$$

и речь идет о суммируемых величинах по индексу p:

$$\vartheta_\theta(\theta,r,z,t)=\vartheta_{\theta_p}(\theta,r,t)\cdot w_p(z)=\vartheta_{\theta_p}(\theta,r,t)\cdot\sum_{p=1}^{P}\cos(B_pZ') \qquad (27')$$

$$\vartheta_r(\theta,r,z,t)=\vartheta_r(\theta,r,z,t)\cdot w_p(z)=\vartheta_{r_p}(\theta,r,z,t)\cdot\sum_{p=1}^{P}\cos(B_pZ') \qquad (27'')$$

$$w_p(z)=\sum_{p=1}^{P}\cos(B_pZ'), \qquad T=T_p\sum_{p=1}^{P}\cos(B_pZ'),$$

где $B_p=\dfrac{p-1}{d}\pi$, $(p=1,2,\ldots,P)$, $d=\zeta+h$, $Z'=Z+\zeta$. (28)

Напишем члены уравнений рассматриваемой системы в обозначениях $(27')$, $(27'')$ с соответствующими суммируемыми величинами.

$$\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial z}=-\vartheta_{\theta_p}\sum_{p=1}^{P}B_p\sin(B_pZ')=-\vartheta_\theta\sum_{p=1}^{P}B_p\sin(B_pZ')/\sum_{p=1}^{P}\cos(B_pZ')=-\vartheta_\theta W_{psc_k}, \qquad (29')$$

$$\frac{\partial\vartheta_r}{\partial z}=-\vartheta_{r_p}\sum_{p=1}^{P}B_p\sin(B_pZ')=-\vartheta_r\sum_{p=1}^{P}B_p\sin(B_pZ')/\sum_{p=1}^{P}\cos(B_pZ')=-\vartheta_r W_{psc_k}, \qquad (29'')$$

$$\int_0^z\vartheta_\theta dz=\vartheta_{\theta_p}\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{B_p}\sin(B_pZ')=\vartheta_\theta\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{B_p}\sin(B_pZ')/\sum_{p=1}^{P}\cos(B_pZ')=\vartheta_\theta W_{isc_k}, \qquad (30')$$

$$\frac{\partial}{r\partial\theta}\int_0^z\vartheta_\theta dz=\frac{\partial\vartheta_{\theta_p}}{r\partial\theta}\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{B_p}\sin(B_pZ')=\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{B_p}\sin(B_pZ')/\sum_{p=1}^{P}\cos(B_pZ')=\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}W_{isc_k}, \qquad (30'')$$

$$\int_0^z\vartheta_r dz=\vartheta_{r_p}\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{B_p}\sin(B_pZ')=\vartheta_r\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{B_p}\sin(B_pZ')/\sum_{p=1}^{P}\cos(B_pZ')=\vartheta_r W_{isc_k}, \qquad (31')$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_0^z\vartheta_r dz=\frac{\partial\vartheta_{r_p}}{\partial r}\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{B_p}\sin(B_pZ')=\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{B_p}\sin(B_pZ')/\sum_{p=1}^{P}\cos(B_pZ')=\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}W_{isc_k}, \qquad (31'')$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\theta}{\partial z^2} = -\ \vartheta_{\theta_p} \sum_{p=1}^{P} B_p^2 \cos(B_p Z') = -\vartheta_\theta \sum_{p=1}^{P} B_p^2 \cos(B_p Z') / \sum_{p=1}^{P} \cos(B_p Z') = -\vartheta_\theta\ \mathrm{W}_{\mathrm{ppc}_k}, \qquad (32')$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial z^2} = -\ \vartheta_{r_p} \sum_{p=1}^{P} B_p^2 \cos(B_p Z') = -\vartheta_r \sum_{p=1}^{P} B_p^2 \cos(B_p Z') / \sum_{p=1}^{P} \cos(B_p Z') = -\vartheta_r\ \mathrm{W}_{\mathrm{ppc}_k}. \qquad (32'')$$

Для краткости записи, ввели обозначения:

$$\mathrm{W}_{\mathrm{isc}_k} = \frac{\sum_{p=1}^{P} \frac{1}{B_p} \sin(B_p Z'_k)}{\sum_{p=1}^{P} \cos(B_p Z'_k)}; \qquad \mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k} = \frac{\sum_{p=1}^{P} B_p \sin(B_p Z'_k)}{\sum_{p=1}^{P} \cos(B_p Z'_k)}; \qquad \mathrm{W}_{\mathrm{ppc}_k} = \frac{\sum_{p=1}^{P} B_p^2 \cos(B_p Z'_k)}{\sum_{p=1}^{P} \cos(B_p Z'_k)}. \qquad (33)$$

Чтобы содержать численной устойчивости вычисления, допустимые временные шаги для анализа течения должны ограничиться предполагаемой скоростью длинной волны [7].

Компоненты вертикально осредненной скорости $\overline{\vartheta_\theta}$, $\overline{\vartheta_r}$ по осям θ, r:

$$\overline{\vartheta_\theta} = \vartheta_{\theta_p} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{P} \cos(B_p Z'_k), \qquad (33')$$

$$\overline{\vartheta_r} = \vartheta_{r_p} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{P} \cos(B_p Z'_k). \qquad (33'')$$

В формулах безразмерных параметров первоначальный вид для коэффициентов турбулентных вязкостей A_h и A_v соблюдается после отбрасывания «черточек».

$$A_h = k_h \cdot n_{\mathrm{sh}} \sqrt{\overline{\vartheta^2_{\theta_p}} + \overline{\vartheta^2_{r_p}}} \cdot d^{5/6}, \qquad (34')$$

$$A_v = k_v \cdot n_{\mathrm{sh}} \sqrt{\overline{\vartheta^2_{\theta_p}} + \overline{\vartheta^2_{r_p}}} \cdot d^{5/6}. \qquad (34'')$$

Обозначая

$$B_{sc} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{P} B_p \sin(B_p Z'_k), \qquad (35')$$

получим $\dfrac{\partial A_h}{\partial z} = -\ A_h B_{sc}$; $\dfrac{\partial A_v}{\partial z} = -\ A_v B_{sc}$, т.е.

$$\frac{\partial A_h}{\partial z} = -k_h \cdot n_{\mathrm{sh}} \sqrt{\overline{\vartheta^2_{\theta_p}} + \overline{\vartheta^2_{r_p}}} \cdot d^{5/6} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{P} B_p \sin(B_p Z'_k) = -\ A_h \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{P} B_p \sin(B_p Z'_k), \qquad (35'')$$

$$\frac{\partial A_v}{\partial z} = -k_v \cdot n_{\mathrm{sh}} \sqrt{\overline{\vartheta^2_{\theta_p}} + \overline{\vartheta^2_{r_p}}} \cdot d^{5/6} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{P} B_p \sin(B_p Z'_k) = -\ A_v \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{P} B_p \sin(B_p Z'_k). \qquad (35''')$$

Должны быть учтены выше сказанные осреднения по вертикали.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A_h \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial z}\right) = A_h \frac{\partial^2 \vartheta_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial A_h}{\partial z} \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial z} = A_h \left(\frac{\partial^2 \vartheta_\theta}{\partial z^2} - \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{P} B_p \sin(B_p Z'_k) \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial z}\right) =$$

$$-\ \vartheta_{\theta_p} \sum_{p=1}^{P} B_p^2 \cos(B_p Z')\ A_h + \vartheta_{\theta_p} \sum_{p=1}^{P} B_p \sin(B_p Z') \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{P} B_p \sin(B_p Z'_k)\ A_h =$$

$$\vartheta_{\theta_p}\ k_h \cdot n_{\mathrm{sh}} \sqrt{\overline{\vartheta^2_{\theta_p}} + \overline{\vartheta^2_{r_p}}} \cdot d^{5/6} \left[\sum_{p=1}^{P} B_p \sin(B_p Z') \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{P} B_p \sin(B_p Z'_k) - \sum_{p=1}^{P} B_p^2 \cos(B_p Z')\right],$$

$(36')$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial \vartheta_r}{\partial z}\right) = A_v\frac{\partial^2\vartheta_r}{\partial z^2} + \frac{\partial A_v}{\partial z}\frac{\partial \vartheta_r}{\partial z} = A_v\left(\frac{\partial^2\vartheta_r}{\partial z^2} - \sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} B_p\sin(B_p Z_k')\frac{\partial \vartheta_r}{\partial z}\right) =$$

$$-\vartheta_{r_p}\sum_{p=1}^{P} B_p^2\cos(B_p Z')\; A_v + \vartheta_{r_p}\sum_{p=1}^{P} B_p\sin(B_p Z')\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} B_p\sin(B_p Z_k')\; A_v =$$

$$\vartheta_{r_p} k_v\cdot n_{\text{sh}}\sqrt{\vartheta^2_{\theta_p} + \vartheta^2_{r_p}}\cdot d^{5/6}\left[\sum_{p=1}^{P} B_p\sin(B_p Z')\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} B_p\sin(B_p Z_k') - \sum_{p=1}^{P} B_p^2\cos(B_p Z')\right],$$

$(36'')$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial\theta}\right) = A_h\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_h}{\partial\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial\theta} \approx A_h\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta_\theta}{\partial\theta^2}; \qquad (37')$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r}\right) = A_h\frac{\partial^2\vartheta_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial A_h}{\partial r}\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r} \approx A_h\frac{\partial^2\vartheta_\theta}{\partial r^2}; \qquad (37'')$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_r}{\partial\theta}\right) = A_h\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta_r}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_h}{\partial\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_r}{\partial\theta} \approx A_h\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta_r}{\partial\theta^2}; \qquad (38')$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}\right) = A_h\frac{\partial^2\vartheta_r}{\partial r^2} + \frac{\partial A_h}{\partial r}\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r} \approx A_h\frac{\partial^2\vartheta_r}{\partial r^2}. \qquad (38'')$$

С учетом (29)-(38) первых двух уравнений системы (24)-(26) напишем как

$$\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial t} + \vartheta_r\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r} + \vartheta_\theta\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\vartheta_r\vartheta_\theta}{r} + \left(\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\vartheta_r + \frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}\right)\vartheta_\theta\, \mathrm{W}_{\text{isc}_k}\;\mathrm{W}_{\text{psc}_k} = \frac{1}{F_r}\left(I_\theta - \frac{\partial\zeta}{r\partial\theta}\right) +$$

$$\frac{1}{R_e}A_h\left[\frac{\partial^2\vartheta_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{A_v}{A_h}\vartheta_\theta(\mathrm{W}_{\text{ppc}_k} - B_{sc}\,\mathrm{W}_{\text{psc}_k}) + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r} + \left(2\frac{\partial\vartheta_r}{r\partial\theta} - \vartheta_\theta\right)\frac{1}{r^2}\right];$$

$(39')$

$$\frac{\partial\vartheta_r}{\partial t} + \vartheta_r\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r} + \vartheta_\theta\frac{\partial\vartheta_r}{r\partial\theta} - \frac{\vartheta_\theta^2}{r} - \left(\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\vartheta_r + \frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}\right)\vartheta_r\, \mathrm{W}_{\text{isc}_k}\;\mathrm{W}_{\text{psc}_k} = -\frac{1}{F_r}\left(I_r + \frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)$$

$$+\frac{1}{R_e}\left[\frac{\partial^2\vartheta_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta_r}{\partial\theta^2} + \frac{A_v}{A_h}\vartheta_r(\mathrm{W}_{\text{ppc}_k} - B_{sc}\,\mathrm{W}_{\text{psc}_k}) - A_h\left(2\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta} - \vartheta_r\right)\frac{1}{r^2}\right]; \qquad (39'')$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \vartheta_r\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \vartheta_\theta\frac{\partial\zeta}{r\partial\theta} = -(h+\zeta)\left(\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\vartheta_r + \frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}\right). \qquad (26')$$

Для решения систем уравнений $(39')$, $(39'')$, $(26')$ с выше упомянутыми граничными условиями будем использовать схему предиктор-корректор метода дробных шагов [8]. Главными координатными осями в данном подходе, определения методом дробных шагов, считается пространственные области по направлениям r и θ, а для направления z осуществляется пересчет с учетом (27), $(27')$, $(27'')$ и (28) в случае необходимости. Разумеется, при этом, расчеты величин, зависящие от z производятся одновременно с переходом соответствующих шагов по направлению z.

При этом по направлению продольной оси течения θ, исходя из условия периодичности, в схеме корректора используется алгоритм Бунемана, а по направлению горизонтальной оси поперечного сечения r используется схема продольно-поперечной прогонки. В подробностях имеется изложения схемы предиктора-корректора.

Составлен общий алгоритм решения для изопериметрически настроенной (параметризированной) постановки задачи при выборе масштабов и параметра формы изменения прямоугольного поперечного сечения в безразмерных величинах.

Список литературы

1. I. Boussinesq, Memoire sur 1'influence des frottement dans les mouvements requliers des fluides, Journal de mathematiques pures et appliquees, 1868, deuxime seris, tome XIII.
2. J. Thompson, On the origin ang winding of rivers in alluvial plains with remarks on the flow around bends in pipes, Proceedings of the royal society of London, 1876, pp. 5—7.
3. Розовский И.Л. Движение воды на повороте открытого русла [Текст] / И.Л.Розовский. – Киев: Изд АН УССР, 1957. - 188 с.
4. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: Уч. Пособие [Текст] / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц // Т. VI. - Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 736 с.
5. Tomidokoro G. Three-dimensional numerical model for open channel flows // A collection of technical papers International symposium on computational fluid dynamics. -Nagoya, 1989, Shinshu University, Wakasato Nagano 380, Japan. – P. 995-1000.
6. Elder J. W. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow // J of Fluid Mechanics. - V.,P.4, 1959. - P. 544-560.
7. De Swart H.E., Zimmerman J.T.F. Tidal rectification in lateral viscous boundary layers of a semi-enclosed basin. J. Fluid Mech. 1987. vol. 184, P. 381-397.
8. Яненко Н.Н. Метод удобных шагов решения многомерных задач математической физики [Текст] / Н.Н.Яненко. - Новосибирск: Наука, 1967. –225 с.
9. Осмонов К.Т. Обезразмеривание параметров и этапы решения задачи вязкого течения в открытом канале трехмерной численной моделью [Текст] / К.Т.Осмонов // Современные проблемы механики сплошных сред: 2004. -вып. 3. – Бишкек: С. 91-97.
10. Усенов И.А. Приближенное решение нелинейного интегрально-дифференциального уравнения методом Ньютона-Канторовича [Электронный ресурс] / И.А.Усенов, Ю.В.Костырева, Алмамбет кызы С. / Вестник КГУСТА. 2020. - №4(70) - Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=45795374
11. Жапарова З.А. О специфической асимптотической устойчивости решений линейного однородного Вольтеррова интегро-дифференциальногоуравнения четвертого порядка [Электронный ресурс] / З.А.Жапарова / Вестник КГУСТА. 2021. - №1(71) - Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=46336692
12. Усенов И.А. Решение нелинейного операторного уравнения первого рода с непрерывным положительным линейным оператором [Электронный ресурс] / И.А.Усенов, Р.К.Усенова, А.Нуркалиева / Вестник КГУСТА. 2021. - №1(71). Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=46336693