

**ОСМОНОВ К.Т.**¹КГУСТА им. Н. Исанова, Бишкек, Кыргызская Республика**OSMONOV K.T.**¹KSUCTA n.a. N Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic

e-mail: fdoinit@mail.ru

ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ОТКРЫТОМУ КАНАЛУ В ПОСТАНОВКЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ**THREE-DIMENSIONAL PROBLEM OF FLOW OF VISCOUS LIQUID THROUGH AN OPEN CHANNEL IN THE FORMULATION OF A NUMERICAL SOLUTION**

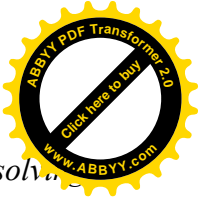
Макалада, Рейнольдстун чоң сандарында туурасынан кесилиши тик бурчтуу жантайган ачык каналдагы кысылбаган илээшкек суюктуктун статистикалык стационардык агуусу каралат. Негизги агуунун огу боюнча чектик шарты мезгилдүү болгон үч өлчөмдүү сандык модель сунушталган. Каналдын дубалчасында жана дубалчанын жанында үч катмарлуу чектик шарттары коюлуп, ал эми эркин бетте – нөлдүк же нөлдүк эмес жаныма чыңалуусунун шарты коюлат. Маселени чыгаруу үчүн, вертикалдык багыт боюнча косинусоидалык спектралдык функциялары болгон, горизонталдык координаттар боюнча бөлчөктүү кадамдар методунун предиктор-корректор схемалары колдонулат. Кесилиштин изопериметрлик оптималдаштыруу параметри болгон маселени чыгаруунун жалпы алгоритми түзүлгөн.

Өзөк сөздөр: үч өлчөмдүү сандык модель, Рейнольдс саны, үч катмарлуу чектик шарт, бөлчөктүү кадамдар методу, статистикалык стационардык агуу, жаныма чыңалуусу, косинусоидалык спектралдык функция, изопериметрлик оптималдаштыруу параметри, жалпы алгоритм.

В статье рассматривается статистически стационарное несжимаемое течение вязкой жидкости в открытом наклоненном канале прямоугольного поперечного сечения при больших числах Рейнольдса. Предложен трехмерный численный модель с периодическим граничным условием по оси основного течения. На стенке и около стенки канала ставятся трехслойные граничные условия, а на свободной поверхности – условия ненулевого или нулевого касательного напряжения. Для решения задачи используются схемы предиктор-корректор метода дробных шагов по горизонтальным координатам с косинусоидальной спектральной функцией по вертикальной координате. Составлен общий алгоритм решения задачи с изопериметрически оптимизируемым параметром сечения.

Ключевые слова: трехмерный численный модель, число Рейнольдса, трехслойное граничное условие, метод дробных шагов, статистически стационарное течение, касательное напряжение, косинусоидальная спектральная функция, изопериметрически оптимизируемый параметр, общий алгоритм.

The article considers the statistically stationary incompressible flow of a viscous liquid in an open inclined channel of rectangular cross-section with large Reynolds numbers. A three-dimensional numerical model with a periodic boundary condition along the axis of the main flow is proposed. Three-layer boundary conditions are placed on the wall and near the channel wall, and on the free surface - conditions of non-zero or zero tangential voltage. To solve the problem, the predictor-corrector schemes of the method of fractional steps by horizontal coordinates with



a cosine-oidal spectral function by vertical coordinate are used. A general algorithm for solving the problem with an isoperimetrically optimized cross-section parameter is compiled.

Key words: three-dimensional numerical model, Reynolds number, three-layer boundary conditions, method of fractional steps, statistically stationary flow, tangential voltage, cosine-oidal spectral function, isoperimetrically optimized parameter, general algorithm.

Течение в открытом наклоненном канале строго показывает трехмерное явление. Поэтому предлагаются трехмерные численные модели для течения в открытых каналах. Они подвергаются ограничению, чтобы применить вышеупомянутой модели для конкретных задач. В этой модели трехмерные неизвестные переменные разлагаются в ряды косинуса, показывающие разделение переменных в вертикальном направлении.

Рассмотрение бесконечного в продольном направлении канала снимает вопрос о краевых условиях на входе и выходе конечного канала, что сильно усложняет задачу решения уравнений Навье - Стокса.

Основные уравнения в трехмерной модели течения по открытому каналу представляются как следующие

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = gI_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial u}{\partial z}), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = gI_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial v}{\partial z}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial w}{\partial z}), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

в которых x, y, z - координаты (x - ось взятая по направлению потока); u, v, w - компоненты скоростей по направлениям x, y, z ; p - давление; g - ускорение силы тяжести; A_v и A_h - вертикальный и горизонтальный коэффициенты турбулентной вязкости; ρ - плотность жидкости, которая предполагается постоянным; I_x и I_y - средние уклоны дна по осевым направлениям x и y . Рассматривая быстро измененные профили скоростей жидкости около дна канала, мы используем условие скорости скольжения в этих плоскостях.

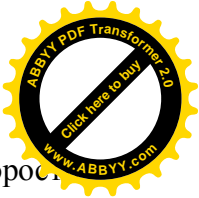
По предположению, что в каналах горизонтальный масштаб длины станет несколько десятков раз большим, чем масштаб глубины жидкости, уравнение (3) становится гидростатическим приближением, т.е.

$$p = \rho g(\zeta - z), \quad (5)$$

где ζ - уровень жидкости (воды) над плоскостью x, y . Здесь предполагается, что атмосферное давление на свободной поверхности равно нулю. Интегрируя уравнение (4) от дна жидкости ($z = -h$) до произвольной глубины z , получим

$$w(z) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u dS - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v dS, \quad (6)$$

где используется правило Лейбница. В работе [3] упоминается, что гравитационное волновое движение, в котором поперечная компонента скорости движения частиц несколько мала, т.е. амплитуда колебаний в волне значительно меньше по сравнению с



длиной волны в продольном направлении течения, что вертикальная компонента скорости движения точек поверхности совпадает с производной по времени от смещения ζ :

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (7)$$

Подставляя уравнения (5) и (6) в уравнения (1) и (2), и интегрируя уравнение (4) от дна жидкости до свободной поверхности ζ , и используя кинематическое условие на свободной поверхности, получаем так называемые квази-трехмерные уравнения модели [1]

Эти уравнения в расширенной записи представляются как

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} v dz \right) \frac{\partial u}{\partial z} = g I_x - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial u}{\partial y}) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial u}{\partial z}); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} v dz \right) \frac{\partial v}{\partial z} = g I_y - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial v}{\partial y}) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial v}{\partial z}); \end{aligned} \quad (9)$$

последнее уравнение можно представить в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u \cdot (h + \zeta)] + \frac{\partial}{\partial y} [v \cdot (h + \zeta)] = 0, \quad (10')$$

или, раскрывая скобки в (10'), можно записать в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = - (h + \zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (10'')$$

Как результат, уравнения (8) - (10), система уравнений в частных производных с тремя неизвестными u , v , ζ , являются базисными уравнениями течения в открытом канале.

Чтобы оценить турбулентную вязкость нужно использовать турбулентные модели, которые являются сложными, чтобы их численно решать. В данном случае эта переменная оценивается из следующих формул:

$$A_h = K_h \cdot u_* \cdot d = K_h (g \cdot h \cdot I)^{1/2} d = K_h \cdot n_{sh} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2} \cdot d^{5/6}, \quad (11')$$

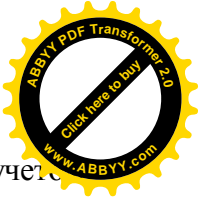
$$A_v = K_v \cdot u_* \cdot d = K_v (g \cdot h \cdot I)^{1/2} d = K_v \cdot n_{sh} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2} \cdot d^{5/6}, \quad (11'')$$

которая получается согласно выводам [2] путем выравнивания турбулентной вязкости с турбулентной диффузией, в которой \bar{u} и \bar{v} - компоненты вертикально осредненной скорости по x и y ; n_{sh} - коэффициент шероховатости Маннинга; K - постоянная, $K_h =$

6.0 для A_h и $K_v = 0.068$ для A_v ; u_* - скорость трения.

Движение жидкости изучается в канале прямоугольного поперечного сечения, где будем ввести обозначения: b - половина ширины поперечного сечения канала $d = \zeta + h$ - глубина жидкости.

Помимо других особенностей в данной гидродинамической постановке задачи, одним из отличительных ее черт заключается в том, что здесь учитывается трения на свободной поверхности с ненулевым касательным напряжением параллельного по (или против) основному направлению движения жидкости.



Граничные условия. На свободной поверхности выписывается с учетом ненулевого касательного напряжения, приведенной на примере течения с трением вызванной воздушным потоком со скоростью U_{sh} над свободной поверхностью жидкости [4, 5]

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\zeta+h} = 0,052 \cdot U_{sh}, \quad \text{в частности } U_{sh} = 0, \quad (12a)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=\zeta+h} = 0, \quad (12б)$$

$$\zeta \Big|_{z=\zeta+h} = \zeta(x, y), \quad (12в)$$

где $-h \leq z \leq \zeta$.

На оси симметрии, где $0 \leq y \leq b$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad (13a)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad (13б)$$

На границе стенки выполняются условия прилипания:

$$u \Big|_{y=a} = 0; \quad (14a)$$

$$u \Big|_{z=-h} = 0; \quad (14б)$$

$$v \Big|_{y=a} = 0; \quad (14в)$$

$$v \Big|_{z=-h} = 0. \quad (14г)$$

С удалением от стенки скорость течения резко возрастает [6]. Возрастание в большинстве случаев происходит в очень тонком слое толщиной δ_l , течение в котором определяется только молекулярной вязкостью жидкости и величиной напряжения сдвига. Выше вязкого слоя поток имеет турбулентный характер. Принято считать, что резкого перехода от вязкого слоя к турбулентной области течения нет. Поэтому зону перехода обычно выделяют в отдельный переходный слой, течение в котором будет зависеть как от молекулярной, так и от турбулентной вязкости.

Над переходным слоем располагается область полностью развитое турбулентное течение, которое определяется только турбулентными характеристиками, где молекулярная вязкость уже не играет заметной роли.

Толщину вязкого слоя δ_l обычно определяют из соотношения

$$N = \frac{u_* \delta_l}{\nu}, \quad (15a')$$

где ν - кинематический коэффициент молекулярной вязкости. Величину N Никурадзе [9] принимает равной 11,6, Гуржиенко Г.А. – 8,5, Шлихтинг Г. – 5. Число N для границы пристеночного слоя можно написать в виде

$$N = \frac{\bar{u}_\delta}{u_*}. \quad (15a'')$$

Пристеночная скорость \bar{u}_δ определяется только величиной динамической скорости u_* соотношением



$$\bar{u}_\delta = 5,6 u_* \quad (15a'')$$

справедливым для всех случаев опытов, как в гладком, так и в шероховатом руслах и каналах, при всех режимах турбулентного течения.

Верхняя граница переходной области обычно определяется числом

$$\frac{u_* \delta_l}{\nu} \cong 30 \div 70 \text{ и области постоянного напряжения } - \frac{u_* y}{\nu} \cong 500 \div 1000.$$

Деление на области, выработанное для турбулентного течения у гладких стенок, часто переносят на случай течения у шероховатых границ.

Распределение скоростей по глубине и от стенок потока является второй его важнейшей характеристикой, зависящей от вязкости \mathcal{E}_δ и можно предположить, что оно также будет определяться толщиной пристеночного слоя δ_l . Поэтому допустим, что величина местной скорости турбулентного ядра течения в безразмерной форме $\frac{\bar{u}_\delta}{u_*}$.

На границе ламинарного подслоя толщиной δ_l будут выполняться

$$u \Big|_{y=a-\delta_l} = 5,6 u_* = \frac{g \delta_l}{\nu} n_{sh}^2 \bar{u} \cdot (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2} \cdot d^{5/6}; \quad (15a)$$

$$u \Big|_{z=-h+\delta_l} = 5,6 u_* = \frac{g \delta_l}{\nu} n_{sh}^2 \bar{u} \cdot (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2} \cdot d^{5/6}; \quad (15b)$$

$$v \Big|_{y=a-\delta_l} = 5,6 v_* = \frac{g \delta_l}{\nu} n_{sh}^2 \bar{v} \cdot (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2} \cdot d^{5/6}; \quad (15e)$$

$$v \Big|_{z=-h+\delta_l} = 5,6 v_* = \frac{g \delta_l}{\nu} n_{sh}^2 \bar{v} \cdot (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2} \cdot d^{5/6}. \quad (15z)$$

На границе турбулентного подслоя толщиной δ_l выполняются

$$u \Big|_{y=a-\delta_l} = 2,44 u_* \ln \frac{u_* \delta_l}{\nu} + 5,5; \quad (16a)$$

$$u \Big|_{z=-h+\delta_l} = 2,44 u_* \ln \frac{u_* \delta_l}{\nu} + 5,5; \quad (16b)$$

$$v \Big|_{y=a-\delta_l} = 2,44 v_* \ln \frac{v_* \delta_l}{\nu} + 5,5; \quad (16e)$$

$$v \Big|_{z=-h+\delta_l} = 2,44 v_* \ln \frac{v_* \delta_l}{\nu} + 5,5, \quad (16z)$$

где из соотношений (11') и (11'') можно вывести

$$u_* = \frac{A_h}{K_h \cdot d} = n_{sh} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2} \cdot d^{-1/6}; \quad (17')$$

$$v_* = \frac{A_v}{K_v \cdot d} = n_{sh} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2} \cdot d^{-1/6}. \quad (17'')$$

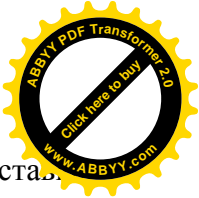
Исходя из статистической стационарности течения, путем использования одного периода по продольной оси $x : 0 \leq x \leq X$, т. е. там, где для периода времени $0 \leq t \leq T$ предполагается происхождение одинаковой последовательно расположенной картины течения по всей оси $-\infty \leq x \leq \infty$, будем выписывать условия периодичности

$$u(x, y, z, t) = u(x + X, y, z, t); \quad (18a)$$

$$v(x, y, z, t) = v(x + X, y, z, t); \quad (18b)$$

$$\zeta(x, y, t) = \zeta(x + X, y, t). \quad (18e)$$

Так как цель исследования включает, помимо получения основного решения, и дальнейшего нахождения оптимального решения, переход к безразмерным величинам



целесообразно осуществить, как в работе [5], согласно изопериметрической постановке задачи с введением параметра формы сечения.

Автомодельные движения среды принадлежат такому классу движений, когда параметры, характеризующие состояние и движение среды, меняются так, что распределение любого из этих параметров по координатам остается подобным самому себе при изменении времени, причем масштаб, характеризующий это распределение, может также по определенным законам меняться со временем. В случае автомодельных движений число независимых переменных в основной системе уравнений соответственно уменьшается.

Для пространственно-периодического течения [7] использовал обозначения для волнового числа

$$\alpha_0 = \frac{2\pi}{X} = \frac{2\pi}{\lambda \cdot \chi}, \quad X = \chi \cdot \lambda, \quad (19)$$

отсюда $\lambda = \frac{X}{\chi}$ - отношение длины периодичности к половине длины смоченного периметра поперечного сечения канала.

Сопоставление характерной величины X в продольном направлении за период времени T с учетом размерностей в системе уравнений, при стремлении к приведенным единым параметрам, указывает на первый взгляд к следующим соотношениям:

$$T \sim \frac{\chi}{U}; \quad \frac{x}{t} \sim \frac{X}{T}; \quad \frac{X}{T} = \frac{\lambda \cdot \chi}{\chi/U} = \lambda U; \quad X = T \cdot \lambda \cdot U. \quad (19')$$

В качестве безразмерного параметра формы поперечного сечения выберем $\beta = \frac{h}{b}$ - отношение глубины к полуширине сечения. Отсюда $h = \beta \cdot b$; и в качестве характерной длины выберем χ , где $\chi = b \cdot (1 + \beta)$ - длина половины смоченного периметра. Из этих соотношений:

$$b = \frac{\chi}{1 + \beta}; \quad h = \frac{\beta}{1 + \beta} \chi; \quad \text{для } 0 \leq y \leq b; \quad 0 \leq z \leq \zeta + h. \quad (19'')$$

Для компонентов скоростей и времени будем оценить размерные величины, обозначая

$$u = U \cdot \bar{u}; \quad v = U \cdot \bar{v}; \quad t = T \cdot \bar{t}; \quad u_* = U \cdot \bar{u}_*, \quad (20)$$

$$A_{h=v_T} \bar{A}_h; \quad A_{v_T} \bar{A}_v,$$

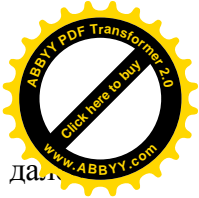
где U - характерная скорость по оси потока X , и для масштаба осредненной динамической скорости, \bar{u} , \bar{v} , \bar{u}_* - безразмерные компоненты скорости.

Одним из способов поиска вторичных течений, периодических одновременно по времени t и по продольной координате X предполагается, что поле скоростей вторичного течения имеет вид

$$u(x, y, z, t) = u(x + ct, y, z); \quad v(x, y, z, t) = v(x + ct, y, z), \quad (21)$$

где зависимости скоростей от $\xi = x - ct$ периодическая. При этом проблема поиска вторичного течения может быть сведена к решению специальной задачи, в которой неизвестная скорость c имеет смысл собственного значения. Достоинство этого метода заключается в том, что он уменьшает число независимых переменных, от которых существенно зависит вторичное течение. Он применим для поиска одновременно по t и по X вторичных течений. Тогда из соотношений (19') могут быть сопоставлены:

$$\frac{x}{c \cdot t} \sim \frac{X}{c \cdot T} = \frac{\lambda \cdot \chi}{c \cdot \chi/U} = \frac{\lambda \cdot U}{c} \sim 1; \quad c \sim \lambda \cdot U. \quad (19''')$$



Для учета безразмерных величин в изопериметрических параметрах будем далее обозначать: $\bar{b} = \frac{b}{\chi} = \frac{1}{1 + \beta}$; $\bar{\delta}_t = \frac{\delta_t}{\chi}$; $\bar{\delta}_l = \frac{\delta_l}{\chi}$,
 $\bar{d}_{cp} = \frac{d_{cp}}{\chi} = \frac{\beta}{1 + \beta}$, $\bar{d} = \frac{\beta}{1 + \beta} + \bar{\zeta}$; или $\bar{h} = \frac{h}{\chi} = \frac{\beta}{1 + \beta}$. (22)

Рассматриваемая область изменения пространственных координат в безразмерных величинах записываются как:

$$0 \leq \bar{x} \leq \lambda; \quad 0 \leq \bar{y} \leq \frac{1}{1 + \beta}; \quad (22')$$

$$0 \leq \bar{z} \leq \bar{\zeta} + \frac{\beta}{1 + \beta} \quad \text{или} \quad -\frac{\beta}{1 + \beta} \leq \bar{z} \leq 0. \quad (22'')$$

Чтобы охарактеризовать турбулентное течение целесообразно выразить размерности скоростей через связь коэффициента турбулентной вязкости, характерной длины и числа Рейнольдса

$$Re = \frac{\chi \cdot U}{\nu_T}. \quad (23')$$

С учетом обозначений (17)-(23'') система уравнений (8) - (10), удовлетворяющие граничные условия (12)-(18), переписывается как

$$\frac{U}{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{U^2}{\chi} \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\bar{z}} \bar{u} d\bar{z} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\bar{z}} \bar{v} d\bar{z} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right] =$$

$$gI_x - g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \frac{\nu_t U}{\chi^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{A}_h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{A}_h \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{A}_v \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}) \right]; \quad (8'')$$

$$\frac{U}{T} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{U^2}{\chi} \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\bar{z}} \bar{u} d\bar{z} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\bar{z}} \bar{v} d\bar{z} \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right] =$$

$$gI_y - g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} + \frac{\nu_t U}{\chi^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{A}_h \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{A}_h \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{A}_v \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}) \right]; \quad (9'')$$

$$\frac{\chi}{T} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + U \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\bar{u} \cdot (\bar{h} + \bar{\zeta})] + \frac{\partial}{\partial y} [\bar{v} \cdot (\bar{h} + \bar{\zeta})] \right\} = 0, \quad (10')$$

В уравнении (10'), разделяя оба части равенства на U , в котором размерные величины представляется числом Струхала

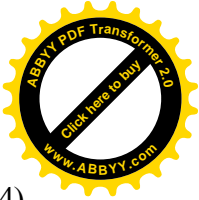
$$S_t = \frac{\chi}{T \cdot U} \sim 1, \quad (23''')$$

будем считать имеющим единичный порядок, т.е. при выполнении предположений (18') приводятся к безразмерным величинам. Исходя из этого, разделяя обе части уравнений (8'') и (9'') на U^2/χ , можно их привести к безразмерным формам записей.

Граничные условия можно переписать в обозначениях параметров с «черточками», а затем, при переходе к размерным значениям учесть, что записные виды не меняются. Лишь в условии (12a) правую часть следует считать умноженной к полуширине поверху.

Наконец, переходя к безразмерным величинам при $S_t=1$, и «отбрасывая черточки» в обозначениях, выпишем систему уравнений (8''), (9''), (10'):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\bar{z}} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\bar{z}} v dz \right) \frac{\partial u}{\partial z} =$$



$$\frac{1}{F_r} \left(I_x - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A_h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_h \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]; \quad (24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v dz \right) \frac{\partial v}{\partial z} =$$

$$\frac{1}{F_r} \left(I_y - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A_h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_h \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]; \quad (25)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = - (h + \zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (26)$$

Для решения системы уравнений (24)-(26) с граничными условиями (12)-(16), (18) при некоторых начальных условиях, учитывающие возмущения будем ввести следующие обозначения аналогично обозначениям работы [1]:

$$u(x, y, z, t) = u_p(x, y, t) \cdot w_p(z) = u_p(x, y, t) \cdot \cos(B_p Z'),$$

$$v(x, y, z, t) = v_p(x, y, t) \cdot w_p(z) = v_p(x, y, t) \cdot \cos(B_p Z'), \quad (27)$$

$$w_p(z) = \cos(B_p Z'), \quad T = T_p \cos(B_p Z'),$$

$$\text{где } B_p = \frac{p-1}{d} \pi, \quad (p = 1, 2, \dots, P), \quad d = \zeta + h, \quad Z' = Z + \zeta. \quad (28)$$

В обозначениях (27), напомним члены уравнений рассматриваемой системы с соответствующими вычислениями как для u :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = - u_p \sum_{p=1}^P B_p \sin(B_p Z'), \quad (29')$$

$$\int_{-h}^z u dz = u_p \sum_{p=1}^P \frac{1}{B_p} \sin(B_p Z'), \quad (30')$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u dz = \frac{\partial u_p}{\partial x} \sum_{p=1}^P \frac{1}{B_p} \sin(B_p Z'), \quad (31')$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - u_p \sum_{p=1}^P B_p^2 \cos(B_p Z'), \quad (32')$$

так и для v аналогично.

Чтобы содержать численной устойчивости вычисления, допустимые временные шаги для анализа течения должны быть ограничены предполагаемой скоростью длинной волны [1].

Компоненты вертикально осредненной скорости \bar{u} и \bar{v} по осям x и y :

$$\bar{u} = u_p \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \cos(B_p Z'_k), \quad (33')$$

$$\bar{v} = v_p \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \cos(B_p Z'_k). \quad (33'')$$

В формулах безразмерных параметров первоначальный вид для коэффициентов турбулентных вязкостей A_h и A_v соблюдается после отбрасывания «черточек».

$$A_h = k_h \cdot n_{sh} \sqrt{u_p^2 + v_p^2} \cdot d^{5/6} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \cos(B_p Z'_k), \quad (34')$$

$$A_v = k_v \cdot n_{sh} \sqrt{u_p^2 + v_p^2} \cdot d^{5/6} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \cos(B_p Z'_k). \quad (34'')$$



Обозначая

$$B_{sc} = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P B_p \sin(B_p Z'_k)}{\sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \cos(B_p Z'_k)}, \quad (35')$$

получим $\frac{\partial A_h}{\partial z} = -A_h B_{sc}; \quad \frac{\partial A_v}{\partial z} = -A_v B_{sc}.$

Должны быть осреднения по вертикали.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(A_h \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= A_h \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial A_h}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} = A_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P B_p \sin(B_p Z'_k)}{\sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \cos(B_p Z'_k)} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \\ &- u_p \sum_{p=1}^P B_p^2 \cos(B_p Z') k_h \cdot n_{sh} \sqrt{u_p^2 + v_p^2} \cdot d^{5/6} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \cos(B_p Z'_k) + \\ &u_p \sum_{p=1}^P B_p \sin(B_p Z') k_h \cdot n_{sh} \sqrt{u_p^2 + v_p^2} \cdot d^{5/6} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P B_p^2 \cos(B_p Z'_k) = u_p k_h \\ &\cdot n_{sh} \sqrt{u_p^2 + v_p^2} \cdot d^{5/6} \\ &\frac{1}{K} \left[\sum_{p=1}^P B_p \sin(B_p Z') \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P B_p^2 \cos(B_p Z'_k) - \sum_{p=1}^P B_p^2 \cos(B_p Z') \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \cos(B_p Z'_k) \right], \quad (36') \end{aligned}$$

Считая

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A_h \frac{\partial u}{\partial x} \right) = A_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial A_h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \approx A_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (37')$$

и так далее,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(A_h \frac{\partial v}{\partial y} \right) = A_h \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial A_h}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \approx A_h \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (38)$$

с учетом (29)-(37) первых двух уравнений системы (24)-(26) учитывая (27') эту систему в обозначениях u и v , обозначая

$$W_{isc_k} = \frac{\sum_{p=1}^P \frac{1}{B_p} \sin(B_p Z'_k)}{\sum_{p=1}^P \cos(B_p Z'_k)}; \quad W_{psc_k} = \frac{\sum_{p=1}^P B_p \sin(B_p Z'_k)}{\sum_{p=1}^P \cos(B_p Z'_k)}; \quad W_{ppc_k} = \frac{\sum_{p=1}^P B_p^2 \cos(B_p Z'_k)}{\sum_{p=1}^P \cos(B_p Z'_k)}, \quad (39)$$

приведенные выше уравнения можно записать в следующей форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) W_{isc_k} W_{psc_k} &= \frac{1}{F_r} \left(I_x - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_e} A_h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{A_v}{A_h} u (W_{ppc_k} - B_{sc} W_{psc_k}) \right]; \quad (40') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) W_{isc_k} W_{psc_k} &= \frac{1}{F_r} \left(I_y - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_e} A_h \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{A_v}{A_h} v (W_{ppc_k} - B_{sc} W_{psc_k}) \right]; \quad (40'') \end{aligned}$$



$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = - (h + \zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (26)$$

Для изопериметрически настроенной (параметризированной) постановки задачи при выборе масштабов и параметра формы изменения прямоугольного поперечного сечения в безразмерных величинах, исходя из (22), (22'), (23'), будем следовать обозначениям, отбрасывая «черточки».

Для решения систем уравнений (40'), (40''), (26) с выше упомянутыми граничными условиями будем использовать одну из схем метода дробных шагов в плане предиктор-корректор. Главными в данном подходе, определения методом дробных шагов, считается пространственные области по направлениям x и y , а для направления z осуществляется пересчет с учетом (27), (27') и (28) в случае необходимости. Разумеется, при этом, расчеты величин, зависящие от z производятся одновременно с переходом шагов по направлению z . При этом по направлению продольной оси течения x , исходя из условия периодичности, в схеме корректора используется алгоритм Бунемана, а по направлению горизонтальной оси поперечного сечения y используется схема продольно-поперечной прогонки. В подробностях имеется изложения схемы предиктора-корректора.

Составлен общий алгоритм решения задачи изопериметрически оптимизируемом параметре сечения с учетом как нулевого, так и ненулевого касательного напряжения на свободной поверхности.

Список литературы

1. Tomidokoro G. Three-dimensional numerical model for open channel flows // A collection of technical papers International symposium on computational fluid dynamics. -Nagoya, 1989, Shinshu University, Wakasato Nagano 380, Japan. – P. 995-1000.
2. Elder J. W. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow // J. of Fluid Mechanics. - V. 5, P.4, 1959. - P. 544-560.
3. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: Уч. Пособие [Текст] / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц // Т. VI. - Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 736 с.
4. Распопин Г. А. Влияние стратификации на касательные напряжения между воздушным потоком и свободной поверхностью [Текст] / Г.А.Распопин // Метеорология и гидрология. - 1971. - № 8. - С. 43-49.
5. Осмонов К.Т. Аналитическое и численное решения задач течения вязкой жидкости в открытых каналах при умеренных числах Рейнольдса [Текст]: Дисс...к.ф.-м.н. / К.Т.Осмонов. - М.: 1993. 01.02.05; утв. 12.02.93. - Бишкек, 1992. – 99 с.
6. Никитин И.К. Турбулентный русловой поток и процессы придонной области [Текст] / И.К.Никитин. – Киев: изд. АН УССР, 1963. – 143 с.
7. Рождественский Б.Л. Моделирование турбулентных течений в плоском канале [Текст] / Б.Л.Рождественский, И.Н.Симкакин // ЖВМ МФ. – Т. 25. - №1, 1985. - С. 96-121.
8. De Swart H.E., Zimmerman J.T.F. Tidal rectification in lateral viscous boundary layers of a semi-enclosed basin. J. Fluid Mech. 1987. vol. 184, P. 381-397.
9. Агроскин И.И. Гидравлика [Текст] / И.И.Агроскин. –М.: Госэнергоиздат, - 1950.
10. Усенов И.А. Приближенное решение нелинейного интегрально-дифференциального уравнения методом Ньютона-Канторовича [Электронный ресурс] / И.А.Усенов, Ю.В.Костырева, Алмамбет кызы С. / Вестник КГУСТА. 2020. - №4(70) - Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=45795374>



11. Жапарова З.А. О специфической асимптотической устойчивости решений линейного однородного Вольтеррова интегродифференциального уравнения четвертого порядка [Электронный ресурс] / З.А.Жапарова / Вестник КГУСТА. 2021. - №1(71) - Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=46336692>

12. Усенов И.А. Решение нелинейного операторного уравнения первого рода с непрерывным положительным линейным оператором [Электронный ресурс] / И.А.Усенов, Р.К.Усенова, А.Нуркалиева / Вестник КГУСТА. 2021. - №1(71). Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=46336693>