УДК. 515.123. DOI:10.35803/1694-5298.2021.4.677-682

АБЛАБЕКОВА Ч. А.
[1]КГУСТА им. Н. Исанова Бишкек, Кыргызская Республика

ABLABEKOVA CH. A.
[1]KSUCTA n. a. N. Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic
achacha@mail.ru

О РАВНОМЕРНО ПЕРИСТЫХ И РАВНОМЕРНО ПОЛНЫХ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ABOUT UNIFORMLY CIRNUATE AND UNIFORMLY FULL UNIFORM SPACES

Макалада бир калыптуу τ-канатчалуу жана бир калыптуу Чех боюнча τ -толук бир калыптуу мейкиндиктердин аныктамалары берилет жана алардын ортосундагы канатчалуу τ- бир калыптуу жана толук τ- бир калыптуу канатчалуу бир калыптуу мейкиндиктер өз Стоун - Чех бикомпактификацияларында байланыштары берилген.

***Өзөк сөздөр:** бир калыптуу мейкиндик, τ-канатчалуу бир калыптуу мейкиндиктер, τ- Чех толук бир калыптуу мейкиндиктер, бир калыптуу канатча, Стоун - Чехтин бикомпактификациясы.*

В статье даны характеристики равномерно τ - перистых и равномерно τ - полных по Чеху равномерных пространств и установлена их взаимосвязи перистых τ - равномерных и полных τ - равномерных оперений равномерных пространств в своих Стоун – Чеховских бикомпактификациях.

***Ключевые слова:** равномерное пространство, τ-перистые равномерные пространства, τ - полные по Чеху равномерные пространства, равномерные оперения, Стоун – Чеховская бикомпактификация.*

This article given characteristics of uniformly τ- pluming and uniformly τ- complete Cech uniform spaces and their interconnection is established between pluming τ - uniform and complete τ- uniform plumage of uniform spaces in their Stone - Chek bicompact

***Key words:** uniformly space, τ- pluming uniformly spaces, τ- complete of Cech uniformly spaces, uniformly plumage, bicompactification of Stone - Cech.*

Введение. А. А. Борубаевым определены равномерно τ - перистые и равномерно τ- полные по Чеху равномерные пространства, топология которых при $\tau = \aleph_0$ дает перистую паракомпактность и полную по Чеху паракомпактность.

Отметим, что равномерная τ - перистость и равномерная τ- полнота по Чеху определяется при помощи равномерных покрытий на несущем равномерном пространстве. Поскольку перистость топологических пространств определялось А. В. Архангельским при помощи «оперений» пространства в своей Стоун – Чеховской бикомпактификации, то естестенно возникает задача определить «равномерные оперения» равномерного пространства в своей Стоун – Чеховской бикомпактификации и установить их взаимосвязи с равномерной τ- полнотой по Чеху.

Основные определения. Для тихоновского пространства X бикомпакт $вX$ называется его *бикомпактным расширением* или *бикомпактификацией*, если X является всюду плотным подпространством $вX$, т.е. $[X]_{вX} = вX$. Через $\mathcal{C}(X)$ обозначается множество всех бикомпактификацией тихоновского пространства X. На множестве $\mathcal{C}(X)$ естественным образом определяется упорядочение "≤". Положим $в_2X \le в_1X$, если существует такое непрерывное отображение $f : в_1X \to в_2X$, что $f|_X = 1_X : X - X$ тождественный гомеоморфизм. Наибольший элемент семейства $\mathcal{C}(X)$ называется *бикомпактификацией Стоуна - Чеха* тихоновского пространства X и обозначается через βX.

Определение 1. Тихоновское пространство X называется *перистым пространством*, если существует последовательность $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых семейств в бикомпактификации Стоуна - Чеха βX такая, что

$(p1)$ семейство α_n покрывает X, т.е. $X \subset \cup\alpha_n$, для любого $n \in \mathbb{N}$,

$(p2)$ для каждой точки $x \in X$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \subset X$.[1]

Последовательность $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ называется *оперением* X в бикомпактификации Стоуна - Чеха βX.

Всякое равномерное пространство будет обозначаться как пара $(X, \mathcal{U})$, где X - тихоновское пространство и $\mathcal{U}$ - равномерность, определенная в терминах равномерных покрытий. Через $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{U}})$ обозначается пополнение равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$, а через $(s_uX, s\mathcal{U})$ - Самюэлевское бикомпактное расширение равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$. Для Самюэлевского бикомпактного расширения $(s_uX, s\mathcal{U})$ имеем $(s_uX, s\mathcal{U}) = (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{U}}_p)$, где $\mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}$ - максимальная предкомпактная равномерность, содержащаяся в $\mathcal{U}$.

Определение 2. Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ называется *равномерно* τ *- перистым* пространством, если существует псевдоравномерность $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, удовлетворяющая условиям:

1) $w(\mathcal{V}) \le \tau$;

2) $\cap\{\alpha(x) : \alpha \in \mathcal{V}\} = K_x$ -бикомпактно для любого $x \in X$;

3) Система $\{\alpha(K_x) : \alpha \in \mathcal{V}\}$ является базой окрестностей бикомпакта K_x в $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ для каждого $x \in X$;

4) $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{V}, \mathcal{U}_p\}$, где $\mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}$ сильнейшая предкомпактная равномерность из $\mathcal{U}$.

Определение 3. Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ называется *равномерно* τ *- полным* по Чеху пространством, если существует псевдо равномерность $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, удовлетворяющая условиям:

1) $w(\mathcal{V}) \le \tau$;

2) $\cap\{\alpha(x) : \alpha \in \mathcal{V}\} = K_x$ -бикомпактно для любого $x \in X$;

3) Система $\{\alpha(K_x) : \alpha \in \mathcal{V}\}$ является базой окрестностей бикомпакта K_x в $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ для каждого $x \in X$;

4) $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{V}, \mathcal{U}_p\}$, где $\mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}$ сильнейшая предкомпактная равномерность из $\mathcal{U}$;

5) псевдоравномерное пространство $(X, \mathcal{V})$ является полным.

Основные теоремы

Теорема 1. *Равномерное пространство* $(X,\mathscr{U})$ *равномерно* τ *-134ристо тогда и только тогда, когда* $(X,\mathscr{U})$ *имеет равномерное* τ *- оперение в Самюэлевском бикомпактном расширение* $(s_u X, s\mathscr{U})$

Доказательство: Пусть равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$ равномерно τ - перисто, т.е. на тихоновском пространстве X существует такая псевдоравномерность $\mathfrak{V}$, что $\mathfrak{V}\subset\mathscr{U}$ и удовлетворяющая все условия $(p1)$ - $(p2)$ определения 1. Так как $w(\mathfrak{V})\le\tau$, то псевдоравномерность $\mathfrak{V}$ имеет базу $\mathscr{P}$ мощности τ. Не умаляя общности можно считать, что $\mathscr{P}$ - состоит из открытых равномерных покрытий [2]. Положим $\tilde{\mathscr{P}}=\{Ex\alpha:\alpha\in\mathscr{P}\}$, где $Ex\alpha=\{ExA:A\in\alpha\}$, $ExA=s_u X\setminus[X\setminus A]_{s_u X}$. Тогда имеем, $|\tilde{\mathscr{P}}|\le\tau$ и $Ex\alpha\wedge X=\{ExA\wedge X:A\in\alpha\}=\alpha$ для любого равномерного покрытия $\alpha\in\mathscr{P}$.

Покажем, что $\cap\{(Ex\alpha A)(x):\alpha\in\mathscr{P}\}=B_x$ бикомпакт в X для любой точки $x\in X$. Это равенство следует из определения $Ex\alpha$ для любого $\alpha\in\mathscr{P}$.
Действительно, $B_x=\cap\{\alpha(x):\alpha\in\mathscr{P}\}$ $\cap\{(Ex\alpha)(x):\alpha\in\mathscr{P}\}$.

Теорема 2. *Пусть* $(X,\mathscr{U})$ *сильно равномерно* τ*- перистое равномерное пространство. Тогда на тихоновском пространств* X *существует такая равномерность* $\mathfrak{V}\subset\mathscr{U}$, $w(\mathfrak{V})\le\tau$ и $\mathscr{U}=\sup\{\mathfrak{V},\mathscr{U}_p\}$.

Доказательство. По условию равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$ является сильно равномерно τ- перистым равномерным пространством. Тогда в силу определения 2., существует псевдоравномерность $\mathfrak{V}\subset\mathscr{U}$, которая удовлетворяет условиям 1)-4) определения 2. т. е. 1) $w(\mathfrak{V})\le\tau$, 2) $\cap\{\alpha(x):\alpha\in\mathfrak{V}\}=B_x$- бикомпактно в X для любого $x\in X$; 3) семейство $\{\alpha(B_x):\alpha\in\mathfrak{V}\}$ - база фильтра окрестностей бикомпакта B_x;
4) $\mathscr{U}=\sup\{\mathfrak{V},\mathscr{U}_p\}$, где $\mathscr{U}_p$- максимальная предкомпактная равномерность из $\mathscr{U}$.

В силу выполнения условия 4), пусть для любого $\alpha\in X$ равномерные покрытия $\beta_\alpha\in\mathfrak{V}$ и $\gamma_\alpha\in\mathscr{U}_p$ таковы, что $\beta_\alpha\wedge\gamma_\alpha$ вписано в α. Пусть $x\in X$ произвольная точка.

Тогда $\cap\{(\beta_\alpha\wedge\gamma_\alpha)(x):\alpha\in\mathscr{U}\}\subset\cap\{\alpha(x):\alpha\in\mathscr{U}\}=\{x\}$,
т. е. имеем $\cap\{(\beta_\alpha\wedge\gamma_\alpha)(x):\alpha\in\mathscr{U}\}=\{x\}$.

Следовательно, имеет место очевидное равенство $(\beta_\alpha\wedge\gamma_\alpha)(x)=\beta_\alpha(x)\cap\gamma_\alpha(x)$.
Тогда $\cap\{\beta_\alpha(x)\cap\gamma_\alpha(x):\alpha\in\mathscr{U}\}=\{x\}$, следовательно,

$$\cap\{\beta_\alpha(x):\alpha\in\mathscr{U}\}=\{x\}\supset\cap\{\beta(x):\beta\in\mathscr{U}\}=B_x \text{ и}$$

$$\cap\{\gamma_\alpha(x):\alpha\in\mathscr{U}\}'=\{x\}\supset\cap\{\gamma(x):\gamma\in\mathscr{U}_p\}=\{x\}.$$

Таким образом $B_x\cap\{\alpha(x):\alpha\in\mathfrak{V}\}=\{x\}$ точки для любой $x\in X$ и псевдоравномерность $\mathfrak{V}$ - является равномерностью, для которой выполнены условия 1) - 4), т. е. выполнено условие теоремы.
Теорема доказана.

Следствие 1. Р*авномерное пространство* $(X,\mathscr{U})$ *сильно равномерно* τ *- перисто тогда и только тогда, когда на тихоновском пространстве* X *существует такая равномерность* $\mathfrak{V}\subset\mathscr{U}$, *что* $w(\mathfrak{V})\le\tau$ и $\mathscr{U}=\sup\{\mathfrak{V},\mathscr{U}_p\}$.

Доказательство. Если равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$ сильно равномерно τ - перисто, то условие следствия непосредственно вытекает из теоремы 2.

Обратно, если выполнено условие следствия, то тождественное отображен… $1_X : (X,\mathscr{U}) \to (X,\mathscr{V})$ является топологическим гомеоморфизмом, тем более совершенным отображением. А так как $\mathscr{U} = \sup\{\mathscr{V},\mathscr{U}_p\}$, то это отображение 1_X - предкомпактно, т.е. является равномерно совершенным отображением [4]. По условию $w(\mathscr{V}) \le \tau$. Тогда из теоремы 2., следует, что равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$ является сильно равномерно τ - перистым равномерным пространством.

Следствие доказано.

Теорема 3. *Равномерное пространство* $(X,\mathscr{U})$ *имеет индекс полноты* $ic(\mathscr{U}) \le \tau$ *или равномерно* τ *- полно по Чеху тогда и только тогда, когда существует полная псевдоравномерность* $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ *, что выполнены условия:*

(1) $w(\mathscr{V}) \le \tau$ *;*

(2) $\cap\{\alpha(x) : \alpha \in \mathscr{V}\} = B_x$ *-бикомпактно в* X *для любой точки* $x \in X$*;*

(3) семейство $\{\alpha(B_x) : \alpha \in B\}$ *- база фильтра окрестностей бикомпакта* B_x *в* X *для любой точки* $x \in X$*;*

(4) $(X,\mathscr{V})$ *-полное псевдоравномерное пространство.* [3]

Теорема 4. *Равномерное пространство* $(X,\mathscr{U})$ *является сильно равномерно* τ *- полным по Чеху пространством тогда и только тогда, когда* $(X,\mathscr{U})$ *равномерно совершенно отображается на некоторое полное метрическое пространство.*

Лемма 1. *Пусть* βX *в Стоун - Чеховская бикомпактификация равномерного пространства* $(X,\mathscr{U})$ *и* $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ *такая псевдоравномерность на* X*, что* $\bigcap\{\alpha(x) : \alpha \in \mathscr{V}\} = B_x \subset X$ *замкнуто в* βX *для любой точки* $x \in X$*.Тогда семейство* $\{\alpha(B_x) : \alpha \in \mathscr{V}\}$ *база фильтра окрестностей бикомпакта* B_x *в* X *для любой точки* $x \in X$*.*

Теорема 5. *Равномерное пространство* $(X,\mathscr{U})$ *равномерно* τ *- полно по Чеху тогда и только тогда, когда* $(X,\mathscr{U})$ *равномерно* G_τ *- расположено в* βX *.*

Доказательство. Пусть равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$ равномерно τ - полно по Чеху, т. е., в силу теоремы 3., существует псевдоравномерность $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$, удовлетворяющая условиям (1)-(4) этой теоремы. Так как $w(\mathscr{V}) \le \tau$, то существует база $\mathscr{B} \subset \mathscr{V}$, состоящая из открытых покрытий и мощности $\le \tau$,т.е. $|\mathscr{B}| \le \tau$. Тогда система $\{Ex\alpha : \alpha \in \mathscr{B}\}$, где $Ex\alpha = \{ExA \quad \beta X \setminus [X \setminus A]_{\beta X} : A \in \alpha\}$, состоит из открытых βX семейств $Ex\alpha$ и имеет мощность $\le \tau$, т.е. $|\{Ex\alpha : \alpha \in \mathscr{B}\}| \le \tau$. Так как $Ex\alpha \wedge X = \{ExA \cap X = A : A \in \alpha\} = \alpha$ для любого $\alpha \in \mathscr{B}$, то система $\{Ex\alpha : \alpha \in \mathscr{B}\}$ является равномерным τ- оперением равномерного пространства $(X,\mathscr{U})$ в βX. Покажем, что система $\{Ex\alpha : \alpha \in \mathscr{B}\}$ является полной. Система $\{Ex\alpha : \alpha \in \mathscr{B}\}$ - является равномерным τ - оперением, то $X \subset \cap\{\cup Ex\alpha : \alpha \in \mathscr{B}\}$. Покажем, что имеет место обратное включение. Пусть $p \in \cap\{\cup Ex\alpha : \alpha \in \mathscr{B}\}$. Тогда $p \in \cup Ex\alpha$ для любого $\alpha \in \mathscr{B}$, следовательно, существует такое $A_p^\alpha \in \alpha$, что $p \in ExA_p^\alpha$ для любого $\alpha \in \mathscr{B}$. Система $\{ExA_p^\alpha : \alpha \in \mathscr{B}\}$- центрирована в βX. Тогда система $\{A_p^\alpha = ExA_p^\alpha \cap X : \alpha \in \mathscr{B}\}$ - является базой фильтра Коши в псевдоравномерном пространстве $(X,\mathscr{V})$. В силу полноты псевдоравномерного пространства $(X,\mathscr{V})$ имеем $\cap\{A_p^\alpha : \alpha \in \mathscr{B}\} \ne \varnothing$. Пусть $x \in \cap\{A_p^\alpha : \alpha \in \mathscr{B}\}$ - некоторая точка. Тогда $x \in B_x \quad \cap\{\beta(x) : \beta \in \mathscr{B}\} \subset \cap\{A_p^\alpha : \alpha \in \mathscr{B}\}$ и B_x - бикомпактно. Ясно, что

$B_x \subset A_p^\alpha$ для любого $\alpha \in \mathcal{B}$. Тогда $B_x \subset \cap\{A_p^\alpha : \alpha \in \mathcal{B}\}$. Для любого $\alpha \in \mathcal{B}$ имеем $x \in ExA_p^\alpha \subset \alpha(x)$, следовательно $A_p^\alpha \subset B_x \quad \cap\{\alpha(x) : \alpha \in \mathcal{B}\}$ для любого $\alpha \in \mathcal{B}$. Тогда имеем $\cap\{A_p^\alpha : \alpha \in \mathcal{B}\} \subset B_x$ т.е. $B_x = \cap\{A_p^\alpha : \alpha \in \mathcal{B}\}$. По условию $p \in ExA_p^\alpha$ для любого $\alpha \in \mathcal{B}$. Тогда $p \in \cap\{ExA_p^\alpha : \alpha \in \mathcal{B}\}$. Для любого $\alpha \in \mathcal{B}$ имеем $x \in ExA_p^\alpha \subset Ex\alpha(x)$. Тогда $p \in \cap\{ExA_p^\alpha : \alpha \in \mathcal{B}\} \subset \cap\{Ex\alpha(x) : \alpha \in \mathcal{B}\} = B_x$, т. е. $p \in B_x \subset X$.

Таким образом, $\cap\{\cup Ex\alpha : \alpha \in \mathcal{B}\} = X$ и система $\{Ex\alpha : \alpha \in \mathcal{B}\}$ - является полным оперением.

Обратно, пусть равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ равномерно G_τ - расположено в Стоун - Чеховской бикомпактификация βX, т.е. равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ имеет в βX полное равномерное τ- оперение $\mathcal{P}$. Тогда имеем $\{\alpha \wedge X : \alpha \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{U}$, $\cap\{\alpha(x) : \alpha \in \mathcal{P}\} = B_x$ - бикомпактно в X для любой точки $x \in X$, $|\mathcal{P}| \le \tau$ и $\mathcal{P}$ - полное оперение, т.е. $\cap\{\cup\alpha : \alpha \in \mathcal{P}\} = X$. Пусть $\mathcal{V}$ - псевдо-равномерность, порожденная семейством равномерных покрытий $\{\alpha \wedge X : \alpha \in \mathcal{P}\}$.

Тогда $w(\mathcal{V}) \le \tau$, т. к. $\{\alpha \wedge X : \alpha \in \mathcal{P}\} = |\mathcal{P}| \le \tau$ и имеем $K_x = \cap\{\beta(x) : \beta \in \mathcal{V}\} \subset B_x$ для любого $x \in X$, и K_x - замкнуто относительно топологии $\tau_{\mathcal{V}}$, порожденной псевдоравномерностью $\mathcal{V}$. Так как $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, то $\tau_{\mathcal{V}} \subset \tau_{\mathcal{U}}$ и, следовательно, K_x - замкнуто в B_x и является бикомпактом как замкнутое подпространство бикомпакта B_x. На основании леммы 1. заключаем, что семейство $\{\beta(K_x) : \beta \in \mathcal{V}\}$. Тогда фильтра окрестностей бикомпакта K_x в X для каждой точки $x \in X$. Итак, псевдоравномерность $\mathcal{V}$ удовлетворяет условиям 1) - 3) теоремы 3. Покажем, что псевдоравномерное пространство $(X, \mathcal{V})$ является полным, т.е. выполняется условие 4) теоремы 3.

Пусть $\mathcal{F}$ произвольный фильтр Коши в псевдоравномерном пространство $(X, \mathcal{V})$. Тогда для любого $\beta \in \mathcal{V}$ найдется такое $F_B \in F$ и $B \in \beta$, что $F_B \subset B$. Так как псевдоравномерность порожденна семейством равномерных покрытий $\{\alpha \wedge X : \alpha \in \mathcal{P}\}$, то существует такое $A_B \in \alpha$, что $F_B \in B \subset A_B$ для любого $\alpha \in \mathcal{P}$. Пусть ξ - ультрафильтр на бикомпакте βX, содержащий фильтр $\mathcal{F}$, т. е. $\mathcal{F} \subset \xi$. В силу бикомпактности βX имеем $\cap\xi = \{p\}$ для некоторой точки $p \in pX$ и, ясно, что $\cap\xi = \{p\} \in \cap\mathcal{F} \ne \varnothing$. Для любого $\alpha \in \mathcal{P}$ имеем $A_B^\alpha \in \xi$ и, тем более $\cup\alpha \in \xi$. Тогда $\{p\} = \cap\xi \subset \cap\{\cup\alpha : \alpha \in \mathcal{P}\} = X$, т. е. $p \in X$. Следовательно, $\cap\mathcal{F} \ne \varnothing$ и $\cap\mathcal{F} \cap X \ni p$, т.е. псевдоравномерное пространство $(X, \mathcal{V})$ является полным.

Теорема доказана.

Выводы. Введены новые определения 2, 3 о равномерном пространстве $(X, \mathcal{U})$, являющимся *равномерно* τ *- перистым* и *равномерно* τ *- полным* по Чеху пространством при определенных условиях. Используя их построены новые теоремы 1, 5 и полностью приведены их доказательства.

Список литературы

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

1. Архангельский А.В. Об одном классе пространств, содержащих метрические в метрические и все локально бикомпактные пространства [Текст] / А. В. Архангельский // Мат. сборник. - 1965. - Т.97. - №31. - С.55-85.

2. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения [Текст] / А.А.Борубаев. – Фрунзе: Илим, 1990. - 171 с.

3. Isbell Y.R. Uniform spaces, Providence.1964. P.175.

4. Энгелькинг Р. Общая топология [Текст] / Р. Энгелькинг. - М.: Мир, 1986. – 752 с.

5. Аблабекова Ч. А. Об усилении равномерно перистых равномерных пространств [Текст] / Ч.А.Аблабекова. - Вестник КГУСТА. – Бишкек: 2014. - №1 (43). - С. 113-117.

6. Аблабекова Ч. А. Равномерное пространство с равномерным абсолютом [Электронный ресурс] / Ч.А.Аблабекова // Вестник КГУСТА. – Бишкек: 2021 №3(73). – стр. 429-433. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=47689468

7. Аблабекова Ч. А. О перистых равномерных пространствах [Электронный ресурс] / Ч.А.Аблабекова // Вестник КГУСТА. – Бишкек: 2021 №3(73). – стр. 434-438. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=47689469